

Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 3**Aufgabe 7 (3+5 Punkte)**

- (1) Sei K ein Körper. Sei R ein kommutativer Ring, und sei $R \neq \{0_R\}$. Sei $K \xrightarrow{f} R$ ein Morphismus von Ringen. Zeige, daß f injektiv ist.
(Insbesondere sind Körpermorphismen stets injektiv.)
- (2) Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, daß $R[X] \xrightarrow{\varphi} R$, $f(X) = \sum_{i \geq 0} f_i X^i \mapsto f_0$ ein Ringmorphismus ist. Berechne Kern φ . Zeige, daß $R[X]/XR[X] \simeq R$.

Aufgabe 8 (2+4+3+3 Punkte) (Euklidischer Algorithmus)

Sei K ein Körper. Seien $f(X), h(X) \in K[X]$ mit $\deg f \leq \deg h$ gegeben.

Wir wollen ein $g(X) \in K[X]$ so bestimmen, daß $f(X)K[X] + h(X)K[X] = g(X)K[X]$.

(Ist $g(X)$ noch normiert, so ist dies nach Definition gleichbedeutend mit $\text{ggT}(f(X), h(X)) = g(X)K[X]$, vgl. §1.7.4.)

Ferner wollen wir $s(X), t(X) \in K[X]$ so bestimmen, daß $f(X)s(X) + h(X)t(X) = g(X)$.

- (1) Division mit Rest liefert $h(X) = f(X)q(X) + r(X)$ mit $q(X), r(X) \in K[X]$ und $\deg r < \deg q$. Zeige, daß $f(X)K[X] + h(X)K[X] = f(X)K[X] + r(X)K[X]$.
- (2) Sei $u_0(X) := h(X)$ und $u_1(X) := f(X)$. Sind $u_k(X), u_{k+1}(X) \in K[X]$ bekannt, so schreibe, falls $u_{k+1}(X) \neq 0$, $u_k(X) = u_{k+1}(X) \cdot q_{k+1}(X) + u_{k+2}(X)$ mit $q_{k+1}(X), u_{k+2}(X) \in K[X]$ und $\deg u_{k+2}(X) < \deg u_{k+1}(X)$.
Zeige, daß es ein $\ell \geq 0$ mit $u_\ell(X) \neq 0$ und $u_{\ell+1}(X) = 0$ gibt. Setze $g(X) := u_\ell(X)$. Zeige, daß $f(X)K[X] + h(X)K[X] = g(X)K[X]$.
- (3) Seien $s_\ell(X) := 1$ und $s_{\ell+1}(X) := 0$. Sind $s_k(X)$ und $s_{k+1}(X)$ bekannt für ein $k \in [2, \ell]$, so setzen wir $s_{k-1}(X) := s_{k+1}(X) - s_k(X)q_{k-1}(X)$.
Zeige, daß $f(X)s_1(X) + h(X)s_2(X) = g(X)$.
- (4) Seien $f(X) = X^3 + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$ und $h(X) = X^8 + X^3 + X + 1 \in \mathbf{F}_2[X]$.
Finde mit (1, 2, 3) ein $g(X)$ mit $f(X)K[X] + h(X)K[X] = g(X)K[X]$ und Elemente $s(X), t(X) \in \mathbf{F}_2[X]$ mit $f(X)s(X) + h(X)t(X) = g(X)$.

Aufgabe 9 (6 Punkte) (Formales Ableiten)

Sei R ein kommutativer Ring. Für $f(X) = \sum_{i \geq 0} f_i X^i \in R[X]$ setzen wir

$$f'(X) := \sum_{i \geq 1} i f_i X^{i-1}$$

(wobei ein Element aus R mit einem Element $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ durch Bilden dessen i -facher Summe in R multipliziert werde).

Zeige, daß für $f(X), g(X) \in R[X]$ und $r, s \in R$

$$\begin{aligned} (rf(X) + sg(X))' &= rf'(X) + sg'(X) \\ (f(X) \cdot g(X))' &= f'(X) \cdot g(X) + f(X) \cdot g'(X). \end{aligned}$$