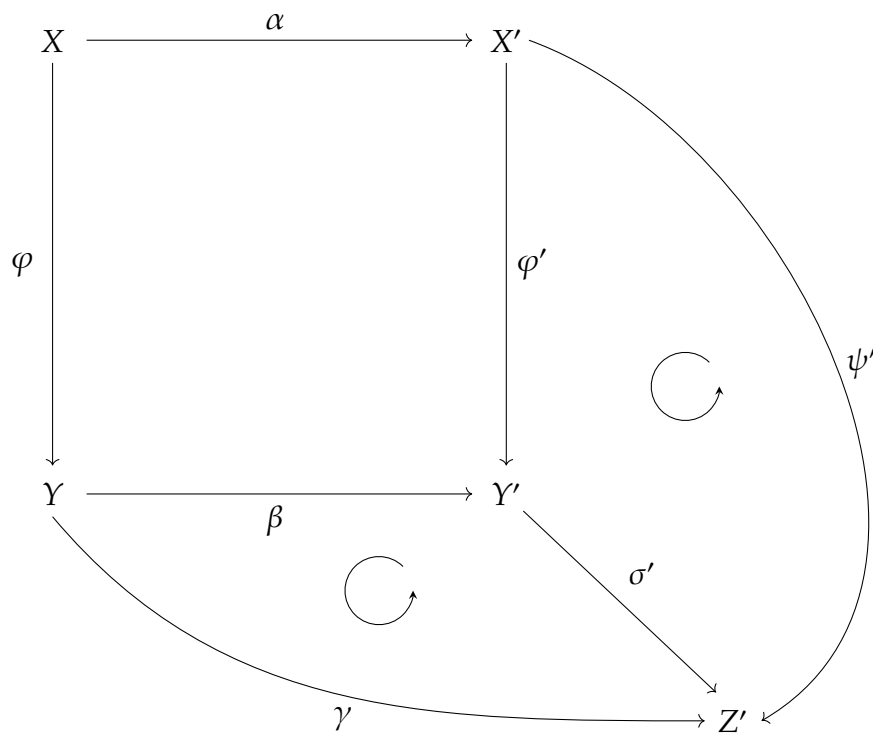


# Universelle Konstruktionen für Relationen

## Masterarbeit

Studiengang Mathematik Lehramt



Jonas Bechtel

Juni 2024



Universität Stuttgart



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Mengen und Relationen . . . . .	1
1.1.1	Grundlegende Begriffe und Eigenschaften . . . . .	1
1.1.2	Linkskürzbarkeit . . . . .	2
1.1.3	Äußere disjunkte Vereinigung . . . . .	2
1.2	Pushout . . . . .	2
1.3	Ergebnisse . . . . .	3
1.3.1	Situationen ohne mögliche Vervollständigung zu einem Pushout . . . . .	3
1.3.2	Mögliche Pushoutkonstruktionen . . . . .	5
1.3.3	Übersicht . . . . .	7
1.4	Pullback . . . . .	9
1.5	Der Graph einer Relation . . . . .	9
1.6	Charakterisierung der Eigenschaften von Relationen . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Konventionen und grundlegende Definitionen</b>	<b>12</b>
2.1	Konventionen . . . . .	12
2.2	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Pushout - Definition und Eigenschaften</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>Gegenbeispiele zur Existenz eines Pushouts</b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>Pushout-Konstruktionen</b>	<b>37</b>
5.1	Pushout einer links- und rechtseindeutigen Relation und einer beliebigen Relation . . . . .	37
5.2	Pushout zweier rechtseindeutiger Relationen . . . . .	54
5.3	Übersicht der möglichen und unmöglichen Pushoutkonstruktionen . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Pullback - Definition und Konstruktionen</b>	<b>69</b>
<b>7</b>	<b>Der Graph einer Relation</b>	<b>73</b>
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>80</b>



# 1 Einleitung

## 1.1 Mengen und Relationen

### 1.1.1 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften

Wir betrachten in der vorliegenden Arbeit die Kategorie der Mengen und Relationen. Ihre Objekte sind Mengen. Die Morphismen zwischen den Mengen sind Relationen. Eine Relation ist hierbei eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen. Für eine Relation  $\alpha$ , welche  $M$  als Ursprungsmenge und  $N$  als Zielmenge besitzt, schreiben wir auch  $M \xrightarrow{\alpha} N$ . Für die Menge, welche alle Relationen von  $M$  nach  $N$  beinhaltet, schreiben wir

$$\text{Rel}(M, N) = \{M \xrightarrow{\alpha} N : \alpha \text{ ist eine Relation}\}.$$

Wir betrachten die Teilmengen  $M' \subseteq M$  und  $N' \subseteq N$  und die Relation  $M \xrightarrow{\alpha} N$ . Für das Bild von  $M'$  unter  $\alpha$  schreiben wir

$$M'\alpha = \{n \in N : \exists m' \in M' \text{ mit } (m', n) \in \alpha\} \subseteq N$$

und für das Urbild von  $N'$  unter  $\alpha$

$$\alpha N' = \{m \in M : \exists n' \in N' \text{ mit } (m, n') \in \alpha\} \subseteq M,$$

wobei wir für ein  $m \in M$  auch  $m\alpha := \{m\}\alpha$  und für ein  $n \in N$  auch  $\alpha n := \alpha\{n\}$  schreiben.

Eine Relation  $M \xrightarrow{\alpha} N$  heißt linkstotal, wenn stets  $|m\alpha| \geq 1$  gilt. Sie heißt rechtseindeutig, wenn stets  $|m\alpha| \leq 1$  gilt. Sie heißt rechtstotal, wenn stets  $|\alpha n| \geq 1$  gilt. Sie heißt linkseindeutig, wenn stets  $|\alpha n| \leq 1$  gilt. Sind Relationen  $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$  gegeben, so kann auch deren Kompositum

$$\alpha \blacktriangle \beta = \{(m, p) \in M \times P : \exists n \in N \text{ mit } (m, n) \in \alpha \text{ und } (n, p) \in \beta\} \subseteq M \times P.$$

gebildet werden. Es ist dann  $M \xrightarrow{\alpha \blacktriangle \beta} P$ .

Zu einer Relation  $M \xrightarrow{\alpha} N$  kann auch deren duale Relation  $N \xrightarrow{\alpha^{\text{op}}} M$  mit

$$\alpha^{\text{op}} = \{(n, m) : (m, n) \in \alpha\} \subseteq N \times M$$

betrachtet werden.

Im Werk von Knauer und Knauer<sup>[2, §4]</sup> wird dies ebenso festgelegt, unter Verwendung etwas anderer Bezeichnungen. Freyd und Scedrov<sup>[3, §2.11]</sup> betonen darüber hinaus den Aspekt des Schnitts zweier Relationen in ihrer Axiomatisierung als Allegorie.

### 1.1.2 Linkskürzbarkeit

Wir bezeichnen eine Relation  $M \xrightarrow{\alpha} N$  als links kürzbar, falls für alle Relationen  $N \xrightarrow{\beta_1} P$ ,  $N \xrightarrow{\beta_2} P$  aus  $\alpha \blacktriangle \beta_1 = \alpha \blacktriangle \beta_2$  die Gleichheit  $\beta_1 = \beta_2$  folgt. Es gibt Möglichkeiten, die Linkskürzbarkeit von  $M \xrightarrow{\alpha} N$  zu charakterisieren. So ist  $M \xrightarrow{\alpha} N$  genau dann links kürzbar, wenn wir eine Relation  $N \xrightarrow{\gamma} M$  so finden, dass  $\gamma \blacktriangle \alpha = \text{id}_N$  gilt. Auch ist  $\alpha$  genau dann links kürzbar, wenn für alle  $n \in N$  gilt, dass  $\alpha n \setminus \alpha(N \setminus \{n\}) \neq \emptyset$  ist. Hieraus ergibt sich auch, dass eine rechtseindeutige und rechtstotale Relation links kürzbar ist; vgl. Lemma 15, Bemerkung 16.

### 1.1.3 Äußere disjunkte Vereinigung

Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir können deren äußere disjunkte Vereinigung als

$$A \uplus B := \{(1, a) : a \in A\} \cup \{(2, b) : b \in B\}$$

definieren. Unter Berücksichtigung dieser kann auch die äußere disjunkte Vereinigung von Relationen  $X \xrightarrow{\varphi} X'$  und  $Y \xrightarrow{\psi} Y'$  als

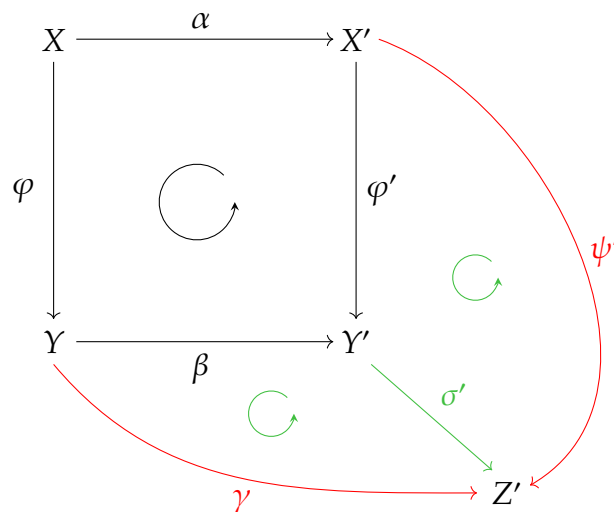
$$\varphi \uplus \psi = \{((1, x), (1, x')) : (x, x') \in \varphi\} \cup \{((2, y), (2, y')) : (y, y') \in \psi\}$$

definiert werden. Es ergibt sich so die Relation

$$X \uplus Y \xrightarrow{\varphi \uplus \psi} X' \uplus Y'.$$

## 1.2 Pushout

Wir betrachten das folgende Diagramm aus Mengen und Relationen

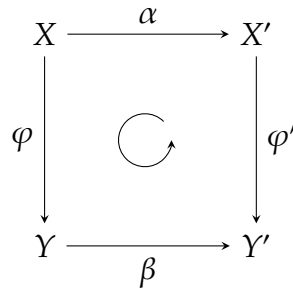


Das kommutative Viereck  $(X, X', Y, Y')$  heißt Pushout, falls es für jedes kommutative Viereck

$(X, X', Y, Z')$  genau eine Relation  $\sigma'$  gibt, die wie eingezeichnet zwei kommutative Dreiecke liefert.

Der Begriff des Pushouts wird auch in allgemeinen Kategorien so eingeführt, etwa von Mitchell<sup>[4, §7]</sup>, oder von Adámek, Herrlich und Strecker<sup>[5, §11.30]</sup>.

Wir betrachten ein kommutatives Viereck



aus endlichen Mengen.

Die Menge der kommutativen Vervollständigungen von  $\alpha$  und  $\varphi$  zu einem kommutativen Viereck für eine vorgegebene Menge  $Z'$  ist gegeben durch

$$KV_{\alpha, \varphi, Z'} := \{(\gamma, \psi') \in \text{Rel}(Y, Z') \times \text{Rel}(X', Z') : \varphi \blacktriangle \gamma = \alpha \blacktriangle \psi'\} \subseteq \text{Rel}(Y, Z') \times \text{Rel}(X', Z').$$

Ist  $(X, X', Y, Y')$  ein Pushout, so gibt es zu jedem Element  $(\gamma, \psi') \in KV_{\alpha, \varphi, Z'}$  genau eine Relation  $\sigma' \in \text{Rel}(Y' \times Z')$ , welche die Gleichungen  $\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'$  erfüllt. Dies gilt für jede Menge  $Z'$ . Insgesamt ist somit für jede Menge  $Z'$  die Kardinalität der Menge  $KV_{\alpha, \varphi, Z'}$  gleich der Kardinalität der Menge  $\text{Rel}(Y', Z')$ . Sofern es sich bei  $Y'$  und  $Z'$  um endliche Mengen handelt, ist  $|\text{Rel}(Y' \times Z')| = 2^{|Y'| \cdot |Z'|}$  und damit eine Zweierpotenz. Wird also eine Menge  $KV_{\alpha, \varphi, Z'}$  gefunden, deren Kardinalität keine Zweierpotenz ist, so existiert keine Vervollständigung des durch  $\alpha$  und  $\varphi$  gebildeten Ecks zu einem Pushout. Unter Verwendung dieses Arguments wurden in der vorliegenden Arbeit Gegenbeispiele zur Existenz eines Pushouts für gewisse Situationen erstellt.

### 1.3 Ergebnisse

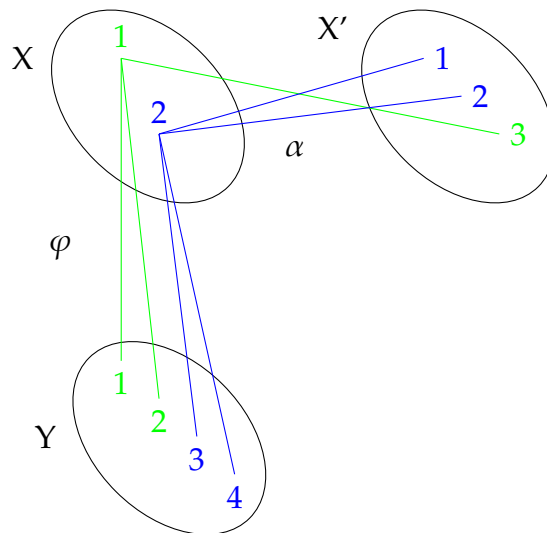
Wir betrachten alle Situationen, welche sich bezüglich der Zuweisung der Eigenschaften linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig zu den Relationen  $\alpha$  und  $\varphi$  ergeben.

#### 1.3.1 Situationen ohne mögliche Vervollständigung zu einem Pushout

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde nach Situationen gesucht, in welchen keine Vervollständigung des von  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  gebildeten Ecks zu einem Pushout möglich ist.

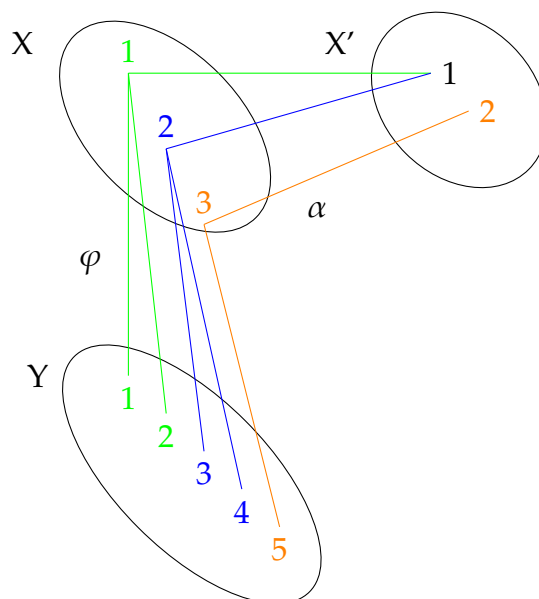
Diejenigen Situationen, für welche ein solches Gegenbeispiel für die Existenz eines Pushouts gefunden werden kann, sind durch die im folgenden aufgeführten Beispiele abgedeckt.

(1) Folgendes Diagramm lässt sich nicht zu einem Pushout vervollständigen, wie unter Verwendung von  $\text{Magma}^{[1]}$  gezeigt wurde.



Man beachte, dass  $\alpha$  und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig sind. Für  $Z' = \{1\}$  ergibt sich für die Kardinalität der Menge  $\text{KV}_{\alpha, \varphi, Z'}$  der Wert 40; vgl. Satz 37 (1).

(2) Folgendes Diagramm lässt sich nicht zu einem Pushout vervollständigen, wie unter Verwendung von  $\text{Magma}^{[1]}$  gezeigt wurde.



Man beachte, dass  $\alpha$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal



und linkseindeutig ist. Für  $Z' = \{1\}$  ergibt sich für die Kardinalität der Menge  $KV_{\alpha, \varphi, Z'}$  der Wert 20; vgl. Satz 37 (2).

Es wurde zum Beispiel in nLab<sup>[6]</sup> erwähnt, dass in der Kategorie der Mengen und Relationen nicht alle Colimiten existieren. Für die speziellere Frage nach der Existenz von Pushouts werden in der vorliegenden Arbeit Gegenbeispiele konstruiert wie oben angegeben.

### 1.3.2 Mögliche Pushoutkonstruktionen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde nach Situationen gesucht, in welchen eine Vervollständigung des von  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  gebildeten Ecks zu einem Pushout stets möglich ist. Hierzu wurden zwei Situationen gefunden, die alle anderen Situationen, in welchen stets die Konstruktion eines Pushouts möglich ist, abdecken. Diese zwei Situationen werden mit samt ihrer Konstruktion im Folgenden aufgeführt.

(1) Seien  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  gegeben. Sei die Relation  $\alpha$  rechtseindeutig und linkseindeutig. Diese Situation lässt sich zu einem Pushout

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\
 Y & \xrightarrow{\beta} & Y'
 \end{array}$$

vervollständigen.

Wir definieren  $A := Y \setminus X\varphi \subseteq Y$  und  $B := X' \setminus X\alpha \subseteq X'$ . Die Menge  $Y'$  wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 Y'_1 &:= (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi \\
 Y' &:= Y'_1 \uplus (A \uplus B)
 \end{aligned}$$

Die Relationen  $\beta$  und  $\varphi'$  werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 \varphi' &:= \{(x', (1, y'_1)) \in X' \times Y' : x' \in X', y'_1 \in Y'_1, \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \wedge (x, y'_1) \in \varphi\} \\
 &\quad \cup \{(b, (2, (2, b))) \in X' \times Y' : b \in B\} \subseteq X' \times Y' \\
 \beta &:= \{(y'_1, (1, y'_1)) \in Y \times Y' : y'_1 \in Y'_1\} \cup \{(a, (2, (1, a))) \in Y \times Y' : a \in A\} \subseteq Y \times Y'
 \end{aligned}$$

Dann ist das Viereck  $(X, X', Y, Y')$  ein Pushout; vgl. Satz 44.

(2) Seien  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  rechtseindeutig. Diese Situation lässt sich zu einem Pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \end{array}$$

vervollständigen.

Wir bilden  $X' \uplus Y = \{(1, x') : x' \in X'\} \cup \{(2, y) : y \in Y\}$ . Wir können auf  $X' \uplus Y$  eine Relation definieren:

$$(\Gamma) := \{((1, x'), (2, y)) : x' \in X', y \in Y, \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \text{ und } (x, y) \in \varphi\} \subseteq (X' \uplus Y) \times (X' \uplus Y)$$

Sei  $(\sim) \subseteq (X' \uplus Y) \times (X' \uplus Y)$  die von  $(\Gamma)$  erzeugte Äquivalenzrelation auf  $X' \uplus Y$ . Dann sei

$$\hat{Y}' := (X' \uplus Y)/(\sim) = \{[1, x'] : x' \in X'\} \cup \{[2, y] : y \in Y\}$$

wobei  $[1, x']$  die Äquivalenzklasse von  $(1, x')$  und  $[2, y]$  die Äquivalenzklasse von  $(2, y)$  bezeichne. Hiermit lässt sich die folgende Menge  $Y'$  definieren:

$$Y' := \hat{Y}' \setminus \left( \{[1, x'] : x' \in X', \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \text{ und } x\varphi = \emptyset\} \cup \{[2, y] : y \in Y, \exists x \in X \text{ mit } (x, y) \in \varphi \text{ und } x\alpha = \emptyset\} \right)$$

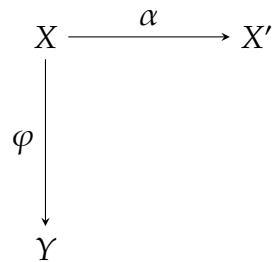
Die Relationen  $\beta$  und  $\varphi'$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \beta &:= \{(y, [2, y]) : y \in Y, [2, y] \in Y'\} \subseteq Y \times Y' \\ \varphi' &:= \{(x', [1, x']) : x' \in X', [1, x'] \in Y'\} \subseteq X' \times Y' \end{aligned}$$

Dann ist das Viereck  $(X, X', Y, Y')$  ein Pushout; vgl. Satz 46.

### 1.3.3 Übersicht

Wir betrachten die folgende Situation:



Es soll eine Übersicht gegeben werden, welche Situationen, die sich hinsichtlich der Eigenschaften der Relationen  $\alpha$  und  $\varphi$  ergeben, durch die oben vorgestellten Ergebnisse abgedeckt sind. Betrachtet werden die Eigenschaften rechtstotal, linkstotal, rechtseindeutig und links-eindeutig. Zur besseren Darstellung bilden wir einen Eigenschaftsvektor. Der Eigenschaftsvektor zu den Eigenschaften

$$\begin{pmatrix} \text{linkstotal} \\ \text{rechtstotal} \\ \text{linkseindeutig} \\ \text{rechtseindeutig} \end{pmatrix}$$

zeige an, ob die betrachtete Relation die jeweilige Eigenschaft besitzen soll. Wird die Eigenschaft gefordert, so enthält der Vektor an entsprechender Stelle die Ziffer 1. Wird die Eigenschaft nicht gefordert, so enthält der Vektor an entsprechender Stelle die Ziffer 0. So gibt beispielsweise der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, dass die Eigenschaften linkstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig gefordert werden, die Eigenschaft rechtstotal jedoch nicht gefordert wird.

