

Blatt 12**Aufgabe 40 (3 Punkte)**

Sei K ein perfekter Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom von Grad 2. Zeige, daß $\text{Gal}(f(X)) \simeq \mathcal{S}_2$. Folgere, daß $\text{Gal}(\mathbf{C}|\mathbf{R}) \simeq \mathcal{S}_2$.

Aufgabe 41 (4+4+5+3 Punkte)

Sei L der Zerfällungskörper von $f(X) \in K[X]$ (mit K perfekt und $f(X)$ ein Produkt verschiedener irreduzibler normierter Polynome). Sei $U \leq \text{Gal}(L|K)$.

Bestimme eine K -lineare Basis von $\text{Fix}_U L$.

(Hinweis: Es ist $\text{Tr}_U : L \rightarrow \text{Fix}_U L$, $x \mapsto \sum_{\sigma \in U} \sigma(x)$ eine surjektive K -lineare Abbildung.)

- (1) $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$, $U \simeq \langle (1, 3) \rangle$ in der Notation von §3.4.2.1.
- (2) $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$, $U \simeq \langle (1, 2, 3) \rangle$ in der Notation von §3.4.2.1.
- (3) $f(X) = X^4 + 4X^2 + 8X + 8 \in \mathbf{Q}[X]$, $U \simeq \langle (1, 2, 3) \rangle$ in der Notation der Lösung zu Aufgabe 34.(2). (Hinweis: Magma!)
- (4) $f(X) = X^{16} - X \in \mathbf{F}_2[X]$, $U = \langle \text{Frob}_{\mathbf{F}_{16}}^2 \rangle$; vgl. Aufgabe 24.(4).

Aufgabe 42 (3+3+2 Punkte)

Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus. Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeige.

- (1) Es ist $G/N := \{gN : g \in G\}$ eine Gruppe mit $1_{G/N} = 1_G \cdot N$ und $gN \cdot \tilde{g}N = (g \cdot \tilde{g})N$ für $g, \tilde{g} \in G$. Es heißt G/N *Faktorgruppe* von G nach (oder modulo) N .
- (2) Es ist $G/\text{Kern } f \rightarrow \text{Im } f$, $g \text{ Kern } f \mapsto f(g)$ ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus.
- (3) Sind G und H endlich, so teilt $|\text{Im } f|$ sowohl $|G|$ als auch $|H|$. (Hinweis: Lagrange.)

Aufgabe 43 (12 Punkte)

Sei K ein Körper. Sei $n \geq 1$. Schreibe $E := K(T_1, \dots, T_n)$.

- (1) Gib einen injektiven Gruppenmorphismus $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{Aut}(E|K)$ an. Wir identifizieren $\mathcal{S}_n$ mit ihrem Bild in $\text{Aut}(E|K)$.

- (2) Definiere

$$\sum_{i \in [0, n]} (-1)^{n-i} s_i X^i = \sum_{i \in [0, n]} (-1)^{n-i} s_i (T_1, \dots, T_n) X^i := (X - T_1) \cdots (X - T_n) \in E[X].$$

Im Fall $n = 3$ berechne $s_i(T_1, T_2, T_3)$ für $i \in [0, 3]$.

- (3) Definiere den Teilkörper

$$L := K(s_0, \dots, s_{n-1}) := \left\{ \frac{f(s_0, \dots, s_{n-1})}{g(s_0, \dots, s_{n-1})} : f(X_0, \dots, X_{n-1}), g(X_0, \dots, X_{n-1}) \in K[X_0, \dots, X_{n-1}], g(s_0, \dots, s_{n-1}) \neq 0 \right\} \subseteq E.$$

Zeige $L \subseteq \text{Fix}_{\mathcal{S}_n} E$. Folgere $[E : L] \geq n!$. (Hinweis: Dedekind.)

- (4) Zeige, daß $[L(T_1, \dots, T_{i-1}, T_i) : L(T_1, \dots, T_{i-1})] \leq n + 1 - i$ für $i \in [1, n]$. Folgere $[E : L] \leq n!$. Folgere $L = \text{Fix}_{\mathcal{S}_n} E$. Folgere $\mu_{T_i, L(T_1, \dots, T_{i-1})}(X) = (X - T_i) \cdots (X - T_n)$. Gib eine L -lineare Basis von E an.

(Hinweis: $(X - T_i) \cdots (X - T_n) = \frac{(X - T_1) \cdots (X - T_n)}{(X - T_1) \cdots (X - T_{i-1})} \in L(T_1, \dots, T_{i-1})[X]$.)