M. Künzer — Abgabe Mittwoch, 11.02.09

Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 13

Aufgabe 44 (3+3+3 Punkte)

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $n \geqslant 1$. Sei L der Zerfällungskörper von $X^n - 1 \in K[X]$ über K. Zeige.

(1) Es ist $\{z \in L \;:\; z^n = 1\}$ eine Untergruppe der Ordnung n von $L^\times$, die von einem Element ζ_n der Ordnung n erzeugt wird, welches wir fixieren. Es ist $L = K(\zeta_n)$. (Hinweis: Vgl. Aufgaben 27.(4, 5), 25.(2)).

(2) Sei $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) := \{k + n\mathbf{Z} \;:\; \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}$. Zeige, daß $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ mit der Multiplikation aus $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ eine abelsche Gruppe bildet. Bestimme alle Elementordnungen in $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$. Ist $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$ von einem Element erzeugt?

(3) Sei für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$ das Element $i_\sigma + n\mathbf{Z} \in \mathrm{U}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ definiert durch $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{i_\sigma}$. Zeige, daß $\mathrm{Gal}(L|K) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, $\sigma \longmapsto i_\sigma + n\mathbf{Z}$ ein injektiver Gruppenmorphismus ist. Folgere, daß $\mathrm{Gal}(L|K)$ abelsch ist.

Aufgabe 45 (3+3 Punkte)

Sei K ein perfekter Körper. Sei $L|K$ eine endliche Erweiterung.

(1) Zeige, daß L perfekt ist. (Hinweis: L einmal wie üblich, und einmal via $x * y := x^p y$ für $x \in K$ und $y \in L$ als Vektorraum auffassen.)

(2) Sei $L|K$ galoisch. Sei $f(X) \in K[X]$ ein normiertes Polynom, welches in ein Produkt verschiedener normierter irreduzibler Polynome zerfällt. Sei M der Zerfällungskörper von $f(X)$ über L. Zeige, daß $M|K$ galoisch ist.

Aufgabe 46 (12+12 Punkte)

(1) Bestimme die Galoisgruppe von $X^6 + 3X + 3 \in \mathbf{Q}[X]$ mit Magma (ausgenommen `GaloisGroup`).

(2) Bestimme alle Körper zwischen $\mathbf{Q}$ und dem Zerfällungskörper von $X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$. (Hinweis: Aufgabe 34.(1), §3.4.2.1, Aufgabe 41.)

Aufgabe 47 (2+2 Punkte)

(1) Sei K perfekt, sei $E|L|K$ mit $E|K$ galoisch. Zeige mit einem Zerfällungskörperargument, daß $E|L$ galoisch ist; vgl. Lemma aus §3.5.2. (Hinweis: Aufgabe 45.(1).)

(2) Sei q eine Primpotenz, sei $s \geqslant 1$. Zeige mit einem Zerfällungskörperargument, daß $\mathbf{F}_{q^s}|\mathbf{F}_q$ galoisch ist; vgl. Lemma aus §3.6.