Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 2

Aufgabe 5 (2+5+5 Punkte) (Biquadratische Gleichung)

Seien a, b, c, $d \in \mathbf{C}$ gegeben. Wir wollen ein $x \in \mathbf{C}$ mit $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ bestimmen.

(1) Falls $a \neq 0$, so substituiere $y = x + \frac{a}{4}$, $x = y - \frac{a}{4}$. Zeige, daß eine Gleichung der Form $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ resultiert, mit p, q, $r \in \mathbf{C}$. Gib p, q, r darin in Abhängigkeit von a, b, c, d an.

(2) Sei $\alpha \in \mathbf{C}$ so gewählt, daß $\alpha^3 + \frac{1}{2}p\alpha^2 - r\alpha - \frac{1}{2}pr + \frac{1}{8}q^2 = 0$ (vgl. Aufgabe 1).
Falls $p + 2\alpha = 0$, so zeige, daß $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ genau dann, wenn
$$(y^2 - \alpha)^2 \;=\; \alpha^2 - r\ .$$
Falls $p + 2\alpha \neq 0$, so zeige, daß $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ genau dann, wenn
$$(y^2 - \alpha)^2 \;=\; -(2\alpha + p)(y + \tfrac{q}{2(2\alpha+p)})^2\ .$$

(3) Schreibe $\gamma := \mathrm{i}\sqrt{6}$. Bestimme mittels $(1, 2)$ ein $x \in \mathbf{C}$ so, daß
$$x^4 + 4x^3 + 7x^2 + (6 + \gamma)x + \frac{3}{2} + \gamma \;=\; 0\ .$$

Dies beendet unseren kleinen Exkurs in die klassischen Methoden zur Lösung polynomialer Gleichungen.

Aufgabe 6 (3+4+4+3 Punkte) (Chinesischer Restsatz)

(1) Seien R und S kommutative Ringe. Seien auf dem kartesischen Produkt $R \times S$ Addition und Multiplikation definiert durch
$$\begin{array}{ccccc} (r,s) & + & (r',s') & := & (r+r', s+s') \\ (r,s) & \cdot & (r',s') & := & (r\cdot r', s\cdot s') \end{array}$$
wobei r, $r' \in R$ und s, $s' \in S$. Zeige, daß hierdurch ein kommutativer Ring $R \times S$ definiert wird. Falls R und S Körper sind, trifft das dann auch auf $R \times S$ zu?

(2) Sei R ein kommutativer Ring. Seien I, $J \subseteq R$ Ideale derart, daß $I + J = R$. Zeige, daß
$$\begin{array}{ccccc} R/(I\cap J) & \longrightarrow & R/I & \times & R/J \\ r + (I\cap J) & \longmapsto & (r + I & , & r + J) \end{array}$$
ein Isomorphismus kommutativer Ringe ist. (Hinweis: Warum genügt es für die Surjektivität, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ im Bild nachzuweisen?)

(3) Seien m, $n \in \mathbf{Z}$ gegeben mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Seien mit dem Euklidschen Algorithmus auch bereits s, $t \in \mathbf{Z}$ ermittelt mit $ms + nt = 1$. Zeige, daß $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ist. Gib Isomorphismen in beide Richtungen an.

(4) Zeige, daß $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \;\simeq\; \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ (als kommutative Ringe). Finde Isomorphismen in beide Richtungen.