M. Künzer — Abgabe Mittwoch, 26.11.08

Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 5

Aufgabe 13 (3+3+3 Punkte)

(1) Seien a, $b \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Zeige, daß $a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = \mathrm{kgV}(a,b)\mathbf{Z}$.

(2) Finde das $x \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ mit $(12\mathbf{Z} + 30\mathbf{Z}) \cap 21\mathbf{Z} = x\mathbf{Z}$.

(3) Finde das $f(X) \in \mathbf{F}_2[X]$ mit

$$(X^4+1)\mathbf{F}_2[X] + (X^4+X^3+X+1)\mathbf{F}_2[X] + (X^3+1)\mathbf{F}_2[X] \;=\; f(X)\mathbf{F}_2[X]\ .$$

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Gib einen Ringisomorphismus φ von $\mathbf{F}_2[X]$ nach $\mathbf{F}_2[X]$ an mit $\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathbf{F}_2[X]}$, aber mit $\varphi^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{F}_2[X]}$.

Aufgabe 15 (3+3 Punkte)

(1) Bestimme $\mathrm{char}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$.

(2) Sei $K \xrightarrow{f} L$ ein Morphismus von Körpern. Zeige, daß $\mathrm{char}\, K = \mathrm{char}\, L$.

Aufgabe 16 (2+4+4+3 Punkte)

(1) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ nicht prim. Zeige, daß $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ kein Integritätsbereich ist.

(2) Berechne $\big(X^4+1+(X^7+1)\mathbf{F}_3[X]\big)^{-1}$ in $\mathbf{F}_3[X]/(X^7+1)\mathbf{F}_3[X]$.

(3) Wieviele Elemente enthält $R := \mathbf{F}_2[X]/(X^3+X^2+X+1)\mathbf{F}_2[X]$? Finde ein invertierbares Element in $R \smallsetminus \{1\}$. Ist R ein Integritätsbereich?

(4) Sei K ein Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ mit $f(0) = f_0 \neq 0$.
Bestimme $(X + f(X)K[X])^{-1}$ in $K[X]/f(X)K[X]$ (in Abhängigkeit von $f(X)$).