Die nachfolgende Tabelle deckt alle auftretenden Fälle von  $\alpha$  und  $\varphi$  hinsichtlich derer Eigenschaften ab:

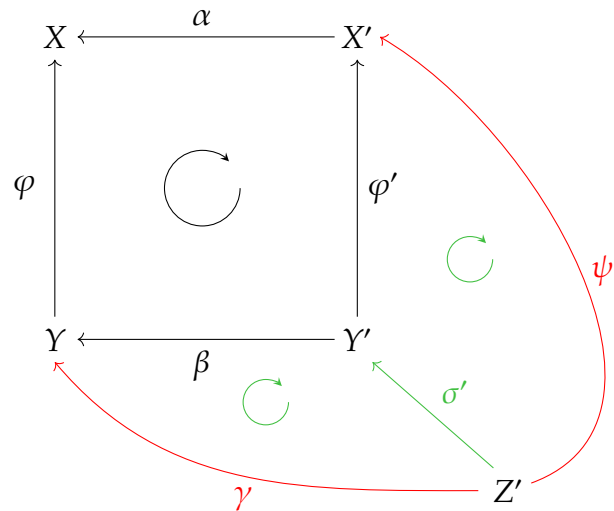
$\alpha \backslash \varphi$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue

Legende:

- Es existiert ein Gegenbeispiel zur Existenz eines Pushouts; vgl. 1.3.1 (1).
- Es existiert ein Gegenbeispiel zur Existenz eines Pushouts; vgl. 1.3.1 (2).
- Es existiert stets eine Pushoutkonstruktion; vgl. 1.3.2 (1).
- Es existiert stets eine Pushoutkonstruktion; vgl. 1.3.2 (2).

## 1.4 Pullback

Wir betrachten das folgende Diagramm aus Mengen und Relationen.



Das kommutative Viereck  $(X, X', Y, Y')$  heißt Pullback, falls es für jedes kommutative Viereck  $(X, X', Y, Z')$  genau eine Relation  $\sigma'$  gibt, die wie eingezeichnet zwei kommutative Dreiecke liefert.

Durch Dualisieren kann aus einem Pushout ein Pullback erhalten werden und umgekehrt. Wir betrachten die Ausgangssituation, in welcher die Relationen  $\alpha$  und  $\varphi$  mit entsprechenden Mengen gegeben sind. Es existiert stets dann ein Pullback, wenn  $\alpha$  linkseindeutig und rechtseindeutig ist und  $\varphi$  beliebig, oder wenn sowohl  $\alpha$  als auch  $\varphi$  linkseindeutig sind.

Sind  $\alpha$  und  $\varphi$  hingegen linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig oder ist  $\alpha$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig sowie  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig, so gibt es jeweils ein Gegenbeispiel zur Existenz eines Pullbacks.

## 1.5 Der Graph einer Relation

Wir betrachten eine Relation  $X \xrightarrow{\alpha} Y$ . Die Menge, welche alle Elemente von  $\alpha$  beinhaltet bezeichnen wir als den Graph von  $\alpha$  und schreiben hierfür  $\Gamma_\alpha$ . Die Relation

$$\dot{\alpha} := \{(x, (x, y)) : (x, y) \in \alpha\} \subseteq X \times \Gamma_\alpha$$

heißt der erste Faktor von  $\alpha$ . Die Relation

$$\ddot{\alpha} := \{((x, y), y) : (x, y) \in \alpha\} \subseteq \Gamma_\alpha \times Y$$

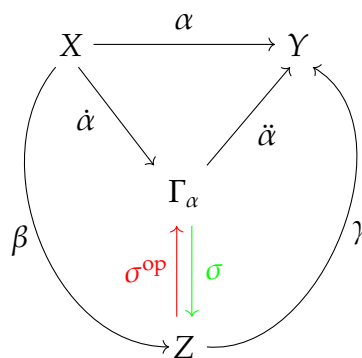
heißt der zweite Faktor von  $\alpha$ . Hiermit ergibt sich eine Faktorisierung von  $\alpha$  in seinen ersten Faktor und seinen zweiten Faktor: Es gilt  $\alpha = \dot{\alpha} \blacktriangle \ddot{\alpha}$ . Wir bezeichnen diese Faktorisierung als die Faktorisierung von  $\alpha$  über seinen Graphen. Es ist  $\dot{\alpha}$  rechtstotal und linkseindeutig. Es ist

$\ddot{\alpha}$  linkstotal und rechtseindeutig.

Wir betrachten nun zusätzlich eine Menge  $Z$  und Relationen  $X \xrightarrow{\beta} Z, Z \xrightarrow{\gamma} Y$  mit  $\beta \blacktriangle \gamma = \alpha$ . Die Relation  $\beta$  soll zudem rechtstotal und linkseindeutig und die Relation  $\gamma$  linkstotal und rechtseindeutig sein. In diesem Fall gibt es dann genau eine Relation  $\Gamma_\alpha \xrightarrow{\sigma} Z$  mit

- (1)  $\dot{\alpha} \blacktriangle \sigma = \beta$
- (2)  $\sigma \blacktriangle \gamma = \ddot{\alpha}$
- (3)  $\beta \blacktriangle \sigma^{\text{op}} = \dot{\alpha}$
- (4)  $\sigma^{\text{op}} \blacktriangle \ddot{\alpha} = \gamma$

Folgendes Diagramm veranschaulicht die Situation.

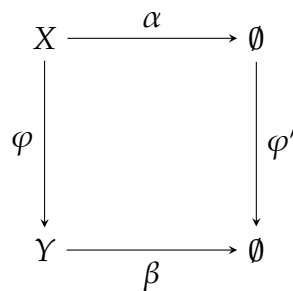


Vgl. Satz 60.

## 1.6 Charakterisierung der Eigenschaften von Relationen

Mithilfe der erarbeiteten Inhalte können die Eigenschaften rechtstotal und rechtseindeutig elementfrei charakterisiert werden.

Sei eine Relation  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  gegeben. Wir haben die leeren Relationen  $X \xrightarrow{\alpha} \emptyset, Y \xrightarrow{\beta} \emptyset$  und  $\emptyset \xrightarrow{\varphi'} \emptyset$ . Es ist  $\alpha$  rechtseindeutig und linkseindeutig. Die Relation  $\varphi$  ist nun genau dann rechtstotal, wenn das Viereck



ein Pushout ist; vgl. Bemerkung 52.

Wir betrachten erneut die Relation  $X \xrightarrow{\varphi} Y$ . Des Weiteren betrachten wir deren ersten Faktor  $\dot{\varphi}$ . Die Relation  $\varphi$  ist genau dann rechtseindeutig, wenn die zum ersten Faktor duale Relation komponiert mit dem ersten Faktor die Identität ergibt, das heißt, wenn  $\dot{\varphi}^{\text{op}} \blacktriangle \dot{\varphi} = \text{id}_{\Gamma_{\varphi}}$  erfüllt ist; vgl. Bemerkung 63.

Mittels Dualisieren ergeben sich hieraus auch Charakterisierungen für die Eigenschaften linkstotal und linkseindeutig.

## 2 Konventionen und grundlegende Definitionen

### 2.1 Konventionen

- Sei  $X$  eine Menge. Es bezeichnet  $\text{Pot}(X)$  die Potenzmenge von  $X$ .
- Sei  $X$  eine endliche Menge. Es bezeichnet  $|X|$  die Kardinalität von  $X$ .
- Seien  $M, N, P$  Mengen. Für Relationen  $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$  schreiben wir ihr Kompositum als  $M \xrightarrow{\alpha \circ \beta} P$ ; vgl. Definition 5.
- Seien  $A, B, X, Y$  Mengen. Es steht  $A \uplus B$  für die äußere disjunkte Vereinigung, welche als  $A \uplus B := \{(1, a) : a \in A\} \cup \{(2, b) : b \in B\}$  festgelegt wird; vgl. Definition 17.  
Seien  $X \xrightarrow{\varphi} A$  und  $Y \xrightarrow{\psi} B$  Relationen. Es steht  $\varphi \uplus \psi$  für deren disjunkte Vereinigung, welche als  $\varphi \uplus \psi = \{((1, x), (1, a)) : (x, a) \in \varphi\} \cup \{((2, y), (2, b)) : (y, b) \in \psi\}$  festgelegt ist; vgl. Definition 18.

Seien  $A \xrightarrow{\alpha} X, B \xrightarrow{\beta} X$  Relationen. Das Symbol  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  steht für die Relation  $A \uplus B \rightarrow X$

mit  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} := \{((1, a), x) : (a, x) \in \alpha\} \cup \{((2, b), x) : (b, x) \in \beta\} : A \uplus B \rightarrow X$ ; vgl. Definition 19.

Das Symbol  $\iota_1$  steht für die Relation  $A \xrightarrow{\iota_1} A \uplus B$  mit  $\iota_1 := \{(a, (1, a)) : a \in A\}$  und das Symbol  $\iota_2$  steht für die Relation  $B \xrightarrow{\iota_2} A \uplus B$  mit  $\iota_2 := \{(b, (2, b)) : b \in B\}$ ; vgl. Definition 20.

### 2.2 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

**Definition 1.** Seien  $M$  und  $N$  zwei Mengen. Eine Teilmenge  $\alpha \subseteq M \times N$  des kartesischen Produkts von  $M$  und  $N$  wird als *Relation* bezeichnet. Wir schreiben  $(m, n) \in \alpha$  für die Elemente der Relation, mit  $m \in M$  und  $n \in N$ . Wir schreiben auch  $M \xrightarrow{\alpha} N$  für eine Relation  $\alpha$ , welche  $M$  als Ursprungsmenge und  $N$  als Zielmenge aufweist.

**Bemerkung 2.** Wir betrachten somit im Folgenden die Kategorie der Relationen, deren Objekte Mengen sind und für welche die Morphismen von  $M$  nach  $N$  gegeben sind durch

$$\text{Rel}(M, N) = \{M \xrightarrow{\alpha} N : \alpha \text{ ist eine Relation}\} = \text{Pot}(M \times N)$$

**Definition 3.** Eine Relation  $M \xrightarrow{\alpha} N$  kann verschiedene Eigenschaften aufweisen.

- (1) Die Relation  $\alpha$  heißt *linkseindeutig*, falls Folgendes gilt:  
Für  $m_1, m_2 \in M$  und  $n \in N$  mit  $(m_1, n), (m_2, n) \in \alpha$  ist  $m_1 = m_2$ .



- (2) Die Relation  $\alpha$  heißt *rechtseindeutig*, falls Folgendes gilt:  
Für  $m \in M$  und  $n_1, n_2 \in N$  mit  $(m, n_1), (m, n_2) \in \alpha$  ist  $n_1 = n_2$ .
- (3) Die Relation  $\alpha$  heißt *linkstotal*, falls Folgendes gilt:  
Für  $m \in M$  gibt es ein  $n \in N$  mit  $(m, n) \in \alpha$ .
- (4) Die Relation  $\alpha$  heißt *rechtstotal*, falls Folgendes gilt:  
Für  $n \in N$  gibt es ein  $m \in M$  mit  $(m, n) \in \alpha$ .

**Definition 4.** Sei  $M \xrightarrow{\alpha} N$  eine Relation. Sei  $M' \subseteq M$  und  $N' \subseteq N$ .

Sei  $M'\alpha = \{n \in N : \exists m' \in M' \text{ mit } (m', n) \in \alpha\} \subseteq N$  das *Bild* von  $M'$  unter  $\alpha$ .

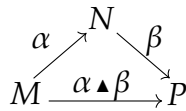
Sei  $\alpha N' = \{m \in M : \exists n' \in N' \text{ mit } (m, n') \in \alpha\} \subseteq M$  das *Urbild* von  $N'$  unter  $\alpha$ .

Für  $m' \in M'$  schreiben wir auch  $m'\alpha := \{m'\}\alpha$ . Für  $n' \in N'$  schreiben wir auch  $\alpha n' := \alpha\{n'\}$ .

**Definition 5.** Seien die Relationen  $M \xrightarrow{\alpha} N$  und  $N \xrightarrow{\beta} P$  gegeben. Ihr *Kompositum* ist dann wie folgt definiert:

$$\alpha \blacktriangle \beta = \{(m, p) \in M \times P : \exists n \in N \text{ mit } (m, n) \in \alpha \text{ und } (n, p) \in \beta\} \subseteq M \times P.$$

Es ist dann  $M \xrightarrow{\alpha \blacktriangle \beta} P$ . Insgesamt ergibt sich:



**Lemma 6.** Sei  $A \subseteq X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ . Dann gilt:  $(A\varphi)\psi = A(\varphi \blacktriangle \psi)$ .

*Beweis.*

Zu  $\subseteq$ : Sei  $z \in (A\varphi)\psi$ . Wir wählen ein  $b \in A\varphi$  mit  $(b, z) \in \psi$ . Wir wählen nun ein  $a \in A$  mit  $(a, b) \in \varphi$ . Dann gilt, dass  $(a, z) \in \varphi \blacktriangle \psi$  ist. Hieraus können wir schließen, dass  $z \in A(\varphi \blacktriangle \psi)$  ist.

Zu  $\supseteq$ : Sei  $z \in A(\varphi \blacktriangle \psi)$ . Dann können wir ein  $a \in A$  wählen mit  $(a, z) \in \varphi \blacktriangle \psi$ . Dafür können wir ein  $b \in Y$  wählen mit  $(a, b) \in \varphi$  und  $(b, z) \in \psi$ . Also ist  $b \in A\varphi$ , und damit gilt, dass  $z \in (A\varphi)\psi$  ist.  $\square$

**Definition 7.** Sei  $M \xrightarrow{\alpha} N$  eine Relation. Dann sei

$$\alpha^{\text{op}} = \{(n, m) : (m, n) \in \alpha\} \subseteq N \times M$$

die zu  $\alpha$  *duale Relation*. Es gilt  $\alpha^{\text{op}} : N \rightarrow M$ .

**Bemerkung 8.** Seien  $M, N$  und  $P$  Mengen und  $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\varphi} P$  Relationen. Es gilt:

$$(1) (\text{id}_X)^{\text{op}} = \text{id}_X$$

$$(2) (\alpha \blacktriangle \varphi)^{\text{op}} = \varphi^{\text{op}} \blacktriangle \alpha^{\text{op}}$$

**Bemerkung 9.** Sei  $M \xrightarrow{\alpha} N$  eine Relation. Es gilt

$$(\alpha^{\text{op}})^{\text{op}} = \alpha$$

**Lemma 10.** Sei  $M \xrightarrow{\alpha} N$  eine Relation. Es gilt:

(1)  $\alpha^{\text{op}}$  ist genau dann linkseindeutig, wenn  $\alpha$  rechtseindeutig ist.

(2)  $\alpha^{\text{op}}$  ist genau dann rechtseindeutig, wenn  $\alpha$  linkseindeutig ist.

(3)  $\alpha^{\text{op}}$  ist genau dann linkstotal, wenn  $\alpha$  rechtstotal ist.

(4)  $\alpha^{\text{op}}$  ist genau dann rechtstotal, wenn  $\alpha$  linkstotal ist.

*Beweis.*

(1), (2). Die Situationen sind symmetrisch, somit genügt es, (1) zu zeigen.

Zu " $\Rightarrow$ ": Seien  $(m, n_1), (m, n_2) \in \alpha$ . Zu zeigen ist, dass  $n_1 = n_2$  gilt. Da  $(m, n_1), (m, n_2) \in \alpha$  ist, gilt  $(n_1, m), (n_2, m) \in \alpha^{\text{op}}$ . Nach Voraussetzung ist  $\alpha^{\text{op}}$  linkseindeutig, und damit gilt  $n_1 = n_2$ .

Zu " $\Leftarrow$ ": Seien  $(n_1, m), (n_2, m) \in \alpha^{\text{op}}$ . Zu zeigen ist, dass  $n_1 = n_2$  gilt. Da  $(n_1, m), (n_2, m) \in \alpha^{\text{op}}$  ist, gilt  $(m, n_1), (m, n_2) \in \alpha$ . Nach Voraussetzung ist  $\alpha$  rechtseindeutig, und damit gilt  $n_1 = n_2$ .

(3), (4). Die Situationen sind symmetrisch, somit genügt es, (3) zu zeigen.

Zu " $\Rightarrow$ ": Sei  $n \in N$ . Zu zeigen ist, dass es ein  $m \in M$  gibt mit  $(m, n) \in \alpha$ . Es ist  $\alpha^{\text{op}}: N \rightarrow M$  nach Voraussetzung linkstotal. Somit gibt es ein  $m \in M$  mit  $(n, m) \in \alpha^{\text{op}}$ . Nach Definition ist dann  $(m, n) \in \alpha$ .

Zu " $\Leftarrow$ ": Sei  $n \in N$ . Zu zeigen ist, dass es ein  $m \in M$  gibt mit  $(n, m) \in \alpha^{\text{op}}$ . Es ist  $\alpha: M \rightarrow N$  nach Voraussetzung rechtstotal. Somit gibt es ein  $m \in M$  mit  $(m, n) \in \alpha$ . Nach Definition ist dann  $(n, m) \in \alpha^{\text{op}}$ .  $\square$

**Definition 11.** Sei  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  eine Relation. Die Relation  $\alpha$  heißt *Isomorphismus*, wenn es eine Relation  $Y \xrightarrow{\varphi} X$  gibt mit  $\varphi \blacktriangle \alpha = \text{id}_Y$  und  $\alpha \blacktriangle \varphi = \text{id}_X$ .

**Bemerkung 12.** Sei  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  eine Relation. Die Relation  $\alpha$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie die Eigenschaften rechtstotal, linkstotal, rechtseindeutig und linkseindeutig besitzt.

*Beweis.*

Zu " $\Rightarrow$ ": Sei  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  ein Isomorphismus. Wir können somit nach Definition eine Relation  $Y \xrightarrow{\varphi} X$  wählen mit  $\varphi \blacktriangle \alpha = \text{id}_Y$  und  $\alpha \blacktriangle \varphi = \text{id}_X$ . Zu zeigen ist, dass  $\alpha$  dann linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig ist.

(a) Zur Linkstotalität von  $\alpha$ : Sei  $x \in X$ . Es ist dann  $(x, x) \in \text{id}_X = \alpha \blacktriangle \varphi$ . Wir können ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \alpha$  und  $(y, x) \in \varphi$ . Somit gibt es für jedes  $x \in X$  ein  $y \in Y$  mit  $(x, y) \in \alpha$ . Die Relation  $\alpha$  ist damit linkstotal.

(b) Zur Rechtstotalität von  $\alpha$ : Sei  $y \in Y$ . Es ist dann  $(y, y) \in \text{id}_Y = \varphi \blacktriangle \alpha$ . Wir können ein  $x \in X$  wählen mit  $(y, x) \in \varphi$  und  $(x, y) \in \alpha$ . Somit gibt es für jedes  $y \in Y$  ein  $x \in X$  mit  $(x, y) \in \alpha$ . Die Relation  $\alpha$  ist damit rechtstotal.

*Anmerkung:* Die Relation  $\alpha$  ist nun als linkstotal und rechtstotal nachgewiesen. Wegen der Symmetrie der Situation ist auch  $\varphi$  linkstotal und rechtstotal.

(c) Zur Linkseindeutigkeit von  $\alpha$ : Sei  $y \in Y$ . Seien  $x, \tilde{x} \in X$  mit  $(x, y), (\tilde{x}, y) \in \alpha$ . Zu zeigen ist dann, dass  $x \stackrel{!}{=} \tilde{x}$  ist. Da  $\varphi$  linkstotal ist, können wir ein  $x' \in X$  wählen mit  $(y, x') \in \varphi$ . Es ist also  $(x, y) \in \alpha$  und  $(y, x') \in \varphi$ . Somit ist  $(x, x') \in \alpha \blacktriangle \varphi = \text{id}_X$  und damit  $x = x'$ . Damit ist  $(y, x) \in \varphi$ . Da  $(\tilde{x}, y) \in \alpha$  und  $(y, x) \in \varphi$  ist, folgt  $(\tilde{x}, x) \in \alpha \blacktriangle \varphi = \text{id}_X$ . Es gilt damit  $\tilde{x} = x$ .

