

Blatt 10**Aufgabe 33 (4+4 Punkte)**

Sei p prim. Sei $k \geq 2$.

- (1) Zeige, daß ein irreduzibles Polynom von Grad k in $\mathbf{F}_p[X]$ existiert.
(Hinweis: Nach Aufgabe 27.(5) ist $\mathbf{F}_{p^k}^\times = \langle y \rangle$ für ein $y \in \mathbf{F}_{p^k}^\times$; vgl. auch Kor. in §2.5.4. Insbesondere ist $\mathbf{F}_{p^k} = \mathbf{F}_p(y)$. Betrachte $\mu_{y, \mathbf{F}_p}(X)$.)
- (2) Sei $f(X) \in \mathbf{F}_p[X]$ normiert und irreduzibel mit $\deg f = k$. Zeige, daß in $\mathbf{F}_p[X]$ das Polynom $X^{p^k} - X$ von $f(X)$ geteilt wird, nicht aber von $f(X)^2$.
(Hinweis: Sei $K := \mathbf{F}_p[T]/f(T)\mathbf{F}_p[T]$. Sei $y := T + f(T)\mathbf{F}_p[T] \in K$. Warum teilt $f(X) = \mu_{y, \mathbf{F}_p}(X)$ das Polynom $X^{p^k} - X$? Wie zerfällt $X^{p^k} - X$ in $K[X]$? Wie zerfällt also $f(X)$ in $K[X]$? Wie oft kann also $f(X)$ nur in $X^{p^k} - X$ aufgehen?)

Aufgabe 34 (4+4+6+2 Punkte)

Bestimme den Zerfällungskörper von $f(X) \in K[X]$ via Magma. Gib seinen Grad über K an.

(Hinweis: Löse wie in Aufgabe 30. Damals fiel der Begriff des Zerfällungskörpers noch nicht.)

- (1) $f(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbf{Q}[X]$.
- (2) $f(X) = X^4 + 4X^2 + 8X + 8 \in \mathbf{Q}[X]$.
- (3) $f(X) = X^6 - X^3 + 2 \in \mathbf{Q}[X]$.
- (4) $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})[X]$.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit $\text{char } K = p > 0$. Sei $a \in K^\times$ keine p -te Potenz eines Elements von $K^\times$. Sei L der Zerfällungskörper von $X^p - a \in K[X]$.

Zeige, daß $X^p - a \in K[X]$ irreduzibel ist. Zeige, daß $[L : K] = p$.

(Hinweis: Sei $b \in L$ eine Nullstelle. Dann ist $(X - b)^p = X^p - a$. Hätte $X^p - a$ einen nichttrivialen Faktor $f(X) \in K[X]$, so wäre dieser von der Form $(X - b)^s$ für ein $s \in [1, p-1]$. Dann aber wäre $f_0 = (-b)^s$ in K . Mit $su + pv = 1$ mit $u, v \in \mathbf{Z}$ wäre $(-b) = (-b)^{su+pv} = ((-b)^s)^u (-a)^v \in K$.)

Aufgabe 36 (3+3 Punkte)

Sei $K(y)|K$ eine endliche monogene Körpererweiterung. Zeige oder widerlege.

- (1) Es ist $K(y)$ ein Zerfällungskörper von $\mu_{y, K}(X)$.
- (2) Ist $[K(y) : K] = 2$, so ist $K(y)$ ein Zerfällungskörper von $\mu_{y, K}(X)$.