Galoistheorie, WS 08/09

Blatt 1

Aufgabe 1 (2+2+2+4 Punkte) (Kubische Gleichung)

Seien $a,\ b,\ c\ \in\ \mathbf{C}$ gegeben. Wir wollen ein $x \in \mathbf{C}$ mit $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ bestimmen.

(1) Falls $a \neq 0$, so substituiere $y = x + \frac{a}{3}$, $x = y - \frac{a}{3}$. Zeige, daß eine Gleichung der Form $y^3 + py + q = 0$ resultiert, mit $p,\ q\ \in\ \mathbf{C}$. Gib p, q darin in Abhängigkeit von a, b, c an.

(2) Falls $p \neq 0$, so substituiere $y = z - \frac{p}{3z}$. Zeige, daß für eine Nullstelle $z \in \mathbf{C} \smallsetminus \{0\}$ der substituierten Gleichung das zugehörige y Nullstelle von $y^3 + py + q = 0$ ist.

(3) Löse die substituierte Gleichung aus (2).

(4) Bestimme mittels $(1,2,3)$ ein $x \in \mathbf{C}$ mit $x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. (Taschenrechner!)

Aufgabe 2 (2+4+3+3 Punkte) (Euklidscher Algorithmus)

Seien $a, b \in \mathbf{Z}_{>0}$ mit $a < b$ gegeben. Wir wollen $\mathrm{ggT}(a,b)$ bestimmen, sowie $s,\ t\ \in\ \mathbf{Z}$ mit $as + bt = \mathrm{ggT}(a,b)$.

(1) Division mit Rest liefert $b = aq + r$ mit $r \in [0, a-1]$. Zeige, daß $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a,r)$.

(2) Sei $x_0 := b$ und $x_1 := a$. Sind $x_k,\ x_{k+1} \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ bekannt, mit $x_k > x_{k+1}$, so schreibe, falls $x_{k+1} \neq 0$,

$$x_k \;=\; x_{k+1} \cdot q_{k+1} + x_{k+2}$$

mit $x_{k+2} \in [0, x_{k+1} - 1]$.

Zeige, daß es ein $\ell \geqslant 0$ mit $x_\ell > 0$ und $x_{\ell+1} = 0$ gibt. Zeige, daß $\mathrm{ggT}(a,b) = x_\ell$.

(3) Seien $s_\ell := 1$ und $s_{\ell+1} := 0$. Sind s_k und s_{k+1} bekannt für ein $k \in [2, \ell]$, so setzen wir

$$s_{k-1} \;:=\; s_{k+1} - s_k q_{k-1}$$

Zeige, daß $as_1 + bs_2 = x_\ell$. (Hinweis: Zeige $x_k s_k + x_{k-1} s_{k+1} = x_\ell$ per Induktion.)

(4) Seien $a = 23$, $b = 87$. Finde mit $(1,2,3)$ Elemente $s,\ t\ \in\ \mathbf{Z}$ mit $as + bt = \mathrm{ggT}(a,b)$.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)

Wir rechnen in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, wobei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Die Ergebnisse sind durch Elemente $x \in \mathbf{Z}$ mit $-n/2 < x \leqslant n/2$ repräsentiert anzugeben.

(1) Wir rechnen in $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. Bestimme $4 \cdot 3 + 1$. Bestimme $6 \cdot 5 \cdot 4$.

(2) Wir rechnen in $\mathbf{Z}/32\mathbf{Z}$. Bestimme $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$. Bestimme 31^{31}. Bestimme 4^3.

Aufgabe 4 (4+4 Punkte)

(1) Sei $m \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $k \in [0, m-1]$. Zeige, daß $k + m\mathbf{Z}$ genau dann invertierbar ist in $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, wenn $\mathrm{ggT}(k,m) = 1$. Berechne $(23 + 87\mathbf{Z})^{-1}$ und $(17 + 1000\mathbf{Z})^{-1}$.

(2) Sei n teilerfremd zu 10. Schreibe $1/n$ als periodischen Dezimalbruch. Zeige, daß die Periodenlänge gleich $\min\{k \geqslant 1\ :\ 10^k \equiv_n 1\}$ ist. Bestätige dies in den Fällen $n = 7$ und $n = 41$.