(d) Zur Rechtseindeutigkeit von  $\alpha$ : Sei  $x \in X$ . Seien  $y, \tilde{y} \in Y$  mit  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in \alpha$ . Zu zeigen ist dann, dass  $y = \tilde{y}$  ist. Da  $\varphi$  rechtstotal ist, können wir ein  $y' \in Y$  wählen mit  $(y', x) \in \varphi$ . Es ist also  $(y', x) \in \varphi$  und  $(x, y) \in \alpha$ . Somit ist  $(y', y) \in \varphi \blacktriangle \alpha = \text{id}_Y$  und damit  $y' = y$ . Damit ist  $(y, x) \in \varphi$ . Da  $(x, \tilde{y}) \in \alpha$  und  $(y, x) \in \varphi$  ist, folgt  $(y, \tilde{y}) \in \varphi \blacktriangle \alpha = \text{id}_Y$ . Es gilt damit  $y = \tilde{y}$ .

Zu " $\Leftarrow$ ": Sei  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  rechtstotal, linkstotal, rechtseindeutig und linkseindeutig. Zu zeigen ist, dass es eine Relation  $Y \xrightarrow{\varphi} X$  gibt mit

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \varphi \blacktriangle \alpha &= \text{id}_Y \\ \text{(b)} \quad \alpha \blacktriangle \varphi &= \text{id}_X \end{aligned}$$

Sei  $\varphi = \alpha^{\text{op}} \subseteq Y \times X$ . Die Relation  $\varphi$  ist nach Konstruktion dann ebenfalls rechtstotal, linkstotal, rechtseindeutig und linkseindeutig; vgl. Lemma 10.

Zu (a).

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(y, \tilde{y}) \in \varphi \blacktriangle \alpha$ . Wir können ein  $x \in X$  wählen mit  $(y, x) \in \varphi$  und  $(x, \tilde{y}) \in \alpha$ . Es ist  $(\tilde{y}, x) \in \alpha^{\text{op}} = \varphi$ . Da  $\varphi$  linkseindeutig ist, ist  $y = \tilde{y}$  und damit  $(y, \tilde{y}) = (y, y) \in \text{id}_Y$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(y, y) \in \text{id}_Y$ . Es ist  $y \in Y$ . Da  $\alpha$  rechtstotal ist, können wir ein  $x \in X$  wählen mit  $(x, y) \in \alpha$ . Es ist  $(y, x) \in \alpha^{\text{op}} = \varphi$ . Insgesamt ist dann  $(y, y) \in \varphi \blacktriangle \alpha$ .

Zu (b).

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(x, \tilde{x}) \in \alpha \blacktriangle \varphi$ . Wir können ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \alpha$  und  $(y, \tilde{x}) \in \varphi$ . Es ist  $(y, x) \in \alpha^{\text{op}} = \varphi$ . Da  $\varphi$  rechtseindeutig ist, ist  $x = \tilde{x}$  und damit  $(x, \tilde{x}) = (x, x) \in \text{id}_X$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(x, x) \in \text{id}_X$ . Es ist  $x \in X$ . Da  $\alpha$  linkstotal ist, können wir ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \alpha$ . Es ist  $(y, x) \in \alpha^{\text{op}} = \varphi$ . Insgesamt ist dann  $(x, x) \in \alpha \blacktriangle \varphi$ .

□

**Definition 13.** Eine Relation  $M \xrightarrow{\alpha} N$  heißt *links kürzbar*, falls für alle Relationen  $N \xrightarrow{\beta_1} P$ ,  $N \xrightarrow{\beta_2} P$  aus  $\alpha \blacktriangle \beta_1 = \alpha \blacktriangle \beta_2$  die Gleichheit  $\beta_1 = \beta_2$  folgt.

**Lemma 14.** Sei  $M \xrightarrow{\alpha} N$  eine rechtseindeutige und rechtstotale Relation. Dann ist  $\alpha$  links kürzbar.

*Beweis.* Seien  $N \xrightarrow{\beta_1} P, N \xrightarrow{\beta_2} P$  Relationen mit  $\alpha \blacktriangle \beta_1 = \alpha \blacktriangle \beta_2$ . Da die Situation symmetrisch ist, genügt es,  $\beta_1 \stackrel{!}{\subseteq} \beta_2$  zu zeigen.

Sei  $(n, p) \in \beta_1$ . Da  $\alpha$  rechtstotal ist, können wir ein  $m \in M$  wählen mit  $(m, n) \in \alpha$ . Da  $(m, n) \in \alpha$  und  $(n, p) \in \beta_1$  ist  $(m, p) \in \alpha \blacktriangle \beta_1 = \alpha \blacktriangle \beta_2$ . Wir können also ein  $\tilde{n} \in N$  mit  $(m, \tilde{n}) \in \alpha$  und  $(\tilde{n}, p) \in \beta_2$  wählen. Da  $\alpha$  rechtseindeutig ist, folgt  $n = \tilde{n}$  und damit ist  $(n, p) \in \beta_2$ .  $\square$

Die Linkskürzbarkeit wird in Lemma 15 weiter erörtert; vgl. auch Bemerkung 16.

**Lemma 15.** Sei  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  eine Relation. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:

- (1) Es ist  $\alpha$  links kürzbar.
- (2) Es gibt eine Relation  $Y \xrightarrow{\beta} X$  mit  $\beta \blacktriangle \alpha = \text{id}_Y$ .
- (3) Für alle  $y \in Y$  gilt, dass  $\alpha y \setminus \alpha(Y \setminus \{y\}) \neq \emptyset$  ist.

*Beweis.*

Zu "(2)  $\Rightarrow$  (1)":

Seien  $X \xrightarrow{\alpha} Y, Y \xrightarrow{\gamma_1} Z$  und  $Y \xrightarrow{\gamma_2} Z$  Relationen mit  $\alpha \blacktriangle \gamma_1 = \alpha \blacktriangle \gamma_2$ . Zu zeigen ist, dass  $\gamma_1 \stackrel{!}{=} \gamma_2$  gilt. Wir wählen nach (2) eine Relation  $Y \xrightarrow{\beta} X$  mit  $\beta \blacktriangle \alpha = \text{id}_Y$ . Es ist dann

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \text{id}_Y \blacktriangle \gamma_1 \\ &= \beta \blacktriangle \alpha \blacktriangle \gamma_1 \\ &= \beta \blacktriangle \alpha \blacktriangle \gamma_2 \\ &= \text{id}_Y \blacktriangle \gamma_2 \\ &= \gamma_2. \end{aligned}$$

Zu "(1)  $\Rightarrow$  (3)":

Diese Folgerung wollen wir über Kontraposition zeigen. Es ist also " $\neg(3) \Rightarrow \neg(1)$ " zu zeigen. Die Aussage  $\neg(3)$  bedeutet, dass wir ein  $y_0 \in Y$  wählen können mit  $\alpha y_0 \setminus \alpha(Y \setminus \{y_0\}) = \emptyset$ . Dies bedeutet, dass

$$\alpha y_0 \subseteq \alpha(Y \setminus \{y_0\}) \quad (*)$$

ist. Wir wollen nun zwei Relationen  $Y \xrightarrow{\psi_1} Z$  und  $Y \xrightarrow{\psi_2} Z$  mit  $\alpha \blacktriangle \psi_1 = \alpha \blacktriangle \psi_2$ , aber  $\psi_1 \neq \psi_2$ , konstruieren. Wir wählen hierzu  $Z = \{1\}$ . Seien außerdem  $\psi_1 = Y \times \{1\}$  und  $\psi_2 = (Y \setminus \{y_0\}) \times \{1\}$ . Es ist also  $\psi_1 \neq \psi_2$ . Zu zeigen ist nun, dass  $\alpha \blacktriangle \psi_1 = \alpha \blacktriangle \psi_2$  gilt. Da  $\psi_1 \supseteq \psi_2$  ist, ist  $\alpha \blacktriangle \psi_1 \supseteq \alpha \blacktriangle \psi_2$ . Es bleibt somit zu zeigen, dass auch  $\alpha \blacktriangle \psi_1 \subseteq \alpha \blacktriangle \psi_2$  gilt. Sei  $(x, 1) \in \alpha \blacktriangle \psi_1$ . Dann können wir ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \alpha$  und  $(y, 1) \in \psi_1$ . Wir betrachten nun zwei Fälle.

Fall 1: Es ist  $y \neq y_0$ . Dann ist  $(y, 1) \in \psi_2$  nach Konstruktion, also ist  $(x, 1) \in \alpha \blacktriangle \psi_2$ .

Fall 2: Es ist  $y = y_0$ . Dann ist  $(x, y_0) = (x, y) \in \alpha$ . Es ist also  $x \in \alpha y_0$ . Nach (\*) ist  $\alpha y_0 \subseteq \alpha(Y \setminus \{y_0\})$  und damit  $x \in \alpha(Y \setminus \{y_0\})$ . Wir wählen ein  $y_1 \in Y \setminus \{y_0\}$  mit  $(x, y_1) \in \alpha$ . Es ist nun  $(x, y_1) \in \alpha$  und  $(y_1, 1) \in \psi_2$  nach Konstruktion von  $\psi_2$ . Insgesamt ergibt sich dann, dass  $(x, 1) \in \alpha \blacktriangle \psi_2$  ist.

Zu "(3)  $\Rightarrow$  (2)":

Sei  $\beta := \{(y, x) \in Y \times X : y \in Y, x \in \alpha y \setminus \alpha(Y \setminus \{y\})\}$ . Wir wollen zeigen, dass  $\beta \blacktriangle \alpha = \text{id}_Y$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(y, \tilde{y}) \in \beta \blacktriangle \alpha$ . Zu zeigen ist, dass dann  $(y, \tilde{y}) \stackrel{!}{\in} \text{id}_Y$ , also  $y \stackrel{!}{=} \tilde{y}$  ist. Wir wählen ein  $x \in X$  mit  $(y, x) \in \beta$  und  $(x, \tilde{y}) \in \alpha$ . Wegen  $(y, x) \in \beta$  ist  $x \in \alpha y \setminus \alpha(Y \setminus \{y\})$ . Damit ist  $(x, y) \in \alpha$  und  $(x, y') \notin \alpha$  für  $y' \in Y \setminus \{y\}$ . Da  $(x, \tilde{y}) \in \alpha$  gilt, muss also  $y = \tilde{y}$  gelten.

Zu  $\supseteq$ : Sei  $y \in Y$ . Es ist  $(y, y) \in \text{id}_Y$ . Zu zeigen ist dann, dass  $(y, y) \stackrel{!}{\in} \beta \blacktriangle \alpha$  gilt. Dank (3) können wir ein  $x \in \alpha y \setminus \alpha(Y \setminus \{y\})$  wählen. Dann ist  $(y, x) \in \beta$ . Da  $x \in \alpha y$  gilt, ist auch  $(x, y) \in \alpha$ . Insgesamt ist damit  $(y, y) \in \beta \blacktriangle \alpha$ .

□

**Bemerkung 16.** Sei  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  eine rechtstotale und rechtseindeutige Relation. Es ist dann Bedingung (3) von Lemma 15 erfüllt. Es kann also Lemma 14 als Folgerung von Lemma 15 angesehen werden.

*Beweis.* Sei  $y \in Y$ . Es ist  $\alpha y \neq \emptyset$ , da  $\alpha$  rechtstotal ist. Wir wollen  $\alpha y \setminus \alpha(Y \setminus \{y\}) \stackrel{!}{\neq} \emptyset$  zeigen. Zu zeigen genügt es, dass  $\alpha y \cap \alpha(Y \setminus \{y\}) \stackrel{!}{=} \emptyset$  ist.

Wir *nehmen an*, dies gilt nicht. Wir wählen dann ein  $x \in \alpha y \cap \alpha(Y \setminus \{y\})$ . Es ist dann  $(x, y) \in \alpha$ . Ferner können wir ein  $\tilde{y} \in Y \setminus \{y\}$  wählen mit  $(x, \tilde{y}) \in \alpha$ . Dies ist ein *Widerspruch* dazu, dass  $\alpha$  rechtseindeutig ist. Somit ist  $\alpha y \setminus \alpha(Y \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ . □

**Definition 17.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Dann sei

$$A \uplus B := \{(1, a) : a \in A\} \cup \{(2, b) : b \in B\}$$

die (äußere) *disjunkte Vereinigung* der Mengen  $A$  und  $B$ .

**Definition 18.** Seien  $X \xrightarrow{\varphi} X'$  und  $Y \xrightarrow{\psi} Y'$  Relationen. Dann ist

$$\varphi \uplus \psi = \{((1, x), (1, x')) : (x, x') \in \varphi\} \cup \{((2, y), (2, y')) : (y, y') \in \psi\}$$

die *disjunkte Vereinigung* der Relationen  $\varphi$  und  $\psi$ . Es wird also die Relation

$$X \uplus Y \xrightarrow{\varphi \uplus \psi} X' \uplus Y'$$

erhalten.

**Definition 19.** Seien  $A \xrightarrow{\alpha} X, B \xrightarrow{\beta} X$  Relationen. Wir definieren:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} := \{((1, a), x) : (a, x) \in \alpha\} \cup \{((2, b), x) : (b, x) \in \beta\} : A \uplus B \longrightarrow X$$

**Definition 20.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir definieren die Relationen  $\iota_1$  und  $\iota_2$  wie folgt:

$$A \xrightarrow{\iota_1} A \uplus B \text{ mit } \iota_1 := \{(a, (1, a)) : a \in A\} \text{ und } B \xrightarrow{\iota_2} A \uplus B \text{ mit } \iota_2 := \{(b, (2, b)) : b \in B\}.$$

**Lemma 21.** Seien  $X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X'_1$ ,  $X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X'_2$  Relationen. Zudem betrachten wir die Relationen  $\iota_1$  und  $\iota_2$ ; vgl. Definition 20. Es gilt

$$\alpha_1 \blacktriangle \iota_1 = \iota_1 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \text{ und } \alpha_2 \blacktriangle \iota_2 = \iota_2 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2).$$

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\iota_1} & X_1 \uplus X_2 & \xleftarrow{\iota_2} & X_2 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \uplus \alpha_2 & & \downarrow \alpha_2 \\ X'_1 & \xrightarrow{\iota_1} & X'_1 \uplus X'_2 & \xleftarrow{\iota_2} & X'_2 \end{array}$$

*Beweis.* Seien  $i, j \in \{1, 2\}$  und  $i \neq j$ . Wir wollen  $\alpha_i \blacktriangle \iota_i \stackrel{!}{=} \iota_i \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2)$  zeigen.

Zu  $\subseteq$ :

Fall 1: Sei  $(x_i, (i, x'_i)) \in \alpha_i \blacktriangle \iota_i : X_i \rightarrow X'_1 \uplus X'_2$ . Es ist also  $x_i \in X_i$  und  $x'_i \in X'_i$ . Zu zeigen ist, dass dann auch  $(x_i, (i, x'_i)) \in \iota_i \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2)$  gilt. Wir wählen ein  $\tilde{x}'_i \in X'_i$  mit  $(x_i, \tilde{x}'_i) \in \alpha_i$  und  $(\tilde{x}'_i, (i, x'_i)) \in \iota_i$ . Aus letzterem folgt, da  $\iota_i$  nach der Definition links- und rechtseindeutig ist, dass  $\tilde{x}'_i = x'_i$  gilt. Also ist  $(x_i, x'_i) \in \alpha_i$ . Es ist  $(x_i, (i, x_i)) \in \iota_i$  und  $((i, x_i), (i, x'_i)) \in \alpha_1 \uplus \alpha_2$  und damit gilt  $(x_i, (i, x'_i)) \in \iota_i \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2)$ .

Fall 2: Sei  $(x_i, (j, x'_j)) \in \alpha_i \blacktriangle \iota_i : X_i \rightarrow X'_1 \uplus X'_2$ . Wir können ein  $\tilde{x}'_i \in X'_i$  wählen mit  $(x_i, \tilde{x}'_i) \in \alpha_i$  und  $(\tilde{x}'_i, (j, x'_j)) \in \iota_i$ . Letzteres liefert jedoch einen *Widerspruch* zur Definition von  $\iota_i$ . Damit tritt der Fall  $(x_i, (j, x'_j)) \in \alpha_i \blacktriangle \iota_i$  nicht auf.

Zu  $\supseteq$ :

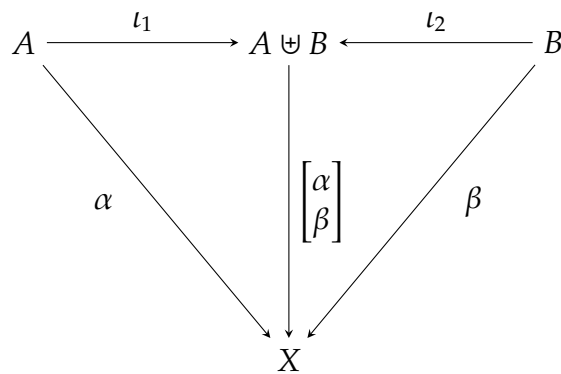
Fall 1: Sei  $(x_i, (i, x'_i)) \in \iota_i \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) : X_i \rightarrow X'_1 \uplus X'_2$ . Es ist also  $x_i \in X_i$  und  $x'_i \in X'_i$ . Zu zeigen ist, dass dann auch  $(x_i, (i, x'_i)) \in \alpha_i \blacktriangle \iota_i$  gilt. Wir können ein  $(i, \tilde{x}_i) \in X_1 \uplus X_2$  wählen mit  $(x_i, (i, \tilde{x}_i)) \in \iota_i$  und  $((i, \tilde{x}_i), (i, x'_i)) \in (\alpha_1 \uplus \alpha_2)$ . Wegen  $(x_i, (i, \tilde{x}_i)) \in \iota_i$  folgt, dass  $x_i = \tilde{x}_i$  ist. Somit ist  $(x_i, x'_i) \in \alpha_i$  und  $(x'_i, (i, x'_i)) \in \iota_i$ . Damit folgt, dass  $(x_i, (i, x'_i)) \in \alpha_i \blacktriangle \iota_i$  gilt.

Fall 2: Sei  $(x_i, (j, x'_j)) \in \iota_i \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) : X_i \rightarrow X'_1 \uplus X'_2$ . Dann gibt es ein  $(i, \tilde{x}_i) \in X_1 \uplus X_2$  mit  $(x_i, (i, \tilde{x}_i)) \in \iota_i$  und  $((i, \tilde{x}_i), (j, x'_j)) \in (\alpha_1 \uplus \alpha_2)$ . Dies liefert jedoch einen *Widerspruch* zur Definition der disjunkten Vereinigung von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ ; vgl. Definition 18. Somit tritt dieser Fall nicht ein.  $\square$

**Lemma 22.** Seien  $A \xrightarrow{\alpha} X$  und  $B \xrightarrow{\beta} X$  Relationen. Zudem betrachten wir die Relationen  $\iota_1$  und  $\iota_2$ ; vgl. Definition 20. Dann gilt

$$(1) \quad \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha$$

$$(2) \quad \iota_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \beta$$



*Beweis.*

Wir beginnen mit (1).

Zu  $\subseteq$ :

Sei  $(a, x) \in \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . Da  $\iota_1$  rechtseindeutig ist, ist dann  $(a, (1, a)) \in \iota_1$  und  $((1, a), x) \in \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . Nach der Definition von  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  ist dann  $(a, x) \in \alpha$ .

Zu  $\supseteq$ :

Sei  $(a, x) \in \alpha$ . Nach der Definition von  $\iota_1$  gilt  $(a, (1, a)) \in \iota_1$  und nach der Definition von  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  ist

wegen  $(a, x) \in \alpha$  auch  $((1, a), x) \in \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . Somit ist  $(a, x) \in \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ .

Zu (2).

Zu  $\subseteq$ :

Sei  $(b, x) \in \iota_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . Da  $\iota_2$  rechtseindeutig ist, ist dann  $(b, (2, b)) \in \iota_2$  und  $((2, b), x) \in \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . Nach der Definition von  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  ist dann  $(b, x) \in \beta$ .

Zu  $\supseteq$ :

Sei  $(b, x) \in \beta$ . Nach der Definition von  $\iota_2$  gilt  $(b, (2, b)) \in \iota_2$  und nach der Definition von  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  ist

wegen  $(b, x) \in \beta$  auch  $((2, b), x) \in \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . Somit ist  $(b, x) \in \iota_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . □

**Lemma 23.**

(1) Seien  $A \xrightarrow{\alpha} X$  und  $B \xrightarrow{\beta} X$  Relationen. Sei  $A \uplus B \xrightarrow{\gamma} X$  eine Relation mit

$$\iota_1 \blacktriangle \gamma = \alpha$$

$$\iota_2 \blacktriangle \gamma = \beta$$

Dann ist  $\gamma = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ .

(2) Seien  $A \uplus B \xrightarrow{\gamma} X$  und  $A \uplus B \xrightarrow{\tilde{\gamma}} X$  Relationen, für welche gilt

$$\iota_1 \blacktriangle \gamma = \iota_1 \blacktriangle \tilde{\gamma}$$

$$\iota_2 \blacktriangle \gamma = \iota_2 \blacktriangle \tilde{\gamma}.$$

Dann ist  $\gamma = \tilde{\gamma}$ .

*Beweis.*

Zu (1).

