M. Künzer Abgabe Mittwoch, 25.02.09

Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 14

Aufgabe 48 (2+2+6 Punkte)

(1) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $G = \langle g \rangle$ für ein $g \in G$ mit $\mathrm{o}(g) = n$, also G zyklisch. Zeige, daß jede Untergruppe von G von der Form $\langle g^d \rangle$ für einen Teiler d von n ist.

(2) Sei p prim. Sei $s \geqslant 1$. Ordne jedem Teiler d von s einen Körper K zwischen $\mathbf{F}_p$ und $\mathbf{F}_{p^s}$ mit $[K : \mathbf{F}_p] = d$ zu. Erhält man so alle Zwischenkörper?

(3) Konstruiere $\mathbf{F}_{64}$. Konstruiere alle Körper zwischen $\mathbf{F}_2$ und $\mathbf{F}_{64}$.
(Hinweis: `ElementToSequence` gibt Koeffizienten eines Element in $\mathbf{F}_{64}$ in Standardbasis.)

Aufgabe 49 (4+4 Punkte)

Zeige.

(1) Es ist $\mathcal{S}_n$ auflösbar für $n \in [1, 4]$. (Verwende Magma, ausgenommen `IsSolvable`).

(2) Es ist $\mathcal{S}_n$ nicht auflösbar für $n \geqslant 5$.
(Hinweis: Sei $M \trianglelefteqslant N \leqslant \mathcal{S}_n$ mit N/M abelsch. Falls N alle Zykel der Länge 3 enthält, so auch M. Denn gegeben $(a, b, c) \in N$, so wird, da N/M abelsch, $(a, b, c) = (a, b, d) \circ (a, c, e) \circ (a, b, d)^{-1} \circ (a, c, e)^{-1} \in M$, wobei $|\{a, b, c, d, e\}| = 5$.)

Aufgabe 50 (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ normiert von Grad $n \geqslant 1$. Sei L der Zerfällungskörper von $f(X)$ über K. Zeige, daß $f(X) \in K[X]$ irreduzibel ist, falls $[L : K] = n!$.

Aufgabe 51 (16 Punkte)

Ist $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ auflösbar?
(Verwende Magma, ausgenommen `GaloisGroup` und `IsSolvable`.)

(1) $f(X) = X^5 + 5X^2 + 3 \in \mathbf{Q}[X]$.

(2) $f(X) = X^5 + 5X^2 + 2 \in \mathbf{Q}[X]$.