

## Galoistheorie, WS 08/09

**Blatt 8****Aufgabe 26 (3+3+2 Punkte)**

Sei  $L$  ein endlicher Körper.

- (1) Zeige, daß  $|L|$  eine Primpotenz ist. D.h. zeige, daß es eine Primzahl  $p$  gibt und ein  $\ell \geq 1$  so, daß  $|L| = p^\ell$ .  
(Hinweis: Kann  $\text{char } L = 0$  sein? Zeige, daß  $L$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über seinem Primkörper ist.)
- (2) Sei weiterhin  $|L| = p^\ell$ . Sei  $K \subseteq L$  ein Teilkörper. Zeige, daß  $|K| = p^k$  für einen Teiler  $k$  von  $\ell$ . (Hinweis: Gradsatz).
- (3) Bestimme alle Teilkörper von  $\mathbf{F}_{27}$ ; vgl. Aufgabe 24.(3).

**Aufgabe 27 (3+2+3+3+3+4 Punkte)** (Multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers)

Sei  $(G, \cdot)$  eine multiplikativ geschriebene endliche abelsche Gruppe. Seien  $a, b \in G$ . Sei  $K$  ein endlicher Körper. Schreibe  $K^\times := K \setminus \{0\}$ .

- (1) Ist  $\text{ggT}(\text{o}(a), \text{o}(b)) = 1$ , so zeige, daß  $\text{o}(ab) = \text{o}(a)\text{o}(b)$ .
- (2) Sei  $d$  ein Teiler von  $\text{o}(a)$ . Zeige, daß  $\text{o}(a^{\frac{\text{o}(a)}{d}}) = d$ .
- (3) Zeige, daß es in  $G$  ein Element von Ordnung  $\text{kgV}(\text{o}(a), \text{o}(b))$  gibt.  
(Hinweis: Schreibe  $\text{o}(a) = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$  und  $\text{o}(b) = p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k}$  mit  $p_i$  prim. Mit (2) haben wir ein Element  $x_i \in G$  von Ordnung  $p_i^{\max\{s_i, t_i\}}$  für alle  $i$ , nämlich je eine geeignete Potenz von  $a$  oder von  $b$ . Bestimme  $\text{o}(x_1 \cdots x_k)$  mit (1).)
- (4) Sei  $x$  ein Element von  $G$  maximaler Ordnung. Zeige, daß  $\text{o}(g)$  ein Teiler von  $\text{o}(x)$  ist für alle  $g \in G$ . (Hinweis: Sonst wäre  $\text{o}(x) < \text{kgV}(\text{o}(x), \text{o}(g))$ . Verwende (3).)
- (5) Zeige, daß es ein  $x \in K^\times$  mit  $\text{o}(x) = |K| - 1$  gibt.  
(Hinweis: Sei  $x \in K^\times$  von maximaler Ordnung. Es ist  $\text{o}(x)$  ein Teiler von  $|K| - 1$ . Mit (4) folgt, daß alle Elemente von  $K^\times$  Nullstellen von  $X^{\text{o}(x)} - 1$  sind. Ein Polynom mit  $|K| - 1$  Nullstellen hat Grad  $\geq |K| - 1$ .)
- (6) Gib in  $\mathbf{F}_{16}^\times$  ein Element von Ordnung 15 an, samt seinen Potenzen; vgl. Aufgabe 24.(4).

**Aufgabe 28 (2 Punkte)**

Sei  $L|K$  eine endliche Körpererweiterung. Sei  $x \in L$ . Zeige, daß  $x$  algebraisch über  $K$  ist.