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(u, x) \in \gamma$ . Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1:  $u = (1, a)$ , wobei  $a \in A$  ist.

Fall 2:  $u = (2, b)$ , wobei  $b \in B$  ist.

Es genügt, Fall 1 zu betrachten, da Fall 2 analog folgt. Es ist  $(a, (1, a)) \in \iota_1$  und  $((1, a), x) \in \gamma$ .

Daraus folgt, dass  $(a, x) \in \iota_1 \blacktriangle \gamma = \alpha$  ist. Somit ist  $(u, x) = ((1, a), x) \in \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(u, x) \in \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ . Wir betrachten ebenfalls zwei Fälle.

Fall 1:  $u = (1, a)$ , wobei  $(a, x) \in \alpha$  ist.

Fall 2:  $u = (2, b)$ , wobei  $(b, x) \in \beta$  ist.

Es genügt, Fall 1 zu betrachten, da Fall 2 analog folgt. Es ist  $(a, x) \in \alpha = \iota_1 \blacktriangle \gamma$ . Somit können wir ein  $y \in A \uplus B$  wählen mit  $(a, y) \in \iota_1$  und  $(y, x) \in \gamma$ . Da  $a \iota_1 = \{(1, a)\}$  ist, folgt  $y = (1, a)$ . Es folgt  $(u, x) = ((1, a), x) = (y, x) \in \gamma$ .

Zu (2). Es gilt

$$\alpha := \iota_1 \blacktriangle \gamma = \iota_1 \blacktriangle \tilde{\gamma}$$

$$\beta := \iota_2 \blacktriangle \gamma = \iota_2 \blacktriangle \tilde{\gamma}.$$

Es folgt dann

$$\gamma \stackrel{(1)}{=} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{=} \tilde{\gamma}.$$

□



**Lemma 24.** Seien  $Y_1 \xrightarrow{\beta_1} Y'_1$ ,  $Y_2 \xrightarrow{\beta_2} Y'_2$ ,  $Y'_1 \xrightarrow{\sigma'_1} Z'$ ,  $Y'_2 \xrightarrow{\sigma'_2} Z'$  und  $Z' \xrightarrow{\zeta} Z''$  Relationen. Wir können folgendes Diagramm bilden:

$$Y_1 \uplus Y_2 \xrightarrow{\beta_1 \uplus \beta_2} Y'_1 \uplus Y'_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix}} Z' \xrightarrow{\zeta} Z''$$

Es gilt dann:

$$(1) \quad (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \blacktriangle \zeta = \begin{bmatrix} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \\ \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} Y_1 \uplus Y_2 & \xrightarrow{\beta_1 \uplus \beta_2} & Y'_1 \uplus Y'_2 \\ & \searrow \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix} & \downarrow \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \\ & & Z' \xrightarrow{\zeta} Z'' \\ & & \nearrow \begin{bmatrix} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \\ \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \end{bmatrix} \end{array}$$

*Beweis.*

Zu (1). Wir wollen zeigen, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \iota_1 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} &\stackrel{!}{=} \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix} \\ \iota_2 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} &\stackrel{!}{=} \iota_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gelten, da dann mit Lemma 23 (2) die Gleichheit  $(\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix}$  folgt.

Es ist

$$\begin{aligned} \iota_1 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \beta_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix} \\ \iota_2 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \beta_2 \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \iota_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Aussage (1) lässt sich *alternativ* auch direkt beweisen, dies wird im Folgenden aufgeführt.

$$\begin{aligned}
(\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} &= \left( \{((1, y_1), (1, y'_1)) : y_1 \in Y_1, y'_1 \in Y'_1, (y_1, y'_1) \in \beta_1\} \right. \\
&\quad \cup \{((2, y_2), (2, y'_2)) : y_2 \in Y_2, y'_2 \in Y'_2, (y_2, y'_2) \in \beta_2\} \\
&\quad \blacktriangle \left( \{((1, y'_1), z') : y'_1 \in Y'_1, z' \in Z', (y'_1, z') \in \sigma'_1\} \right. \\
&\quad \left. \cup \{((2, y'_2), z') : y'_2 \in Y'_2, z' \in Z', (y'_2, z') \in \sigma'_2\} \right) \\
&= \{((1, y_1), z') : y_1 \in Y_1, z' \in Z', \exists y'_1 \in Y'_1 \text{ mit } (y_1, y'_1) \in \beta_1 \text{ und } (y'_1, z') \in \sigma'_1\} \\
&\quad \cup \{((2, y_2), z') : y_2 \in Y_2, z' \in Z', \exists y'_2 \in Y'_2 \text{ mit } (y_2, y'_2) \in \beta_2 \text{ und } (y'_2, z') \in \sigma'_2\} \\
&= \{((1, y_1), z') : y_1 \in Y_1, z' \in Z', (y_1, z') \in \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1\} \\
&\quad \cup \{((2, y_2), z') : y_2 \in Y_2, z' \in Z', (y_2, z') \in \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2\} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zu (2).

Wir wollen zeigen, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
l_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \blacktriangle \zeta &\stackrel{!}{=} l_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \\ \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \end{bmatrix} \\
l_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \blacktriangle \zeta &\stackrel{!}{=} l_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \\ \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

gelten, da dann mit Lemma 23 (2) die Gleichheit  $\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \blacktriangle \zeta = \begin{bmatrix} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \\ \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \end{bmatrix}$  folgt.

Es ist

$$\begin{aligned}
l_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \blacktriangle \zeta &\stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} l_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \\ \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \end{bmatrix} \\
l_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \blacktriangle \zeta &\stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} l_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \blacktriangle \zeta \\ \sigma'_2 \blacktriangle \zeta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

**Lemma 25.** Sei  $Y_1 \uplus Y_2 \xrightarrow{\gamma} Z'$ . Wir betrachten  $Y_1 \xrightarrow{l_1} Y_1 \uplus Y_2$  mit  $l_1 = \{(y_1, (1, y_1)) : y_1 \in Y_1\}$  und  $Y_2 \xrightarrow{l_2} Y_1 \uplus Y_2$  mit  $l_2 = \{(y_2, (2, y_2)) : y_2 \in Y_2\}$ . Es gilt dann:

$$\begin{bmatrix} l_1 \blacktriangle \gamma \\ l_2 \blacktriangle \gamma \end{bmatrix} = \gamma$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
l_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} l_1 \blacktriangle \gamma \\ l_2 \blacktriangle \gamma \end{bmatrix} &\stackrel{\text{Lemma 22}}{=} l_1 \blacktriangle \gamma \\
l_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} l_1 \blacktriangle \gamma \\ l_2 \blacktriangle \gamma \end{bmatrix} &\stackrel{\text{Lemma 22}}{=} l_2 \blacktriangle \gamma
\end{aligned}$$

Mit Lemma 23 (2) folgt, dass dann  $\begin{bmatrix} l_1 \blacktriangle \gamma \\ l_2 \blacktriangle \gamma \end{bmatrix} = \gamma$  gilt. □

**Definition 26.** Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine Relation auf dieser Menge.

(1) Sei für  $x, y \in M$  die Relation  $S$  auf  $M$  wie folgt gebildet:

$$S := \{(x, y) \in M \times M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \vee x = y\}$$

Es ist  $S$  nach Konstruktion symmetrisch und reflexiv.

(2) Sei  $(\sim)$  folgende Relation auf  $M$ .

$$(\sim) := \{(x, y) \in M \times M : \exists k \geq 0, z_0, \dots, z_k \in M \text{ mit } x = z_0, (z_i, z_{i+1}) \in S \text{ für } i \in [0, k-1] \text{ und } z_k = y\}$$

Wir bezeichnen  $(\sim)$  als die von  $R$  erzeugte Äquivalenzrelation. Die Relation  $(\sim)$  ist reflexiv, da  $k = 0$  zugelassen ist, symmetrisch, da  $S$  symmetrisch ist und transitiv durch das Aneinanderfügen von vermittelnden Tupeln. Dementsprechend ist  $(\sim)$  eine Äquivalenzrelation.

(3) Sei

$$M/(\sim) := \{[m] : m \in M\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen und

$$M \xrightarrow{\rho} M/(\sim)$$

gegeben durch

$$\rho := \{(m, [m]) : m \in M\}.$$

Nach Konstruktion ist  $\rho$  eine linkstotale, rechtseindeutige und rechtstotale Relation.

**Lemma 27.** Seien  $M, N$  Mengen und  $R \subseteq M \times M$  eine Relation. Zudem sei für  $x, y \in M$  die Relation  $S$  auf  $M$  wie in Definition 26 (1) gegeben, also:

$$S = \{(x, y) \in M \times M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \vee x = y\}$$

Sei zudem  $M \xrightarrow{\varphi} N$  eine Relation mit der Eigenschaft, dass für  $m, \tilde{m} \in M$  mit  $(m, \tilde{m}) \in R$  auch  $m\varphi = \tilde{m}\varphi$  ist.

Seien nun  $x, y \in M$  gegeben mit  $(x, y) \in S$ . Dann gilt  $x\varphi = y\varphi$ .

*Beweis.* Aus  $(x, y) \in S$  folgt, dass  $(x, y) \in R$ ,  $(y, x) \in R$  oder  $x = y$  gilt. Für  $(x, y) \in R$  und  $(y, x) \in R$  gilt  $x\varphi = y\varphi$  nach Voraussetzung an  $\varphi$ . Im Falle von  $x = y$  ist ebenfalls  $x\varphi = y\varphi$ . □

**Lemma 28.** Sei  $M \xrightarrow{\varphi} N$  eine Relation. Seien zudem  $R \subseteq M \times M$  eine Relation und  $(\sim)$  die von  $R$  erzeugte Äquivalenzrelation; vgl. Definition 26. Für  $m_1, m_2 \in M$  mit  $(m_1, m_2) \in R$  gelte  $m_1\varphi = m_2\varphi$ .

Dann gibt es genau eine Relation  $M/(\sim) \xrightarrow{\bar{\varphi}} N$  mit  $\rho \blacktriangle \bar{\varphi} = \varphi$ . Es ergibt sich somit folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\varphi} & N \\
\rho \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\varphi} & \\
M/(\sim) & & 
\end{array}$$

Dabei ist  $\bar{\varphi} = \{([m], n) \in M/(\sim) \times N : (m, n) \in \varphi\}$ .

*Beweis.* Gezeigt werden muss die Existenz und die Eindeutigkeit von  $\bar{\varphi}$ , für welches  $\rho \blacktriangle \bar{\varphi} = \varphi$  gelten soll. Wir beginnen mit der Existenz. Sei

$$\bar{\varphi} := \{([m], n) \in M/(\sim) \times N : (m, n) \in \varphi\}$$

Gezeigt werden muss, dass  $\rho \blacktriangle \bar{\varphi} \stackrel{!}{=} \varphi$  gilt.

Zu  $\supseteq$ :

Sei  $(m, n) \in \varphi$ . Nach Konstruktion ist dann  $([m], n) \in \bar{\varphi}$ . Dann ist  $(m, [m]) \in \rho$  und  $([m], n) \in \bar{\varphi}$  und damit  $(m, n) \in \rho \blacktriangle \bar{\varphi}$ .

Zu  $\subseteq$ :

Sei  $(m, n) \in \rho \blacktriangle \bar{\varphi}$ . Dann ist zu zeigen, dass  $(m, n) \in \varphi$  ist.

Wir wählen ein  $x \in M/(\sim)$  mit  $(m, x) \in \rho$  und  $(x, n) \in \bar{\varphi}$ . Laut Definition von  $\rho$  ergibt sich dann, dass  $x = [m]$  ist. Dann ist  $([m], n) \in \bar{\varphi}$ . Also können wir ein  $\tilde{m} \in M$  und ein  $\tilde{n} \in N$  wählen mit  $(\tilde{m}, \tilde{n}) \in \varphi$ , für welches  $([\tilde{m}], \tilde{n}) = ([m], n)$  gilt. Dann ist  $\tilde{n} = n$  und  $[\tilde{m}] = [m]$ . Also ist  $(\tilde{m}, n) \in \varphi$ , das heißt  $n \in \tilde{m}\varphi$ . Ferner ist  $\tilde{m}$  in Äquivalenzrelation zu  $m$ , also  $(\tilde{m}, m) \in (\sim)$ . Somit können wir  $k \geq 0$  und  $z_0, \dots, z_k \in M$  wählen mit  $z_0 = \tilde{m}$ ,  $(z_i, z_{i+1}) \in S$  für  $i \in [0, k-1]$  und  $z_k = m$ . Die Relation  $S$  ist dabei wie in Definition 26 (1) gegeben, also:

$$S = \{(x, y) \in M \times M : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R \vee x = y\}$$

Nach Voraussetzung an  $R$  und  $\varphi$  können wir Lemma 27 anwenden, und aus  $(z_i, z_{i+1}) \in S$  schließen, dass  $z_i\varphi = z_{i+1}\varphi$  ist für  $i \in [0, k-1]$ . Es folgt nun, dass

$$\tilde{m}\varphi = z_0\varphi = z_1\varphi = \dots = z_{k-1}\varphi = z_k\varphi = m\varphi$$

gilt. Damit ist  $\tilde{m}\varphi = m\varphi$ . Somit ist  $n \in \tilde{m}\varphi = m\varphi$ , und damit gilt  $(m, n) \in \varphi$ .

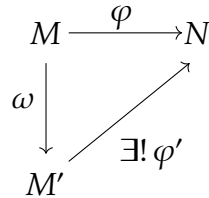
Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von  $\bar{\varphi}$ . Seien  $M/(\sim) \xrightarrow{\bar{\varphi}} N$  und  $M/(\sim) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} N$  zwei Relationen mit  $\rho \blacktriangle \bar{\varphi} = \varphi$  und  $\rho \blacktriangle \tilde{\varphi} = \varphi$ . Somit gilt  $\rho \blacktriangle \bar{\varphi} = \varphi = \rho \blacktriangle \tilde{\varphi}$ . Da  $\rho$  nach Konstruktion rechtseindeutig und rechtstotal ist, folgt mit Lemma 14, dass  $\bar{\varphi} = \tilde{\varphi}$  ist.  $\square$

**Lemma 29.** Seien  $M, M'$  und  $N$  Mengen mit  $M' \subseteq M$ . Sei  $M \xrightarrow{\varphi} N$  eine Relation. Sei die Relation  $M \xrightarrow{\omega} M'$  wie folgt definiert:

$$\omega := \{(m', m') : m' \in M'\} \subseteq M \times M'$$

Sei zudem  $m\varphi = \emptyset$  für  $m \in M \setminus M'$ .

Dann existiert genau eine Relation  $M' \xrightarrow{\varphi'} N$  mit  $\omega \blacktriangle \varphi' = \varphi$ .



Dabei ist  $\varphi' = \varphi \subseteq M' \times N$ .

*Beweis.* Wir beginnen damit, die Existenz von  $\varphi'$  zu zeigen. Sei  $\varphi' := \varphi \subseteq M \times N$ . Es ist nun Folgendes zu zeigen:

- (1)  $\varphi' \stackrel{!}{\subseteq} M' \times N$
- (2)  $\omega \blacktriangle \varphi' \stackrel{!}{=} \varphi$

Zu (1):

Sei  $(m, n) \in M \times N$  mit  $m \in M \setminus M'$ . Es ist dann zu zeigen, dass  $(m, n) \notin \varphi$  gilt. Wir nehmen an, dass  $(m, n) \in \varphi$  ist. Dann ist  $n \in m\varphi$ . Es gilt aber  $m \in M \setminus M'$  und damit nach Voraussetzung  $m\varphi = \emptyset$ , was einen Widerspruch liefert.

Zu (2):

Zu  $\subseteq$ :

Sei  $(m, n) \in \omega \blacktriangle \varphi'$ . Wir können ein  $m' \in M'$  wählen mit  $(m, m') \in \omega$  und  $(m', n) \in \varphi'$ . Nach der Konstruktion von  $\omega$  ist dann  $m = m'$  und damit  $(m, n) = (m', n) \in \varphi' = \varphi$ .

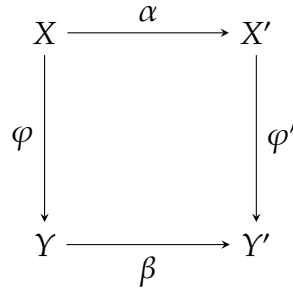
Zu  $\supseteq$ :

Sei  $(m, n) \in \varphi$ . Dann ist  $(m, n) \in \varphi' \subseteq M' \times N$ . Insbesondere ist  $m' := m \in M'$ . Also ist  $(m, m') = (m', m') \in \omega$  und  $(m', n) \in \varphi'$ . Damit ist  $(m, n) \in \omega \blacktriangle \varphi'$ .

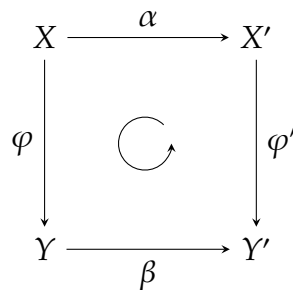
Nun zur Eindeutigkeit von  $\varphi'$ . Da  $\omega$  nach Konstruktion rechtstotal und rechtseindeutig ist, folgt mit Lemma 14, dass  $\varphi'$  eindeutig ist.  $\square$

### 3 Pushout - Definition und Eigenschaften

**Definition 30.** Sei folgendes Viereck-Diagramm aus Mengen und Relationen gegeben:



Dieses Viereck heißt *kommutativ*, falls  $\alpha \blacktriangle \varphi' = \varphi \blacktriangle \beta$  gilt. Die Kommutativität kann graphisch durch einen kreisförmigen Pfeil dargestellt werden:



**Lemma 31.** Seien folgende Mengen und Relationen gegeben:

$$X_1 \xrightarrow{\alpha_1} Y_1 \xrightarrow{\beta_1} Z_1 \text{ und } X_2 \xrightarrow{\alpha_2} Y_2 \xrightarrow{\beta_2} Z_2$$

Dann gilt  $(\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) = (\alpha_1 \blacktriangle \beta_1) \uplus (\alpha_2 \blacktriangle \beta_2)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 \uplus X_2 & \xrightarrow{\alpha_1 \uplus \alpha_2} & Y_1 \uplus Y_2 & \xrightarrow{\beta_1 \uplus \beta_2} & Z_1 \uplus Z_2 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) = (\alpha_1 \blacktriangle \beta_1) \uplus (\alpha_2 \blacktriangle \beta_2)
 \end{array}$$

*Beweis.* Wir wollen

$$\iota_i \blacktriangle ((\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2)) \stackrel{!}{=} \iota_i \blacktriangle ((\alpha_1 \blacktriangle \beta_1) \uplus (\alpha_2 \blacktriangle \beta_2))$$

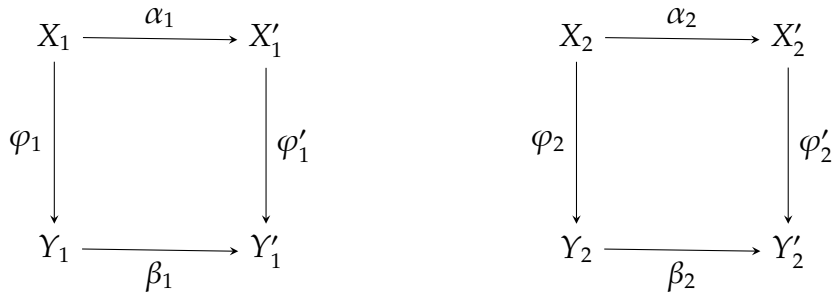
für  $i \in \{1, 2\}$  zeigen. Nach Lemma 23 (2) ist dann auch  $(\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) = (\alpha_1 \blacktriangle \beta_1) \uplus (\alpha_2 \blacktriangle \beta_2)$ .

