Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 6

Aufgabe 17 (2+3+3 Punkte)

Berechnen eines Elementes in $\mathbf{F}_8$ bedeute, es als $\mathbf{F}_2$-Linearkombination in der Standardbasis $(\beta^0, \beta^1, \beta^2)$ zu schreiben. Entsprechend in $\mathbf{F}_4$ resp. $\mathbf{F}_9$.

(1) Bestimme die Verknüpfungstafeln von $\mathbf{F}_4$ bezüglich Addition und Multiplikation.

(2) Berechne $(\alpha^2+1)^3$, $(\beta^2+1)(\beta^6+1)+\beta^2$ und $(\iota+1)^4-\iota$.

(3) Berechne α^{-1}, $(\beta^2+\beta+1)^{-1}$ und $(\iota+1)^{-1}$.

Aufgabe 18 (2+3+3 Punkte)

Ist G eine Gruppe und $x \in G$, so schreibe $\langle x \rangle = \{x^k \ : \ k \in \mathbf{Z}\}$. Ist K ein Körper, so schreibe $K^\times := K \smallsetminus \{0\}$.

(1) Finde ein $x \in \mathbf{F}_4^\times$ mit $\langle x \rangle = \mathbf{F}_4^\times$.

(2) Finde ein $x \in \mathbf{F}_8^\times$ mit $\langle x \rangle = \mathbf{F}_8^\times$.

(3) Finde ein $x \in \mathbf{F}_9^\times$ mit $\langle x \rangle = \mathbf{F}_9^\times$.

Aufgabe 19 (3+3+3 Punkte)

Bestimme alle normierten irreduziblen Polynome in $\mathbf{F}_q[X]$ von Grad n.

(1) Sei $q = 4$ und $n = 2$.

(2) Sei $q = 3$ und $n = 3$.

(3) Sei $q = 2$ und $n = 4$.

Aufgabe 20 (2 Punkte)

Zeige, daß die kommutativen Ringe $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ und $\mathbf{F}_9$ paarweise nichtisomorph sind.

Aufgabe 21 (2 Punkte)

Gibt es in $\mathbf{F}_8$ einen Teilkörper aus 4 Elementen? Warum?

Aufgabe 22 (3+3 Punkte)

(1) Sei $R \xrightarrow{f} S$ ein Morphismus kommutativer Ringe. Sei $J \subseteq S$ ein Ideal. Zeige, daß $f^{-1}(J) \subseteq R$ ein Ideal ist, das Kern f enthält.

(2) Sei R ein kommutativer Ring, und sei $I \subseteq R$ ein maximales Ideal. Zeige mittels (1) erneut, daß R/I ein Körper ist. (Hinweis: Wir haben zu zeigen, daß R/I genau 2 Ideale enthält. Wende (1) an auf $R \xrightarrow{\rho} R/I$. Sei J ein Ideal von R/I. In welchem Verhältnis stehen I und $\rho^{-1}(J)$? Verwende nun Maximalität von I.)