Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 11**Aufgabe 37 (2+1+2+3+1 Punkte)**Sei $G \xrightarrow{f} H$ ein Gruppenmorphismus.

- (1) Sei $U \leq G$. Zeige, daß $f(U) \leq H$.
- (2) Zeige, daß $\text{Im } f \leq H$. (Hinweis: Spezialfall von (1).)
- (3) Ist f injektiv, so zeige, daß $f|_{\text{Im } f}$ ein Gruppenisomorphismus von G nach $\text{Im } f$ ist.
- (4) Sei $N \trianglelefteq H$. Zeige, daß $f^{-1}(N) \trianglelefteq G$.
- (5) Zeige, daß $\text{Kern } f \trianglelefteq G$. (Hinweis: Spezialfall von (4).)

Aufgabe 38 (4+2+3+2 Punkte) (Satz von Lagrange in (1.c))Sei G eine endliche Gruppe. Sei $U \leq G$. Schreibe $bU := \{bu : u \in U\}$ für $b \in G$.

- (1) (Hinweis: Vgl. Aufgabe 11.(1).)
 - (a) Zeige, daß für $b, b' \in G$ entweder $bU = b'U$ oder $bU \cap b'U = \emptyset$.
 - (b) Zeige, daß $|bU| = |U|$ für alle $b \in G$.
 - (c) Folgere, daß $|U|$ ein Teiler von $|G|$ ist.
- (2) Berechne $(1, 3) \circ (1, 3, 4)$ und $(1, 6, 3) \circ (2, 4, 3, 5) \circ (2, 4)$ in $\mathcal{S}_6$.
- (3) Gib alle Untergruppen von $\mathcal{S}_3$ an. Welche davon sind normal?
- (4) Verifiziere (1.c) für $G = \mathcal{S}_{12}$ und $U = \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), (1, 3) \rangle$ via Magma.

Aufgabe 39 (10+15 Punkte)Sei K ein perfekter Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ ein Produkt verschiedener irreduzibler Polynome. Berechne $\text{Gal}(f(X))$. Verwende hierzu Magma (ausgenommen GaloisGroup).

- (1) $f(X) = X^4 + 4X^2 + 8X + 8 \in \mathbf{Q}[X]$ (vgl. Aufgabe 34.(2)).
- (2) $f(X) = X^6 + X^2 + 1 \in \mathbf{Q}[X]$ (vgl. Aufgabe 30.(2)).