In der Tat wird

$$\iota_i \blacktriangle ((\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2)) \stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \alpha_i \blacktriangle \iota_i \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \alpha_i \blacktriangle \beta_i \blacktriangle \iota_i \stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \iota_i \blacktriangle ((\alpha_1 \blacktriangle \beta_1) \uplus (\alpha_2 \blacktriangle \beta_2)).$$

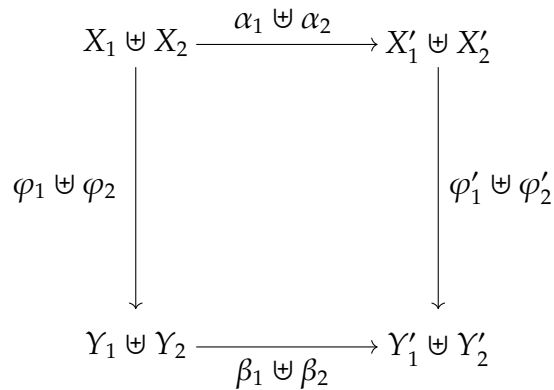
□

**Lemma 32.** *Seien*



*kommutative Viereck aus Mengen und Relationen.*

*Dann ist*



*ebenfalls ein kommutatives Viereck.*

*Kurz: Die disjunkte Vereinigung zweier kommutativer Vierecke ist wieder ein kommutatives Viereck.*

*Beweis.* Es muss somit gezeigt werden, dass

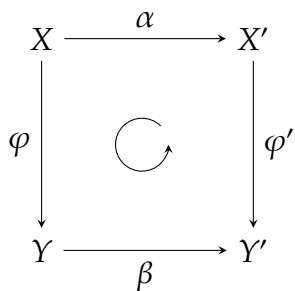
$$(\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \stackrel{!}{=} (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2)$$

gilt. In der Tat wird

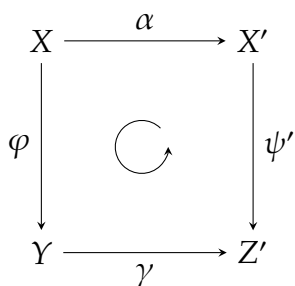
$$\begin{aligned}
 (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) &\stackrel{\text{Lemma 31}}{=} (\alpha_1 \blacktriangle \varphi'_1) \uplus (\alpha_2 \blacktriangle \varphi'_2) \\
 &= (\varphi_1 \blacktriangle \beta_1) \uplus (\varphi_2 \blacktriangle \beta_2) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 31}}{=} (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2).
 \end{aligned}$$

□

**Definition 33.** Ein kommutatives Viereck aus Mengen und Relationen der Form



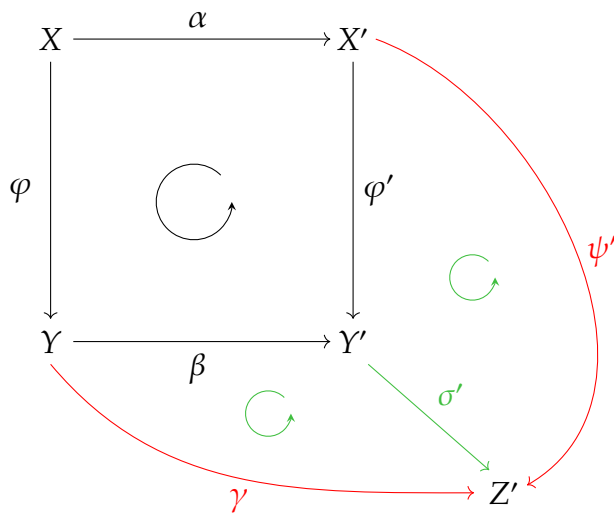
heißt *Pushout*, falls es für jedes kommutative Viereck aus Mengen und Relationen



genau eine Relation  $\sigma': Y' \rightarrow Z'$  gibt mit

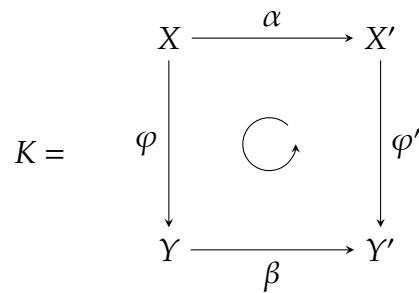
$$\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma \quad \text{und} \quad \varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'.$$

Es ergibt sich damit folgendes Diagramm:





**Bemerkung 34.** Sei



ein kommutatives Viereck aus Mengen und Relationen.

(1) Sei

$$KV_{\alpha, \varphi, Z'} := \{(\gamma, \psi') \in \text{Rel}(Y, Z') \times \text{Rel}(X', Z') : \varphi \blacktriangle \gamma = \alpha \blacktriangle \psi'\} \subseteq \text{Rel}(Y, Z') \times \text{Rel}(X', Z')$$

die Menge der kommutativen Vervollständigungen von  $\alpha$  und  $\varphi$  zu einer gegebenen Menge  $Z'$ . Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \text{Paar}_{K, Z'} : \text{Rel}(Y', Z') &\rightarrow KV_{\alpha, \varphi, Z'} \\ \sigma' &\mapsto (\beta \blacktriangle \sigma', \varphi' \blacktriangle \sigma') \end{aligned}$$

Es ist das kommutative Viereck  $K$  genau dann ein Pushout, wenn die Abbildung  $\text{Paar}_{K, Z'}$  bijektiv ist für alle Mengen  $Z'$ .

Hierzu beachte man, dass in der Definition des Pushouts gefordert wird, dass jedes Element  $(\gamma, \psi') \in KV_{\alpha, \varphi, Z'}$  genau ein Urbild  $\sigma' \in \text{Rel}(Y', Z')$  unter  $\text{Paar}_{K, Z'}$  hat.

(2) Seien nun  $X, X', Y, Y', Z'$  als endliche Mengen vorausgesetzt. Es ist  $\text{Rel}(Y', Z') = \text{Pot}(Y' \times Z')$ ; vgl. Bemerkung 2. Daher gilt:

$$|\text{Rel}(Y', Z')| = |\text{Pot}(Y' \times Z')| = 2^{|Y' \times Z'|} = 2^{|Y'| \cdot |Z'|}$$

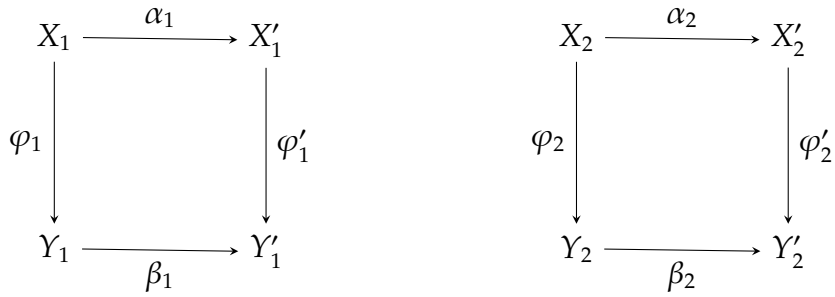
Wir betrachten die Abbildung  $\text{Paar}_{K, Z'}$ . Diese ist laut (1) genau dann bijektiv, wenn ein Pushout vorliegt.

Es ist bereits bekannt, dass  $|\text{Rel}(Y', Z')| = 2^{|Y'| \cdot |Z'|}$  gilt. Falls nun also  $|KV_{\alpha, \varphi, Z'}|$  keine Potenz von 2 ist, ist  $\text{Paar}_{K, Z'}$  nicht bijektiv und es ist  $K$  kein Pushout.

Da  $K$  eine beliebig vorgegebene kommutative Vervollständigung von  $\alpha$  und  $\varphi$  war, gilt: Falls  $|KV_{\alpha, \varphi, Z'}|$  keine Potenz von 2 ist, existiert keine Vervollständigung von  $\alpha$  und  $\varphi$  zu einem Pushout.

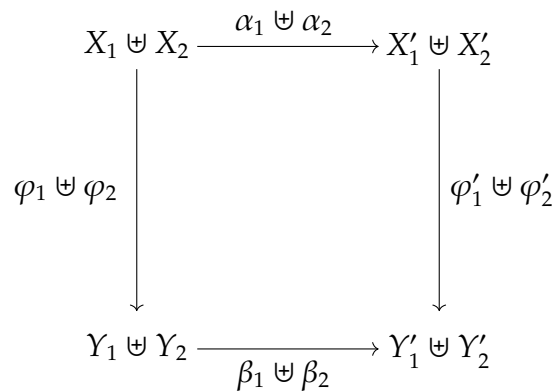
Unter Verwendung dieses Arguments werden im weiteren Verlauf Gegenbeispiele gegen die Existenz von Pushouts in gewissen Situationen erstellt.

**Satz 35.** Seien



*Pushouts aus Mengen und Relationen.*

Dann ist



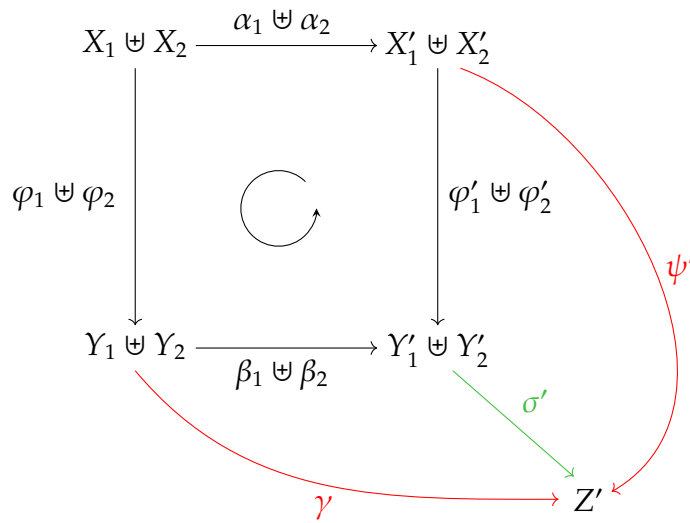
*ebenfalls ein Pushout.*

*Kurz: Die disjunkte Vereinigung zweier Pushouts ergibt wieder einen Pushout.*

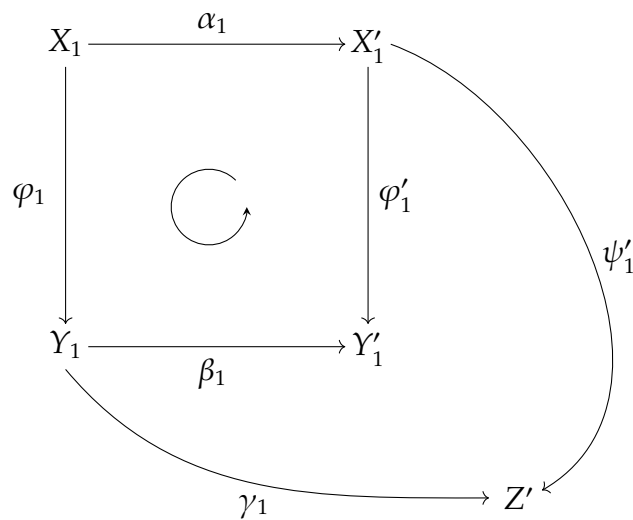
*Beweis.* Dass dieses Viereck kommutativ ist, folgt aus Lemma 32. Seien Relationen  $\psi' : X'_1 \uplus X'_2 \rightarrow Z'$  und  $\gamma : Y_1 \uplus Y_2 \rightarrow Z'$  mit  $(\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \gamma = (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \psi'$  gegeben.

Gezeigt werden muss, dass  $\sigma' : Y'_1 \uplus Y'_2 \rightarrow Z'$  mit  $(\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und mit  $(\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \sigma' = \psi'$  auf eindeutige Weise existiert.

Es wird also die folgende Situation betrachtet:



Sei  $\gamma_1 := \iota_1 \blacktriangle \gamma$  und  $\psi'_1 := \iota_1 \blacktriangle \psi'$ .

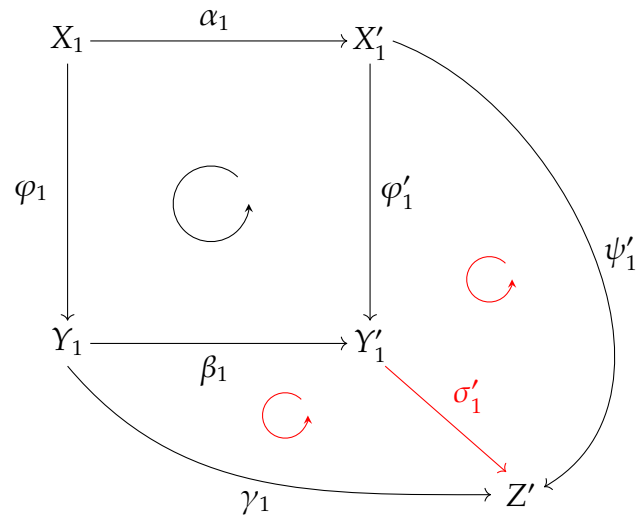


Hierzu soll gezeigt werden, dass  $\alpha_1 \blacktriangle \psi'_1 = \varphi_1 \blacktriangle \gamma_1$  und damit die Kommutativität gilt.

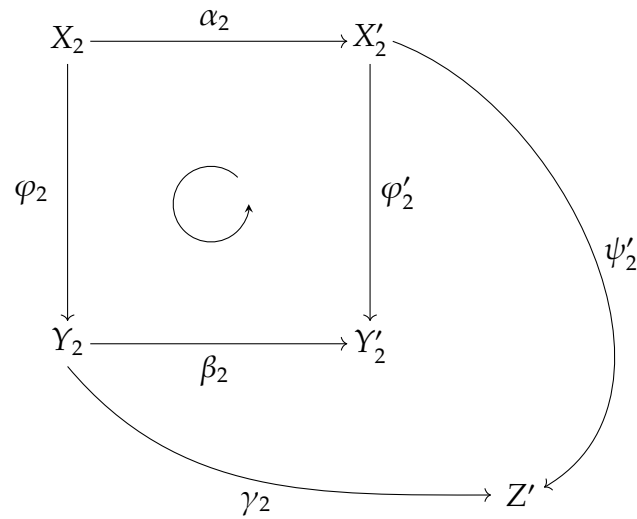
$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \blacktriangle \psi'_1 &= \alpha_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \psi' \\
 &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \iota_1 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \psi' \\
 &= \iota_1 \blacktriangle (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \gamma \\
 &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \varphi_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \gamma \\
 &= \varphi_1 \blacktriangle \gamma_1
 \end{aligned}$$

Nach den Voraussetzungen und der Definition des Pushouts gibt es somit genau eine Relation

$$Y'_1 \xrightarrow{\sigma'_1} Z' \text{ mit } \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 = \gamma_1 \text{ und } \varphi'_1 \blacktriangle \sigma'_1 = \psi'_1.$$



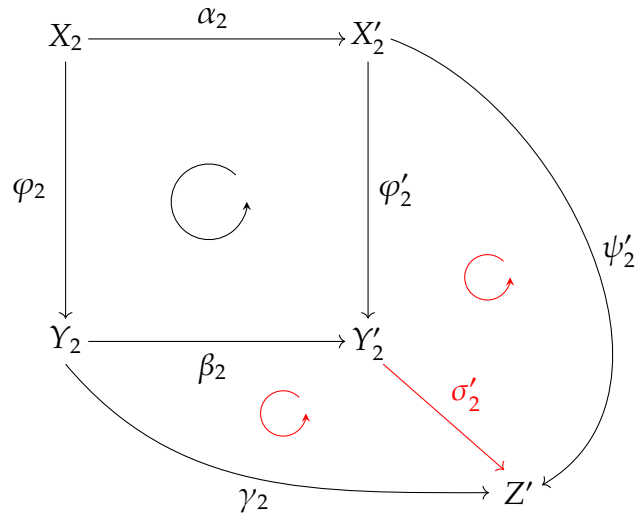
Ebenso kann für den zweiten Pushout vorgegangen werden. Sei  $\gamma_2 := \iota_2 \blacktriangle \gamma$  und  $\psi'_2 := \iota_2 \blacktriangle \psi'$ .



Hierzu soll gezeigt werden, dass  $\alpha_2 \blacktriangle \psi'_2 = \varphi_2 \blacktriangle \gamma_2$  und damit die Kommutativität gilt.

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 \blacktriangle \psi'_2 &= \alpha_2 \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \psi' \\
 &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \iota_2 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \psi' \\
 &= \iota_2 \blacktriangle (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \gamma \\
 &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \varphi_2 \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \gamma \\
 &= \varphi_2 \blacktriangle \gamma_2
 \end{aligned}$$

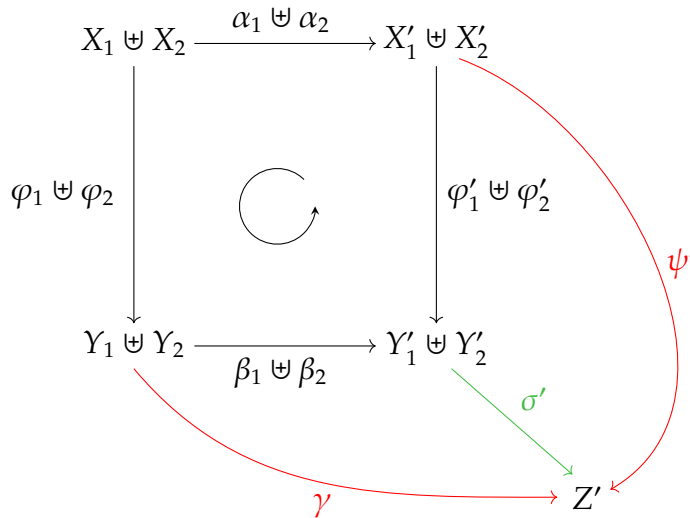
Nach den Voraussetzungen und der Definition des Pushouts gibt es somit genau eine Relation  $Y'_2 \xrightarrow{\sigma'_2} Z'$  mit  $\beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 = \gamma_2$  und  $\varphi'_2 \blacktriangle \sigma'_2 = \psi'_2$ .



Wir haben somit die beiden Relationen  $Y'_1 \xrightarrow{\sigma'_1} Z'$  und  $Y'_2 \xrightarrow{\sigma'_2} Z'$ . Wir bilden daraus die Relation  $Y'_1 \uplus Y'_2 \xrightarrow{\sigma'} Z'$  mit  $\sigma' := \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix}$ .

Zur Existenz von  $\sigma'$ .

Zu zeigen ist nun, dass dann  $(\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und  $(\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \sigma' = \psi'$  gilt.



Es ergibt sich:

$$(\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \sigma' = (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 24 (1)}}{=} \begin{bmatrix} \beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \beta_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \iota_1 \blacktriangle \gamma \\ \iota_2 \blacktriangle \gamma \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 25}}{=} \gamma$$

$$(\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \sigma' = (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 24 (1)}}{=} \begin{bmatrix} \varphi'_1 \blacktriangle \sigma'_1 \\ \varphi'_2 \blacktriangle \sigma'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \iota_1 \blacktriangle \psi' \\ \iota_2 \blacktriangle \psi' \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 25}}{=} \psi'$$

Es ist somit die gewünschte Kommutativität und damit die Existenz von  $\sigma'$  gezeigt.

Zur Eindeutigkeit von  $\sigma'$ .

Es sei eine weitere Relation  $\tilde{\sigma}' : Y'_1 \uplus Y'_2 \rightarrow Z'$  gegeben mit

$$(\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \gamma \text{ und } (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \psi'$$

Es genügt zu zeigen, dass  $\tilde{\sigma}' \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} = \sigma'$  ist. Nach Lemma 25 gilt  $\tilde{\sigma}' = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}'_1 \\ \tilde{\sigma}'_2 \end{bmatrix}$ , wenn  $\tilde{\sigma}'_1 := \iota_1 \blacktriangle \tilde{\sigma}'$  sowie  $\tilde{\sigma}'_2 := \iota_2 \blacktriangle \tilde{\sigma}'$  gesetzt wird.

Es gelten

$$\begin{aligned} \beta_1 \blacktriangle \tilde{\sigma}'_1 &= \beta_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \tilde{\sigma}' \\ &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \iota_1 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \tilde{\sigma}' \\ &= \iota_1 \blacktriangle \gamma \\ &= \gamma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_1 \blacktriangle \tilde{\sigma}'_1 &= \varphi'_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \tilde{\sigma}' \\ &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \iota_1 \blacktriangle (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \tilde{\sigma}' \\ &= \iota_1 \blacktriangle \psi' \\ &= \psi'_1. \end{aligned}$$

Die Relation  $\sigma'_1$  mit  $\beta_1 \blacktriangle \sigma'_1 = \gamma_1$  und  $\varphi'_1 \blacktriangle \sigma'_1 = \psi'_1$  ist aber eindeutig. Somit gilt  $\tilde{\sigma}'_1 = \sigma'_1$ . Analog folgt auch  $\tilde{\sigma}'_2 = \sigma'_2$ . Also ist  $\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}'_1 \\ \tilde{\sigma}'_2 \end{bmatrix} = \tilde{\sigma}'$ . □

## 4 Gegenbeispiele zur Existenz eines Pushouts

**Bemerkung 36.** Mithilfe von  $\text{Magma}^{[1]}$  wurde die Kardinalität der Menge, welche die möglichen kommutativen Vervollständigungen für vorgegebene Relationen  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  bei fester Zielmenge  $Z'$  enthält, untersucht; vgl. Anhang 4. Wenn ein Pushout existiert, dann steht die Menge, welche die möglichen kommutativen Vervollständigungen enthält, in Bijektion zur Menge der Relationen von  $Y'$  nach  $Z'$  und weist damit als Kardinalität eine Zweierpotenz auf. Liegt also keine Zweierpotenz als Kardinalität vor, so ist ein Gegenbeispiel für die Existenz einer Vervollständigung zu einem Pushout gefunden; vgl. Bemerkung 34. Mögliche Eigenschaften der auftretenden Relationen waren linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig. Die Suche nach Gegenbeispielen wurde durchgeführt unter der Voraussetzung, dass gewisse dieser Eigenschaften für  $\alpha$  beziehungsweise  $\varphi$  gelten sollten.

