M. Künzer — Abgabe Mittwoch, 17.12.08 (da um eine Woche verschoben)

Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 7

Aufgabe 23 (8 Punkte) (Quotientenkörper)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, daß $\operatorname{frac} R$ ein Körper ist.

Zeige also, daß Addition und Multiplikation die Axiome eines kommutativen Rings erfüllen und daß es zu jedem Element ungleich 0 in $\operatorname{frac} R$ ein multiplikativ inverses Element gibt; vgl. §1.10.1.

Aufgabe 24 (4+2+4+6 Punkte) (Frobenius)

(1) Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K =: p > 0$. Zeige, daß

$$\begin{array}{ccl} K & \xrightarrow{\mathrm{Frob}_K} & K \\ x & \longmapsto & \mathrm{Frob}_K(x) := x^p \end{array}$$

ein Körpermorphismus ist, der sogenannte *Frobenius*.
Ist Frob_K ein Automorphismus? (Hinweis: Betrachte $\mathbf{F}_p(X)$.)
Ist Frob_K ein Automorphismus, falls K endlich ist?

(2) Zeige unter Verwendung von $\mathrm{Frob}_{\mathbf{F}_p}$ und der ersten Bemerkung in §2.1 den Kleinen Fermatschen Satz erneut; vgl. Aufgabe 12.(1).

(3) Konstruiere einen Körper $\mathbf{F}_{27}$ aus 27 Elementen. Bestimme $\{x \in \mathbf{F}_{27} \;:\; \mathrm{Frob}_{\mathbf{F}_{27}}(x) = x\}$.

(4) Konstruiere einen Körper $\mathbf{F}_{16}$ aus 16 Elementen. Zeige, daß $\{x \in \mathbf{F}_{16} \;:\; \mathrm{Frob}^2_{\mathbf{F}_{16}}(x) = x\}$ ein Teilkörper von $\mathbf{F}_{16}$ isomorph zu $\mathbf{F}_4$ ist.

Aufgabe 25 (3+3+3 Punkte)

(1) Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Seien $s,\, t \geqslant 1$. Sei $f(X) := X^s(X-1)^t$. Zeige, daß $\operatorname{ggT}(f(X), f'(X)) = X^{s-1}(X-1)^{t-1}$.

(2) Sei K ein Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerlegbar. Zeige, daß genau dann ein Linearfaktor in $f(X)$ mit Exponent $\geqslant 2$ auftritt (d.h. f eine doppelte Nullstelle in K hat), wenn $\operatorname{ggT}(f(X), f'(X)) \neq 1$.

(3) Sei L ein Körper, und sei K ein Teilkörper von L. Seien $f(X),\, h(X) \in K[X]$. Zeige, daß der in $K[X]$ genommene ggT von $f(X)$ und $h(X)$ mit dem in $L[X]$ genommenen übereinstimmt.