M. Künzer Abgabe Mittwoch, 28.01.09

Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 11

Aufgabe 37 (2+1+2+3+1 Punkte)

Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus.

(1) Sei $U \leqslant G$. Zeige, daß $f(U) \leqslant H$.

(2) Zeige, daß $\operatorname{Im} f \leqslant H$. (Hinweis: Spezialfall von (1).)

(3) Ist f injektiv, so zeige, daß $f|^{\operatorname{Im} f}$ ein Gruppenisomorphismus von G nach $\operatorname{Im} f$ ist.

(4) Sei $N \trianglelefteq H$. Zeige, daß $f^{-1}(N) \trianglelefteq G$.

(5) Zeige, daß $\operatorname{Kern} f \trianglelefteq G$. (Hinweis: Spezialfall von (4).)

Aufgabe 38 (4+2+3+2 Punkte) (Satz von Lagrange in (1.c))

Sei G eine endliche Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Schreibe $bU := \{bu : u \in U\}$ für $b \in G$.

(1) (Hinweis: Vgl. Aufgabe 11.(1).)

- (a) Zeige, daß für $b,\ b' \in G$ entweder $bU = b'U$ oder $bU \cap b'U = \emptyset$.
- (b) Zeige, daß $|bU| = |U|$ für alle $b \in G$.
- (c) Folgere, daß $|U|$ ein Teiler von $|G|$ ist.

(2) Berechne $(1,3) \circ (1,3,4)$ und $(1,6,3) \circ (2,4,3,5) \circ (2,4)$ in $\mathcal{S}_6$.

(3) Gib alle Untergruppen von $\mathcal{S}_3$ an. Welche davon sind normal?

(4) Verifiziere (1.c) für $G = \mathcal{S}_{12}$ und $U = \langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12), (1,3) \rangle$ via Magma.

Aufgabe 39 (10+15 Punkte)

Sei K ein perfekter Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ ein Produkt verschiedener irreduzibler Polynome. Berechne $\operatorname{Gal}(f(X))$. Verwende hierzu Magma (ausgenommen `GaloisGroup`).

(1) $f(X) = X^4 + 4X^2 + 8X + 8 \in \mathbf{Q}[X]$ (vgl. Aufgabe 34.(2)).

(2) $f(X) = X^6 + X^2 + 1 \in \mathbf{Q}[X]$ (vgl. Aufgabe 30.(2)).