**Satz 37.**

(1) Es gibt in der Kategorie der Relationen ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \varphi \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

wobei  $\alpha$  und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig sind, welches keinen Pushout besitzt.

(2) Es gibt in der Kategorie der Relationen ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \varphi \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

wobei  $\alpha$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig sind, welches keinen Pushout besitzt.

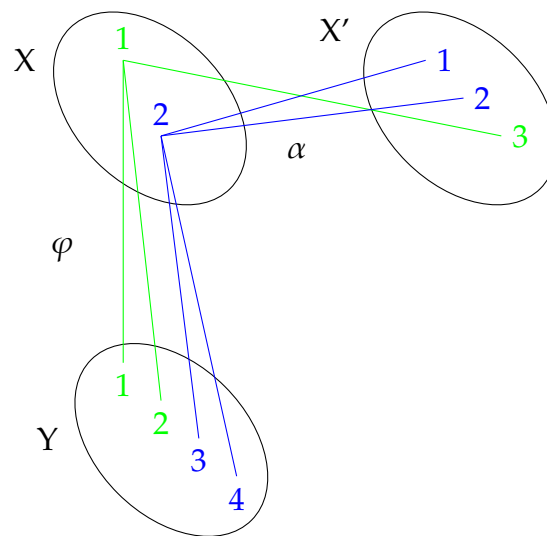
*Beweis.* Zu jedem der beschriebenen Fälle wird im Folgenden ein gefundenes Gegenbeispiel dargestellt.

Zu (1): Sei  $X = \{1, 2\}$ ,  $X' = \{1, 2, 3\}$  und  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ . Seien hierzu  $\alpha = \{(1, 3), (2, 1), (2, 2)\} \subseteq X \times X'$  und  $\varphi = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4)\} \subseteq X \times Y$  zwei Relationen. Die Relationen  $\alpha$  und  $\varphi$  sind beide linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig.

Sei  $Z' = \{1\}$ . Die Kardinalität der Menge, welche die möglichen kommutativen Vervollständigungen mit Ziel  $Z'$  enthält, beträgt laut Magma<sup>[1]</sup>

$$|\{(\beta, \varphi') \in \text{Rel}(Y, Z') \times \text{Rel}(X', Z') : \alpha \blacktriangle \varphi' = \varphi \blacktriangle \beta\}| = 40$$

und ist damit keine Potenz von 2; vgl. Anhang 4a. Somit hat das betrachtete Diagramm keine Vervollständigung zu einem Pushout; vgl. Bemerkung 34.



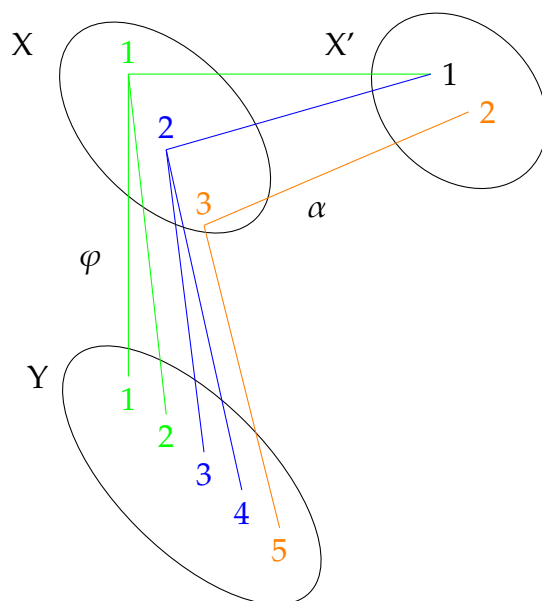
Zu (2): Sei  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $X' = \{1, 2\}$  und  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Seien hierzu  $\alpha = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\} \subseteq X \times X'$  und  $\varphi = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5)\} \subseteq X \times Y$  zwei Relationen. Die Relation  $\alpha$  ist linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig, die Relation  $\varphi$  ist linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig.

Sei  $Z' = \{1\}$ . Die Kardinalität der Menge, welche die möglichen kommutativen Vervollständigungen mit Ziel  $Z'$  enthält, beträgt laut Magma<sup>[1]</sup>

$$|\{(\beta, \varphi') \in \text{Rel}(Y, Z') \times \text{Rel}(X', Z') : \alpha \blacktriangle \varphi' = \varphi \blacktriangle \beta\}| = 20$$

und ist damit keine Potenz von 2; vgl. Anhang 4b. Somit hat das betrachtete Diagramm keine Vervollständigung zu einem Pushout; vgl. Bemerkung 34.



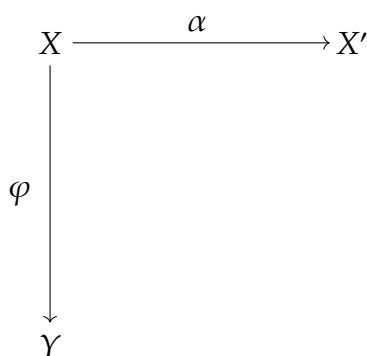


□

## 5 Pushout-Konstruktionen

### 5.1 Pushout einer links- und rechtseindeutigen Relation und einer beliebigen Relation

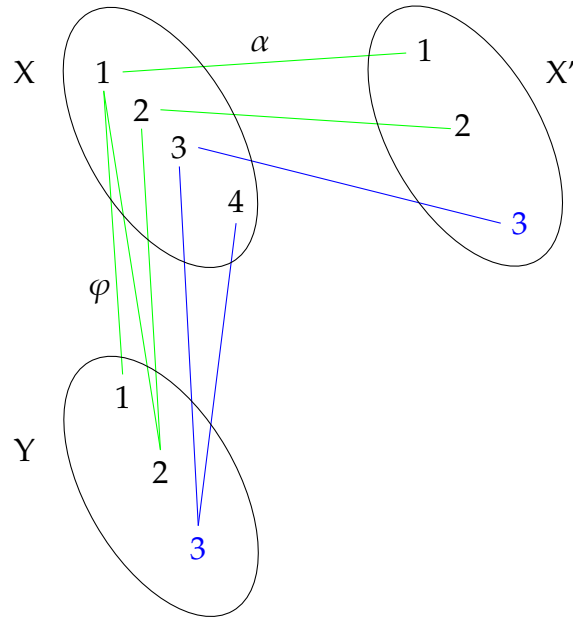
**Beispiel 38.** Es sei die folgende Ausgangssituation gegeben, wobei  $\alpha$  die Eigenschaften links-eindeutig, rechtseindeutig und rechtstotal aufweist und wobei  $\varphi$  eine rechtstotale Relation ist.



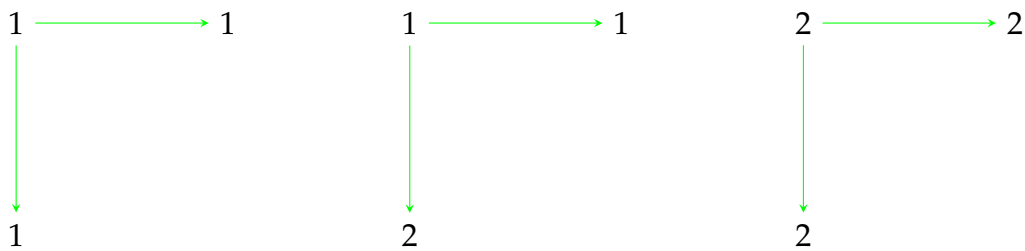
Unter der Zuhilfenahme von  $\text{Magma}^{[1]}$  wurde die Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck betrachtet, welche bezüglich konkurrierender kommutativer Vervollständigungen mit rechtem unteren Eck von beschränkter Größe die Pushout-Eigenschaft hat. Dies wurde untersucht bei Vorgabe unterschiedlicher Mengen  $X$ ,  $X'$  und  $Y$  sowie verschiedener Relationen  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  mit entsprechenden Eigenschaften; vgl. Anhang 6. Hierbei wurden

auftretende Muster untersucht. Wir veranschaulichen das beobachtete Prinzip in folgendem Beispiel.

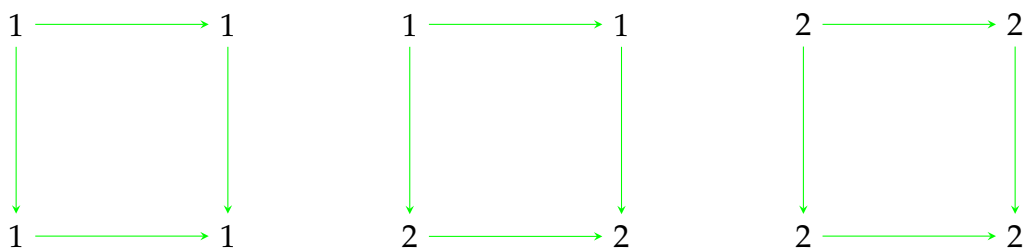
Seien hierzu  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X' = \{1, 2, 3\}$  und  $Y = \{1, 2, 3\}$  Mengen. Seien  $\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq X \times X'$ ,  $\varphi = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3)\} \subseteq X \times Y$  Relationen. Wir sind also in folgender Situation:



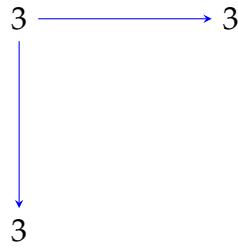
Zur Bildung von  $Y'$  samt der Relationen  $Y \xrightarrow{\beta} Y'$  und  $X' \xrightarrow{\varphi'} Y'$  sollen nun, bildlich gesprochen, die Ecken



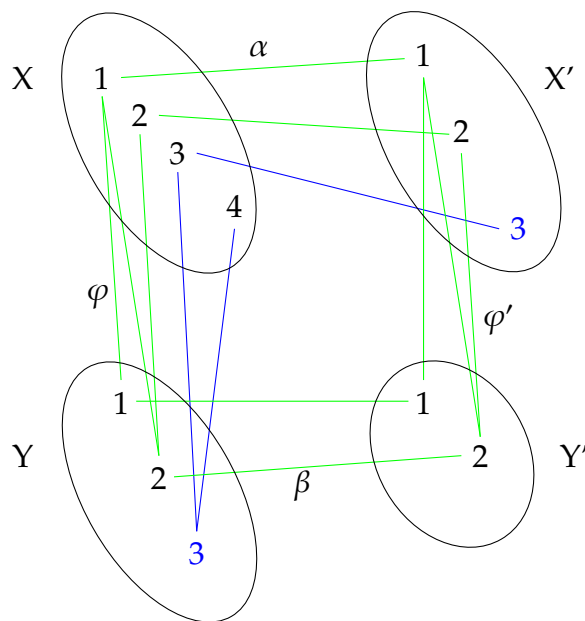
zu Vierecken vervollständigt werden. Hierbei soll bei gleichem linken unteren Eck auch das gleiche rechte untere Eck eintreten.



Anders behandelt werden muss das Eck



Denn die  $3 \in Y$  links unten wird auch von  $4 \in X$  getroffen, welches nicht im Urbild von  $\alpha$  liegt:  $4 \in X \setminus \alpha X'$ . Aus diesem Grund wird dieses Eck nicht vervollständigt. Insgesamt erhalten wir:



Es hat also das Element  $4 \in X \setminus \alpha X'$  „verboten“, das Element  $3 \in (X \setminus \alpha X')\varphi \subseteq Y$  in  $Y'$  aufzunehmen.

Hätte man dieses „Verbot“ nicht beachtet, würde das Element  $4 \in X \setminus \alpha X'$  die Kommutativität des entstandenen Vierecks verhindern, da es via  $Y$  mit  $3 \in Y'$  verbunden wäre, via  $X'$  aber nicht. Dies würde die Kommutativität *verhindern*.

Gemäß Magma hat dieses Viereck nun die Pushout-Eigenschaft bezüglich konkurrierender kommutativer Vervollständigungen mit rechtem unteren Eck von Kardinalität  $\leq 4$ .

**Satz 39.** Sei  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  rechtstotal, rechtseindeutig und linkseindeutig und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  rechtstotal. Es lässt sich wie folgt ein Pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \end{array}$$

konstruieren.

Die Menge  $Y'$  wird wie folgt definiert:

$$Y' := (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi \subseteq Y;$$

Es ist  $Y' = \{y \in Y : \varphi y \subseteq \alpha X'\}$ . Ferner lassen sich die Relationen  $\beta$  und  $\varphi'$  wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \varphi' &:= \{(x', y') \in X' \times Y' : \exists x \in X : (x, x') \in \alpha \wedge (x, y') \in \varphi\} \\ \beta &:= \{(y', y') : y' \in Y'\} \subseteq Y \times Y' \end{aligned}$$

Die Relation  $\varphi'$  ist nach Konstruktion rechtstotal. Die Relation  $\beta$  ist nach Konstruktion linkseindeutig, rechtseindeutig und rechtstotal.

Zur Konstruktion von  $Y'$  vergleiche auch das kommutative Viereck in Beispiel 38, welches wir in Beispiel 40 nochmals aufgreifen werden

*Beweis.*

Zu  $Y' \stackrel{!}{=} \{y \in Y : \varphi y \subseteq \alpha X'\}$ .

Zu  $\subseteq$ : Sei  $y' \in Y' = (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi$ . Zu zeigen ist, dass  $\varphi y' \stackrel{!}{\subseteq} \alpha X'$  gilt. Wir nehmen an, dass  $\varphi y' \not\subseteq \alpha X'$  ist. Dann wählen wir ein  $x \in X \setminus \alpha X'$  mit  $x \in \varphi y'$ , also mit  $(x, y') \in \varphi$ . Dann ist aber  $y' \in (X \setminus \alpha X')\varphi$ , was einen Widerspruch liefert.

Zu  $\supseteq$ : Sei  $y \in Y$  mit  $\varphi y \subseteq \alpha X'$ . Zu zeigen ist dann, dass  $y \stackrel{!}{\in} Y'$  gilt.

(1) Wir müssen zeigen, dass  $y \stackrel{!}{\in} (\alpha X')\varphi$  ist. Da  $\varphi$  rechtstotal ist, können wir ein  $x \in X$  wählen mit  $(x, y) \in \varphi$ . Nach Voraussetzung an  $y$  ist  $\varphi y \subseteq \alpha X'$ . Da  $x \in \varphi y$  gilt ist somit  $x \in \alpha X'$  und damit  $y \in (\alpha X')\varphi$ .

(2) Es ist zusätzlich zu zeigen, dass  $y \stackrel{!}{\notin} (X \setminus \alpha X')\varphi$  gilt. Wir nehmen an, dass  $y \in (X \setminus \alpha X')\varphi$  ist. Wir wählen dann ein  $x \in X \setminus \alpha X'$  mit  $(x, y) \in \varphi$ . Es ist also  $x \in \varphi y$ . Nach Voraussetzung an  $y$  ist  $\varphi y \subseteq \alpha X'$ . Somit ist  $x \in \varphi y \subseteq \alpha X'$ , was einen Widerspruch liefert.

Zum kommutativen Viereck.

Damit ein kommutatives Viereck vorliegt, muss  $\alpha \blacktriangle \varphi' \stackrel{!}{=} \varphi \blacktriangle \beta$  gezeigt werden.

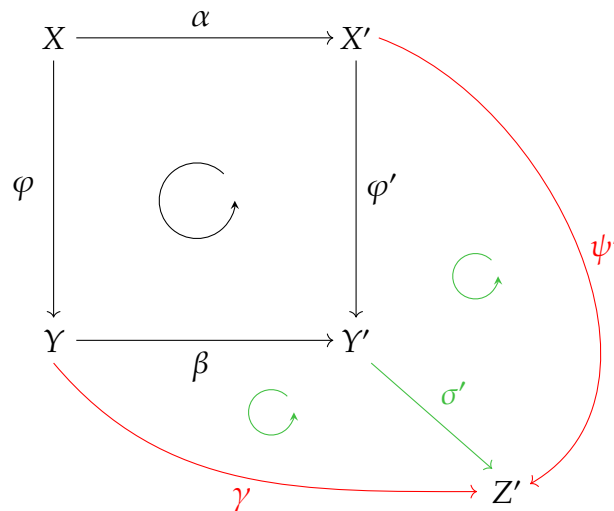
Zu  $\subseteq$ : Sei  $(x, y') \in \alpha \blacktriangle \varphi'$ . Dann können wir ein  $x' \in X'$  wählen mit  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x', y') \in \varphi'$ . Wegen der Konstruktion von  $\varphi'$  können wir ein  $\tilde{x} \in X$  wählen mit  $(\tilde{x}, x') \in \alpha$  und  $(\tilde{x}, y') \in \varphi$ . Insbesondere ist  $(x, x') \in \alpha$  und  $(\tilde{x}, x') \in \alpha$ . Wegen der Linkseindeutigkeit von  $\alpha$  ergibt sich, dass  $x = \tilde{x}$  gilt. Wir erhalten also, dass  $(x, y') = (\tilde{x}, y') \in \varphi$ . Nach Konstruktion muss zudem  $(y', y') \in \beta$  gelten. Somit ist  $(x, y') \in \varphi \blacktriangle \beta$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(x, y') \in \varphi \blacktriangle \beta$ . Dann können wir ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \varphi$  und  $(y, y') \in \beta$ . Aus  $(y, y') \in \beta$  folgt nach der Konstruktion von  $\beta$ , dass  $y = y'$  gilt. Dementsprechend ist auch  $(x, y') \in \varphi$ .

Da  $y' \in Y'$  gilt, ist  $\varphi y' \subseteq \alpha X'$ . Da  $x \in \varphi y'$  ist, folgt  $x \in \alpha X'$ . Wir wählen ein  $x' \in X'$  mit  $(x, x') \in \alpha$ . Aus  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x, y') \in \varphi$  folgt nun  $(x', y') \in \varphi'$ . Insgesamt ist also  $(x, y') \in \alpha \blacktriangle \varphi'$ .

Zur universellen Eigenschaft des Pushouts.

Seien eine Menge  $Z'$  und Relationen  $Y \xrightarrow{\gamma} Z'$  und  $X' \xrightarrow{\psi'} Z'$  so gegeben, dass  $\varphi \blacktriangle \gamma = \alpha \blacktriangle \psi'$  gilt. Wir haben zu zeigen, dass es genau ein  $\sigma' : Y' \rightarrow Z'$  gibt mit  $\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'$ ; vgl. Definition 33. Es ist also die Existenz sowie die Eindeutigkeit von  $\sigma'$  zu zeigen.



Zur Existenz von  $\sigma'$

Sei  $\sigma' = \{(y', z') \in Y' \times Z' : (y', z') \in \gamma\}$ .

Es ist nun zu zeigen, dass  $\beta \blacktriangle \sigma' \stackrel{!}{=} \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \sigma' \stackrel{!}{=} \psi'$  gilt.

Wir beginnen damit,  $\beta \blacktriangle \sigma' \stackrel{!}{=} \gamma$  zu zeigen.

Zu  $\subseteq$ :

Sei  $(y, z') \in \beta \blacktriangle \sigma'$ . Es ist zu zeigen, dass  $(y, z') \in \gamma$  gilt.

Wir können ein  $y' \in Y'$  wählen mit  $(y, y') \in \beta$  und  $(y', z') \in \sigma'$ .

Aus  $(y, y') \in \beta$ , folgt  $y = y'$ . Aus  $(y', z') \in \sigma'$ , folgt  $(y', z') \in \gamma$ . Hieraus ergibt sich  $(y, z') = (y', z') \in \gamma$ .

Zu  $\supseteq$ :

Sei  $(y, z') \in \gamma$ . Es ist zu zeigen, dass dann auch  $(y, z') \in \beta \blacktriangle \sigma'$  gilt. Wir wollen zeigen, dass

$y \stackrel{!}{\in} Y' = (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi$  ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass  $\varphi y \stackrel{!}{\subseteq} \alpha X'$  ist. Sei  $x \in \varphi y$ , das heißt es ist  $x \in X$  mit  $(x, y) \in \varphi$ . Zu zeigen ist  $x \stackrel{!}{\in} \alpha X'$ . Es ist  $(x, y) \in \varphi$  und  $(y, z') \in \gamma$ , also ist  $(x, z') \in \varphi \blacktriangle \gamma = \alpha \blacktriangle \psi'$ . Somit können wir ein  $x' \in X'$  wählen mit  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x', y) \in \psi'$ . Also ist  $x \in \alpha X'$  und damit ist  $y' := y \in Y'$ . Folglich ist  $(y, y') = (y', y') \in \beta$ . Wegen  $(y', z') = (y, z') \in \gamma$  ist  $(y', z') \in \sigma'$ . Also ist  $(y, z') \in \beta \blacktriangle \sigma'$ .

Wir zeigen nun, dass  $\varphi' \blacktriangle \sigma' \stackrel{!}{=} \psi'$  gilt.

Zu  $\subseteq$ :

Sei  $(x', z') \in \varphi' \blacktriangle \sigma'$ . Dann ist zu zeigen, dass  $(x', z') \stackrel{!}{\in} \psi'$  gilt.

Wir wählen ein  $y' \in Y'$  mit  $(x', y') \in \varphi'$  und  $(y', z') \in \sigma'$ . Letzteres bedeutet auch, dass  $(y', z') \in \gamma$  ist. Es ist  $y' \in Y' = (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi$ . Wir wählen ein  $x \in \alpha X'$  mit  $(x, y') \in \varphi$ . Wir wählen ein  $x' \in X'$  mit  $(x, x') \in \alpha$ . Aus  $(x, y') \in \varphi$  und  $(y', z') \in \gamma$  lässt sich schließen, dass  $(x, z') \in \varphi \blacktriangle \gamma = \alpha \blacktriangle \psi'$  ist. Wir können ein  $\tilde{x}' \in X'$  wählen mit  $(x, \tilde{x}') \in \alpha$  und  $(\tilde{x}', z') \in \psi'$ . Da nun sowohl  $(x, x') \in \alpha$  als auch  $(x, \tilde{x}') \in \alpha$  ist, muss aufgrund der Rechtseindeutigkeit von  $\alpha$  gelten, dass  $x' = \tilde{x}'$  ist. Hieraus folgt, dass  $(x', z') = (\tilde{x}', z') \in \psi'$  ist, was zu zeigen war.

Zu  $\supseteq$ :

Sei  $(x', z') \in \psi'$ . Dann ist zu zeigen, dass  $(x', z') \stackrel{!}{\in} \varphi' \blacktriangle \sigma'$  gilt.

Da  $\alpha$  rechtstotal ist, können wir ein  $x \in X$  wählen mit  $(x, x') \in \alpha$ . Dadurch ist  $x \in \alpha X'$ . Da  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x', z') \in \psi'$  ist, gilt  $(x, z') \in \alpha \blacktriangle \psi' = \varphi \blacktriangle \gamma$ . Also können wir ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \varphi$  und  $(y, z') \in \gamma$ .

Behauptung: Es gilt  $y \stackrel{!}{\in} Y'$ .

Es war  $x \in \alpha X'$  und  $(x, y) \in \varphi$ . Also gilt, dass  $y \in (\alpha X')\varphi$  ist.

Annahme:  $y \in (X \setminus \alpha X')\varphi$ .

Dann können wir ein  $\tilde{x} \in X \setminus \alpha X'$  wählen mit  $(\tilde{x}, y) \in \varphi$ . Aus  $(\tilde{x}, y) \in \varphi$  und  $(y, z') \in \gamma$  folgt  $(\tilde{x}, z') \in \varphi \blacktriangle \gamma = \alpha \blacktriangle \psi'$ .

Wir wählen ein  $\tilde{x}' \in X'$  mit  $(\tilde{x}, \tilde{x}') \in \alpha$  und  $(\tilde{x}', z') \in \psi'$ . Da  $(\tilde{x}, \tilde{x}') \in \alpha$ , muss  $\tilde{x} \in \alpha X'$  gelten. Dies ist ein *Widerspruch* zu  $\tilde{x} \in X \setminus \alpha X'$ . Damit ist die Annahme falsch und es gilt  $y \notin (X \setminus \alpha X')\varphi$ .

Somit ist  $y \in (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi = Y'$ .

Wir schreiben  $y' := y \in Y'$ . Wegen  $(y', z') = (y, z') \in \gamma$  ist auch  $(y', z') \in \sigma'$ . Da  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x, y') = (x, y) \in \varphi$ , folgt  $(x', y') \in \varphi'$ . Da  $(x', y') \in \varphi'$  und  $(y', z') \in \sigma'$ , folgt  $(x', z') \in \varphi' \blacktriangle \sigma'$ .

Hiermit ist die Existenz von  $\sigma'$  gezeigt.

Zur Eindeutigkeit von  $\sigma'$ .

Sei  $\sigma' : Y' \rightarrow Z'$  mit  $\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'$  und  $\tilde{\sigma}' : Y' \rightarrow Z'$  mit  $\beta \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \psi'$ .

Es ist nun zu zeigen, dass  $\sigma' \stackrel{!}{=} \tilde{\sigma}'$  gilt.

Sei  $y' \in Y'$ . Es genügt zu zeigen:

$$\{y'\}\sigma' \stackrel{!}{=} \{y'\}\tilde{\sigma}'.$$

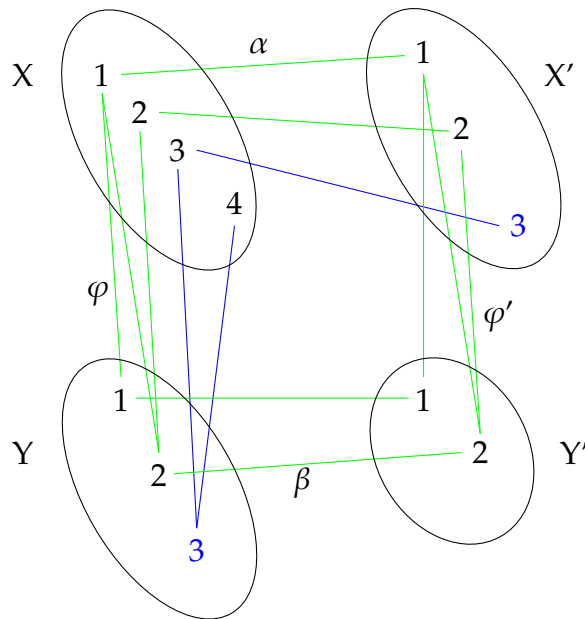
Nach Definition von  $\beta$  ist  $\{y'\}\beta = \{y'\}$ . Hieraus folgen die beiden Gleichheiten

$$\begin{aligned} \{y'\}\sigma' &= (\{y'\}\beta)\sigma' \stackrel{\text{Lemma 6}}{=} \{y'\}(\beta \blacktriangle \sigma') = \{y'\}\gamma \\ \{y'\}\tilde{\sigma}' &= (\{y'\}\beta)\tilde{\sigma}' \stackrel{\text{Lemma 6}}{=} \{y'\}(\beta \blacktriangle \tilde{\sigma}') = \{y'\}\gamma. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass  $\{y'\}\sigma' = \{y'\}\tilde{\sigma}'$  gilt.

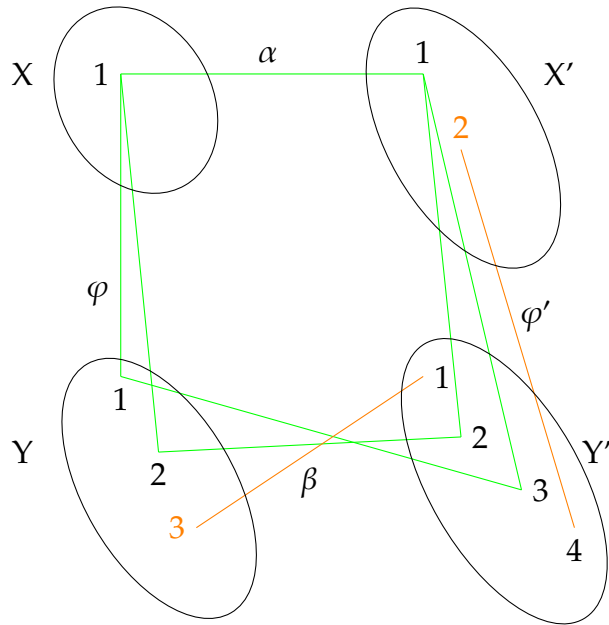
□

**Beispiel 40.** Wir greifen das Beispiel 38 nochmals auf. Die dort von Magma gefundene kommutative Vervollständigung ist in der Tat ein Pushout, wie wir nun mit Satz 39 verifizieren können.



Es ist  $\alpha X' = \{1, 2, 3\}$  und  $X \setminus \alpha X' = \{4\}$ . Somit ist  $(\alpha X')\varphi = \{1, 2, 3\}$  und  $(X \setminus \alpha X')\varphi = \{3\}$ . Somit wird nach Satz 39  $Y' = (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi = \{1, 2\}$ . Ferner wird  $\beta = \{(y', y') : y' \in Y'\} = \{(1, 1), (2, 2)\}$ . Schließlich wird  $\varphi' = \{(x', y') \in X' \times Y' : \exists x \in X : (x, x') \in \alpha \wedge (x, y') \in \varphi\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ . Damit stimmt die in Beispiel 38 gefundene Vervollständigung mit dem in Satz 39 konstuierten Pushout überein.

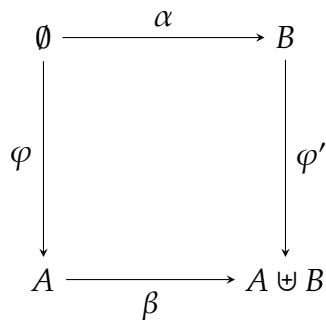
**Beispiel 41.** Wir wollen uns nun von der Voraussetzung, dass  $\alpha$  und  $\varphi$  rechtstotal sein müssen, lösen. Wir führen ein Experiment mittels Magma<sup>[1]</sup> durch. Seien hierzu  $X = \{1\}$ ,  $X' = \{1, 2\}$  und  $Y = \{1, 2, 3\}$  Mengen. Seien die Relationen  $\alpha = \{(1, 1)\} \subseteq X \times X'$  und  $\varphi = \{(1, 1), (1, 2)\} \subseteq X \times Y$  gegeben. Magma<sup>[1]</sup> liefert nun die Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck mittels  $Y' = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\beta = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \subseteq Y \times Y'$  und  $\varphi' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\} \subseteq X' \times Y'$ .



Magma<sup>[1]</sup> hat diese Vervollständigung nun so erstellt, dass dieses kommutative Viereck die Pushout-Eigenschaft hat bezüglich Zielmengen  $Z'$  mit Kardinalität  $|Z'| \leq 4$ . Der grün markierte Teil kann nun aus Satz 39 stammen. Der orange markierte Teil lässt eine Konstruktion mittels einer disjunkten Vereinigung erahnen. Wir wollen nun diese Beobachtung im Beispiel zu einem allgemeinen Konstruktionsprinzip machen; vgl. Satz 44 unten.

**Satz 42.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Wir haben die Relationen  $\emptyset \xrightarrow{\alpha} B$  und  $\emptyset \xrightarrow{\varphi} A$  mit  $\alpha = \emptyset$  und  $\varphi = \emptyset$ . Dann lässt sich wie folgt ein Pushout konstruieren.

Wir betrachten das folgende Viereck:



Hierbei sind die Relationen wie folgt definiert:

$$\varphi' = \iota_2 = \{(b, (2, b)) : b \in B\}$$

$$\beta = \iota_1 = \{(a, (1, a)) : a \in A\}$$

*Beweis.*

Zum kommutativen Viereck.

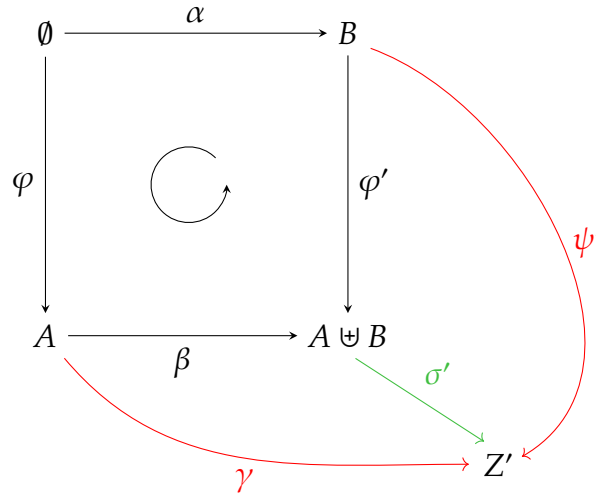
Wir müssen zeigen, dass  $\alpha \blacktriangle \varphi' = \varphi \blacktriangle \beta$  gilt. Da  $\alpha = \emptyset$  und  $\varphi = \emptyset$ , folgt  $\alpha \blacktriangle \varphi' = \emptyset$  und  $\varphi \blacktriangle \beta = \emptyset$ .



Also gilt auch  $\alpha \blacktriangle \varphi' = \varphi \blacktriangle \beta$ .

Zur universellen Eigenschaft des Pushouts.

Sei  $Z'$  eine Menge. Seien  $A \xrightarrow{\gamma} Z'$  und  $B \xrightarrow{\psi'} Z'$  Relationen mit  $\alpha \blacktriangle \psi' = \varphi \blacktriangle \gamma$ . Für die universelle Eigenschaft des Pushouts müssen wir nun zeigen, dass es genau ein  $\sigma': A \uplus B \rightarrow Z'$  mit  $\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'$  gibt.



Zur Existenz von  $\sigma'$ .

Sei  $\sigma' = \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi' \end{bmatrix}$ .

Zu zeigen ist nun, dass dann  $\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'$  gilt. Es ist

$$\begin{aligned} \beta \blacktriangle \sigma' &= \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi' \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \gamma \\ \varphi' \blacktriangle \sigma' &= \iota_2 \blacktriangle \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi' \end{bmatrix} \stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \psi' \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit von  $\sigma'$ .

Sei  $\tilde{\sigma}': A \uplus B \rightarrow Z'$  mit  $\beta \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \psi'$  gegeben. Zu zeigen ist  $\tilde{\sigma}' \stackrel{!}{=} \sigma' = \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi' \end{bmatrix}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \iota_1 \blacktriangle \tilde{\sigma}' &= \beta \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \gamma \\ \iota_2 \blacktriangle \tilde{\sigma}' &= \varphi' \blacktriangle \tilde{\sigma}' = \psi' \end{aligned}$$

Damit gilt nach Lemma 23 (1) die Gleichheit  $\tilde{\sigma}' = \begin{bmatrix} \gamma \\ \psi' \end{bmatrix}$ . □

**Bemerkung 43.** Mit Satz 42 sollen nun die Elemente, welche nicht im Bild von  $\alpha$  beziehungsweise  $\varphi$  liegen, behandelt werden. Man vergleiche die orange markierten Elemente in  $X'$  und  $Y$  in Beispiel 41.

**Satz 44.** Seien  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  gegeben. Sei die Relation  $\alpha$  rechtseindeutig und linkseindeutig. Es lässt sich wie folgt ein Pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \end{array}$$

konstruieren.

Wir definieren  $A := Y \setminus X\varphi \subseteq Y$  und  $B := X' \setminus X\alpha \subseteq X'$ . Die Menge  $Y'$  wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} Y'_1 &:= (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi \\ Y' &:= Y'_1 \uplus (A \uplus B) \end{aligned}$$

Die Relationen  $\beta$  und  $\varphi'$  werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \varphi' &:= \{(x', (1, y'_1)) \in X' \times Y' : x' \in X', y'_1 \in Y'_1, \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \wedge (x, y'_1) \in \varphi\} \\ &\quad \cup \{(b, (2, (2, b))) \in X' \times Y' : b \in B\} \subseteq X' \times Y' \\ \beta &:= \{(y'_1, (1, y'_1)) \in Y \times Y' : y'_1 \in Y'_1\} \cup \{(a, (2, (1, a))) \in Y \times Y' : a \in A\} \subseteq Y \times Y' \end{aligned}$$

Die Relation  $\beta$  ist nach Konstruktion linkseindeutig und rechtseindeutig.

*Beweis.* Seien  $X_1 := X$ ,  $X'_1 := X\alpha \subseteq X'$ ,  $Y_1 := X\varphi \subseteq Y$ . Es ist also  $Y = Y_1 \cup A$ , wobei  $Y_1 \cap A = \emptyset$  ist. Ferner ist  $X' = X'_1 \cup B$ , wobei  $X'_1 \cap B = \emptyset$  ist.

Sei

$$\alpha_1 := \{(x_1, x'_1) \in X_1 \times X'_1 : (x_1, x'_1) \in \alpha\}$$

Da  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  rechtseindeutig und linkseindeutig ist, ist  $X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X'_1$  ebenfalls rechtseindeutig und linkseindeutig. Da  $X'_1 = X\alpha$  ist, ist  $\alpha_1$  nach Konstruktion zudem rechtstotal.

Sei

$$\varphi_1 := \{(x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1 : (x_1, y_1) \in \varphi\}$$

Da  $Y_1 = X\varphi$  ist, ist  $X_1 \xrightarrow{\varphi_1} Y_1$  nach Konstruktion rechtstotal.

*Behauptung:* Es ist

$$Y'_1 = (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi \stackrel{!}{=} (\alpha_1 X'_1)\varphi_1 \setminus (X_1 \setminus \alpha_1 X'_1)\varphi_1$$

Zunächst ist

$$\begin{aligned}\alpha X' &= \{x \in X : \exists x' \in X' \text{ mit } (x, x') \in \alpha\} \\ &= \{x \in X : \exists x' \in X'_1 \text{ mit } (x, x') \in \alpha\} \\ &= \alpha_1 X'_1\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(\alpha_1 X'_1)\varphi_1 &= (\alpha_1 X'_1)\varphi = (\alpha X')\varphi \\ (X_1 \setminus \alpha X'_1)\varphi_1 &= (X_1 \setminus \alpha X'_1)\varphi = (X \setminus \alpha X')\varphi\end{aligned}$$

Es folgt dann

$$Y'_1 = (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi = (\alpha_1 X'_1)\varphi_1 \setminus (X_1 \setminus \alpha_1 X'_1)\varphi_1.$$

Dies zeigt die *Behauptung*.

Nach Satz 39 können wir einen Pushout wie folgt wählen:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X'_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi'_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y'_1 \end{array}$$

Die Menge  $Y'_1$ , die gemäß Satz 39 konstruiert wird, ist in der Tat

$$Y'_1 = (\alpha_1 X'_1)\varphi_1 \setminus (X_1 \setminus \alpha_1 X'_1)\varphi_1$$

Die Relationen  $\beta_1$  und  $\varphi'_1$  sind gemäß Satz 39 wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\varphi'_1 &:= \{(x'_1, y'_1) \in X'_1 \times Y'_1 : \exists x_1 \in X_1 : (x_1, x'_1) \in \alpha_1 \wedge (x_1, y'_1) \in \varphi_1\} \\ \beta_1 &:= \{(y'_1, y_1) \in Y_1 \times Y'_1 : y'_1 \in Y'_1\}\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die beiden Relationen  $\emptyset \xrightarrow{\alpha_2} B$  und  $\emptyset \xrightarrow{\varphi_2} A$ . Nach Satz 42 können wir einen Pushout wie folgt wählen:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\alpha_2} & B \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi'_2 \\ A & \xrightarrow{\beta_2} & A \uplus B \end{array}$$

Es gilt für die Relationen:

$$\alpha_2 = \emptyset \subseteq \emptyset \times B$$

$$\varphi_2 = \emptyset \subseteq \emptyset \times A$$

$$\varphi'_2 = \{(b, (2, b)) : b \in B\} \subseteq B \times (A \uplus B)$$

$$\beta_2 = \{(a, (1, a)) : a \in A\} \subseteq A \times (A \uplus B)$$

Die disjunkte Vereinigung zweier Pushouts ergibt nach Satz 35 wieder einen Pushout. Wir erhalten somit den folgenden Pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 \uplus \emptyset & \xrightarrow{\alpha_1 \uplus \alpha_2} & X'_1 \uplus B \\
 \downarrow \varphi_1 \uplus \varphi_2 & & \downarrow \varphi'_1 \uplus \varphi'_2 \\
 Y_1 \uplus A & \xrightarrow{\beta_1 \uplus \beta_2} & Y'_1 \uplus (A \uplus B)
 \end{array}$$

Wir bilden die Isomorphismen:

$$\xi := \{((1, x), x) : x \in X\} \subseteq (X_1 \uplus \emptyset) \times X$$

$$\xi' := \{((1, x'_1), x'_1) : x'_1 \in X'_1\} \cup \{((2, b), b) : b \in B\} \subseteq (X'_1 \uplus B) \times X'$$

$$\eta := \{((1, y_1), y_1) : y_1 \in Y_1\} \cup \{((2, a), a) : a \in A\} \subseteq (Y_1 \uplus A) \times Y$$

$$\eta' := \text{id}_{Y'} \subseteq (Y'_1 \uplus (A \uplus B)) \times Y'$$

Wir betrachten nun folgendes Diagramm:

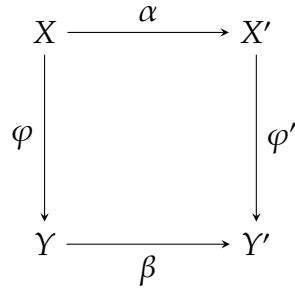
$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\
 & \nearrow \xi & \downarrow & & \nearrow \xi' \\
 X_1 \uplus \emptyset & \xrightarrow{\alpha_1 \uplus \alpha_2} & X'_1 \uplus B & & \\
 \downarrow \varphi_1 \uplus \varphi_2 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\
 & \nearrow \eta & Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \\
 Y_1 \uplus A & \xrightarrow{\beta_1 \uplus \beta_2} & Y'_1 \uplus (A \uplus B) & & \\
 & & \downarrow & & \nearrow \eta' \\
 & & & & 
 \end{array}$$

Zu zeigen ist nun, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \xi \blacktriangle \alpha &\stackrel{!}{=} (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \xi' \\
 (2) \quad \eta \blacktriangle \beta &\stackrel{!}{=} (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \eta' \\
 (3) \quad \xi \blacktriangle \varphi &\stackrel{!}{=} (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \eta \\
 (4) \quad \xi' \blacktriangle \varphi' &\stackrel{!}{=} (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \eta'
 \end{aligned}$$

gelten.

Ist dies der Fall, dann ist auch



ein Pushout.

Zu (1):

Es ist

$$\begin{aligned}
 \iota_1 \blacktriangle \xi \blacktriangle \alpha &= (\iota_1 \blacktriangle \{(1, x), x\} : x \in X) \blacktriangle \alpha \\
 &= \{(x, x) : x \in X\} \blacktriangle \alpha \\
 &= \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iota_1 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \xi' &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \alpha_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \xi' \\
 &= \alpha_1 \blacktriangle (\iota_1 \blacktriangle (\{(1, x_1'), x_1'\} : x_1' \in X_1' \cup \{(2, b), b\} : b \in B\})) \\
 &= \{(x_1, x_1') : x_1 \in X_1, x_1' \in X_1', (x_1, x_1') \in \alpha\} \blacktriangle \{(x_1', x_1') : x_1' \in X_1'\} \\
 &= \{(x, x_1') : x \in X, x_1' \in X\alpha, (x, x_1') \in \alpha\} \\
 &= \{(x, x') : x \in X, x' \in X', (x, x') \in \alpha\} \\
 &= \alpha
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \iota_2 \blacktriangle \xi \blacktriangle \alpha &= (\iota_2 \blacktriangle \{(1, x), x\} : x \in X) \blacktriangle \alpha \\
 &= \emptyset \blacktriangle \alpha \\
 &= \emptyset \\
 \iota_2 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \xi' &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \alpha_2 \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \xi' \\
 &= \emptyset \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \xi' \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

Da also  $\iota_1 \blacktriangle \xi \blacktriangle \alpha = \iota_1 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \xi'$  und  $\iota_2 \blacktriangle \xi \blacktriangle \alpha = \iota_2 \blacktriangle (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \xi'$  gelten, ist nach Lemma 23 (2)  $\xi \blacktriangle \alpha = (\alpha_1 \uplus \alpha_2) \blacktriangle \xi'$ .

Zu (2): Es ist

$$\begin{aligned}
\iota_1 \blacktriangle \eta \blacktriangle \beta &= \left( \iota_1 \blacktriangle \left( \{((1, y_1), y_1) : y_1 \in Y_1\} \cup \{(2, a), a) : a \in A\} \right) \right) \blacktriangle \beta \\
&= \{(y_1, y_1) : y_1 \in Y_1\} \blacktriangle \left( \{(y'_1, (1, y'_1)) \in Y \times Y' : y'_1 \in Y'_1\} \cup \{(a, (2, (1, a))) : a \in A\} \right) \\
&= \{(y_1, y_1) : y_1 \in Y_1\} \blacktriangle \left( \{(y_1, (1, y'_1)) : y_1 \in Y_1, y'_1 \in Y'_1, y_1 = y'_1\} \right. \\
&\quad \left. \cup \{(a, (2, (1, a))) : a \in A\} \right) \\
&= \{(y'_1, (1, y'_1)) : y'_1 \in Y'_1\} \\
\iota_1 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \eta' &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \beta_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \eta' \\
&= \left( \{(y'_1, y'_1) : y'_1 \in Y'_1\} \blacktriangle \iota_1 \right) \blacktriangle \eta' \\
&= \{(y'_1, (1, y'_1)) : y'_1 \in Y'_1\} \blacktriangle \text{id}_{Y'} \\
&= \{(y'_1, (1, y'_1)) : y'_1 \in Y'_1\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\iota_2 \blacktriangle \eta \blacktriangle \beta &= \left( \iota_2 \blacktriangle \left( \{((1, y_1), y_1) : y_1 \in Y_1\} \cup \{(2, a), a) : a \in A\} \right) \right) \blacktriangle \beta \\
&= \{(a, a) : a \in A\} \blacktriangle \left( \{(y'_1, (1, y'_1)) : y'_1 \in Y'_1\} \cup \{(a, (2, (1, a))) : a \in A\} \right) \\
&= \{(a, (2, (1, a))) : a \in A\} \\
\iota_2 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \eta' &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \beta_2 \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \eta' \\
&= \left( \{(a, (1, a)) : a \in A\} \blacktriangle \iota_2 \right) \blacktriangle \eta' \\
&= \{(a, (2, (1, a))) : a \in A\} \blacktriangle \text{id}_{Y'} \\
&= \{(a, (2, (1, a))) : a \in A\}
\end{aligned}$$

Da also  $\iota_1 \blacktriangle \eta \blacktriangle \beta = \iota_1 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \eta'$  und  $\iota_2 \blacktriangle \eta \blacktriangle \beta = \iota_2 \blacktriangle (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \eta'$  gelten, ist nach Lemma 23 (2)  $\eta \blacktriangle \beta = (\beta_1 \uplus \beta_2) \blacktriangle \eta'$ .

Zu (3): Es ist

$$\begin{aligned}
\iota_1 \blacktriangle \xi \blacktriangle \varphi &= \left( \iota_1 \blacktriangle \{((1, x), x) : x \in X\} \right) \blacktriangle \varphi \\
&= \{(x, x) : x \in X\} \blacktriangle \varphi \\
&= \varphi \\
\iota_1 \blacktriangle (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \eta &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \varphi_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \eta \\
&= \varphi_1 \blacktriangle \left( \iota_1 \blacktriangle \left( \{((1, y_1), y_1) : y_1 \in Y_1\} \cup \{(2, a), a) : a \in A\} \right) \right) \\
&= \{(x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1 : (x_1, y_1) \in \varphi\} \blacktriangle \{(y_1, y_1) : y_1 \in Y_1\} \\
&= \{(x_1, y_1) : x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1, (x_1, y_1) \in \varphi\} \\
&= \{(x, y) : x \in X, y \in X\varphi, (x, y) \in \varphi\} \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\iota_2 \blacktriangle \xi \blacktriangle \varphi &= (\iota_2 \blacktriangle \{((1, x), x) : x \in X\}) \blacktriangle \varphi \\
&= \emptyset \blacktriangle \varphi \\
&= \emptyset \\
\iota_2 \blacktriangle (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \eta &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \varphi_2 \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \eta \\
&= \emptyset \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \eta \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Da also  $\iota_1 \blacktriangle \xi \blacktriangle \varphi = \iota_1 \blacktriangle (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \eta$  und  $\iota_2 \blacktriangle \xi \blacktriangle \varphi = \iota_2 \blacktriangle (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \eta$  gelten, ist nach Lemma 23 (2)  $\xi \blacktriangle \varphi = (\varphi_1 \uplus \varphi_2) \blacktriangle \eta$ .

Zu (4): Es ist

$$\begin{aligned}
\iota_1 \blacktriangle \xi' \blacktriangle \varphi' &= (\iota_1 \blacktriangle (\{(1, x'_1), x'_1) : x'_1 \in X'_1\} \cup \{(2, b), b) : b \in B\})) \blacktriangle \varphi' \\
&= \{(x'_1, x'_1) : x'_1 \in X'_1\} \blacktriangle (\{(x', (1, y'_1)) \in X' \times Y' : \exists x \in X : (x, x') \in \alpha \wedge (x, y'_1) \in \varphi\} \\
&\quad \cup \{(b, (2, (2, b))) : b \in B\}) \\
&= \{(x'_1, x'_1) : x'_1 \in X\alpha\} \blacktriangle (\{(x', (1, y'_1)) \in X\alpha \times Y' : \exists x \in X : (x, x') \in \alpha \wedge (x, y'_1) \in \varphi\} \\
&\quad \cup \{(b, (2, (2, b))) : b \in B\}) \\
&= \{(x'_1, (1, y'_1)) \in X\alpha \times Y' : \exists x \in X \text{ mit } (x, x'_1) \in \alpha \text{ und } (x, y'_1) \in \varphi\} \\
\iota_1 \blacktriangle (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \eta' &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \varphi'_1 \blacktriangle \iota_1 \blacktriangle \eta' \\
&= \varphi'_1 \blacktriangle (\iota_1 \blacktriangle \text{id}_{Y'}) \\
&= \varphi'_1 \blacktriangle \iota_1 \\
&= \{(x'_1, y'_1) \in X'_1 \times Y'_1 : \exists x_1 \in X_1 : (x_1, x'_1) \in \alpha_1 \wedge (x_1, y'_1) \in \varphi_1\} \\
&\quad \blacktriangle \{(y'_1, (1, y'_1)) : y'_1 \in Y'_1\} \\
&= \{(x'_1, (1, y'_1)) \in X\alpha \times Y' : \exists x \in X \text{ mit } (x, x'_1) \in \alpha \text{ und } (x, y'_1) \in \varphi\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\iota_2 \blacktriangle \xi' \blacktriangle \varphi' &= \left( \iota_2 \blacktriangle \left( \{((1, x'_1), x'_1) : x'_1 \in X'_1\} \cup \{(2, b), b) : b \in B\} \right) \blacktriangle \varphi' \right. \\
&= \{(b, b) : b \in B\} \blacktriangle \left( \{(x', (1, y'_1)) \in X' \times Y' : \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \wedge (x, y'_1) \in \varphi\} \right. \\
&\quad \left. \cup \{(b, (2, (2, b))) : b \in B\} \right) \\
&= \{(b, b) : b \in B\} \blacktriangle \{(x'_1, (1, y'_1)) \in X'_1 \times Y' : \exists x \in X \text{ mit } (x, x'_1) \in \alpha \wedge (x, y'_1) \in \varphi\} \\
&\quad \cup \{(b, (2, (2, b))) : b \in B\} \\
&= \{(b, (2, (2, b))) : b \in B\} \\
\iota_2 \blacktriangle (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \eta' &\stackrel{\text{Lemma 21}}{=} \varphi'_2 \blacktriangle \iota_2 \blacktriangle \eta' \\
&= \left( \{(b, (2, b)) : b \in B\} \blacktriangle \iota_2 \right) \blacktriangle \text{id}_{Y'} \\
&= \{(b, (2, (2, b))) : b \in B\}
\end{aligned}$$

Da also  $\iota_1 \blacktriangle \xi' \blacktriangle \varphi' = \iota_1 \blacktriangle (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \eta'$  und  $\iota_2 \blacktriangle \xi' \blacktriangle \varphi' = \iota_2 \blacktriangle (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \eta'$  gelten, ist nach Lemma 23 (2)  $\xi' \blacktriangle \varphi' = (\varphi'_1 \uplus \varphi'_2) \blacktriangle \eta'$ .

Es handelt sich somit bei dem Viereck

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\
Y & \xrightarrow{\beta} & Y'
\end{array}$$

um einen Pushout. □

**Bemerkung 45.** Wir betrachten die Pushoutkonstruktion aus Satz 44. Es gelten hierfür die folgenden Implikationen:

- |                               |               |                                   |
|-------------------------------|---------------|-----------------------------------|
| (1) $\varphi$ linkseindeutig  | $\Rightarrow$ | (1) $\varphi'$ linkseindeutig     |
| (2) $\varphi$ rechtseindeutig | $\Rightarrow$ | (2) $\varphi'$ rechtseindeutig    |
| (3) $\alpha$ rechtstotal      | $\Rightarrow$ | (3) $\beta$ rechtstotal           |
| (4) $\alpha$ linkstotal       | $\Rightarrow$ | (4) $\beta$ linkstotal            |
| (5) $\varphi$ rechtstotal     | $\Rightarrow$ | (5) $\varphi'$ rechtstotal        |
| (6) Aus $\varphi$ linkstotal  | muss nicht    | (6) $\varphi'$ linkstotal folgen. |

*Beweis.*

Zu (1): Seien  $y' \in Y'$  und  $x', \tilde{x}' \in X'$  mit  $(x', y'), (\tilde{x}', y') \in \varphi'$  gegeben. Zu zeigen ist dann, dass  $x' \stackrel{!}{=} \tilde{x}'$  gilt.

Fall 1: Sei  $y' = (2, (2, b))$  für ein  $b \in B$ . Dann ist  $x' = b = \tilde{x}'$ .



Fall 2: Sei  $y' = (1, y'_1)$  für ein  $y'_1 \in Y'_1$ . Dann ist  $(x', (1, y'_1)), (\tilde{x}', (1, y'_1)) \in \varphi'$ . Nach der Konstruktion von  $\varphi'$  können wir dann  $x, \tilde{x} \in X$  wählen mit  $(x, x') \in \alpha, (x, y'_1) \in \varphi, (\tilde{x}, \tilde{x}') \in \alpha$  und  $(\tilde{x}, y'_1) \in \varphi$ . Da  $\varphi$  linkseindeutig ist, folgt aus  $(x, y'_1), (\tilde{x}, y'_1) \in \varphi$ , dass  $x = \tilde{x}$  ist. Da nun  $(x, x'), (x, \tilde{x}') \in \alpha$  ist und  $\alpha$  nach Voraussetzung rechtseindeutig ist, folgt  $x' = \tilde{x}'$ .

Zu (2): Seien  $x' \in X'$  und  $y', \tilde{y}' \in Y'$  mit  $(x', y'), (x', \tilde{y}') \in \varphi'$  gegeben. Zu zeigen ist dann, dass  $y' \stackrel{!}{=} \tilde{y}'$  gilt.

Fall 1: Sei  $x' \in B = X' \setminus X\alpha$ . Wir schreiben  $b := x'$ . Es wird  $y' = (2, (2, b)) = \tilde{y}'$ .

Fall 2: Sei  $x' \notin B$ . Es wird  $y' = (1, y'_1)$  für ein  $y'_1 \in Y'_1$ , für welches wir ein  $x \in X$  wählen können mit  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x, y'_1) \in \varphi$ . Es wird  $\tilde{y}' = (1, \tilde{y}'_1)$  für ein  $\tilde{y}'_1 \in Y'_1$ , für welches wir ein  $\tilde{x} \in X$  wählen können mit  $(\tilde{x}, x') \in \alpha$  und  $(\tilde{x}, \tilde{y}'_1) \in \varphi$ . Da  $(x, x') \in \alpha$  und  $(\tilde{x}, x') \in \alpha$  und  $\alpha$  linkseindeutig ist, folgt  $x = \tilde{x}$ . Da  $(x, y'_1) \in \varphi$  und  $(x, \tilde{y}'_1) = (\tilde{x}, \tilde{y}'_1) \in \varphi$  und  $\varphi$  rechtseindeutig ist, folgt  $y'_1 = \tilde{y}'_1$ . Also ist  $y' = (1, y'_1) = (1, \tilde{y}'_1) = \tilde{y}'$ .

Zu (3): Sei  $y' \in Y'$ . Zu zeigen ist dann, dass  $y' \stackrel{!}{\in} Y\beta$  gilt.

Da  $\alpha$  rechtstotal ist, ist  $B = X' \setminus X\alpha = \emptyset$  und also  $Y' = Y'_1 \uplus (A \uplus \emptyset)$ .

Fall 1: Sei  $y' = (2, (1, a))$  für ein  $a \in A$ . Dann ist nach Konstruktion  $(a, (2, (1, a))) \in \beta$  und also  $(2, (1, a)) \in Y\beta$ .

Fall 2: Sei  $y' = (1, y'_1)$  für ein  $y'_1 \in Y'_1$ . Dann ist nach Konstruktion  $(y'_1, (1, y'_1)) \in \beta$  und also  $(1, y'_1) \in Y\beta$ .

Zu (4): Sei  $y \in Y$ . Zu zeigen ist dann, dass  $y \stackrel{!}{\in} \beta Y'$  gilt.

Fall 1: Sei  $y \in A$ . Wir schreiben  $a := y \in A$ . Es ist  $(a, (2, (1, a))) \in \beta$  und damit  $a \in \beta Y'$ .

Fall 2: Sei  $y \in Y \setminus A$ . Wegen  $A = Y \setminus X\varphi$  ist also  $y \in X\varphi$ . Wegen  $\alpha$  linkstotal ist  $\alpha X' = X$  und damit  $Y'_1 = X\varphi$ . Wir schreiben  $y'_1 := y \in X\varphi$ . Es ist  $(y'_1, (1, y'_1)) \in \beta$  und damit  $y'_1 \in \beta Y'$ .

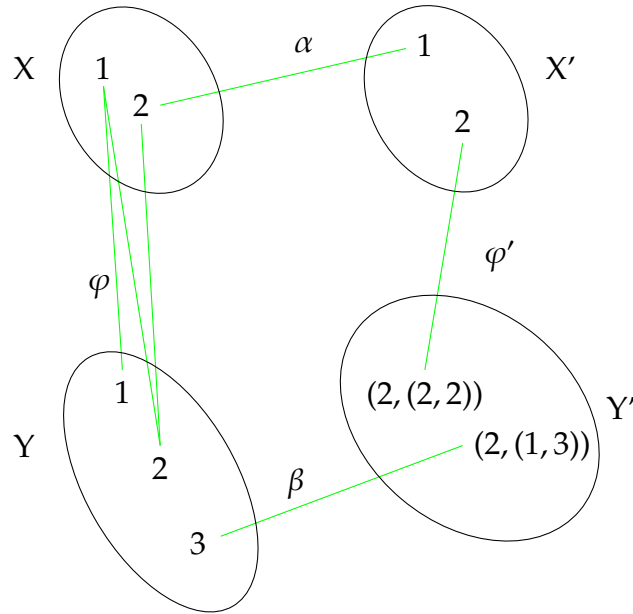
Zu (5): Sei  $y' \in Y'$ . Zu zeigen ist, dass dann  $y' \stackrel{!}{\in} X'\varphi'$  gilt.

Da  $\varphi$  rechtstotal ist, ist  $A = Y' \setminus X\varphi = \emptyset$  und also  $Y' = Y'_1 \uplus (\emptyset \uplus B)$ .

Fall 1: Sei  $y' = (2, (2, b))$  für ein  $b \in B$ . Dann ist  $(b, (2, (2, b))) \in \varphi'$  nach Konstruktion und also  $y' = (2, (2, b)) \in X'\varphi'$ .

Fall 2: Sei  $y' = (1, y'_1)$  für ein  $y'_1 \in Y'_1$ . Da  $y'_1 \in (\alpha X')\varphi$  ist, können wir ein  $x \in \alpha X'$  wählen mit  $(x, y'_1) \in \varphi$ . Da  $x \in \alpha X'$ , können wir ein  $x' \in X'$  wählen mit  $(x, x') \in \alpha$ . Also ist  $(x', y') = (x', (1, y'_1)) \in \varphi'$  und also  $y' = (1, y'_1) \in X'\varphi'$ .

Zu (6): Ein Gegenbeispiel ist durch den Pushout bestehend aus den Mengen  $X = \{1, 2\}$ ,  $X' = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y' = \{(2, (2, 2)), (2, (1, 3))\}$  und den Relationen  $\alpha = \{(2, 1)\}$ ,  $\varphi = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ ,  $\beta = \{(3, (2, (1, 3)))\}$ ,  $\varphi' = \{(2, (2, (2, 2)))\}$  gegeben. Man beachte, dass  $Y'_1 = \emptyset$ . Das Gegenbeispiel wird in folgendem Diagramm veranschaulicht:



□

## 5.2 Pushout zweier rechtseindeutiger Relationen

**Satz 46.** Seien  $X \xrightarrow{\alpha} X'$  und  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  rechtseindeutig.

Wir bilden  $X' \uplus Y = \{(1, x') : x' \in X'\} \cup \{(2, y) : y \in Y\}$ . Wir können auf  $X' \uplus Y$  eine Relation definieren:

$$(\Gamma) := \{((1, x'), (2, y)) : x' \in X', y \in Y, \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \text{ und } (x, y) \in \varphi\} \subseteq (X' \uplus Y) \times (X' \uplus Y)$$

Sei  $(\sim) \subseteq (X' \uplus Y) \times (X' \uplus Y)$  die von  $(\Gamma)$  erzeugte Äquivalenzrelation auf  $X' \uplus Y$ . Dann sei

$$\hat{Y}' := (X' \uplus Y)/(\sim) = \{[1, x'] : x' \in X'\} \cup \{[2, y] : y \in Y\}$$

wobei  $[1, x']$  die Äquivalenzklasse von  $(1, x')$  und  $[2, y]$  die Äquivalenzklasse von  $(2, y)$  bezeichne. Hiermit lässt sich die folgende Menge  $Y'$  definieren:

$$Y' := \hat{Y}' \setminus \left( \{[1, x'] : x' \in X', \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \text{ und } x\varphi = \emptyset\} \cup \{[2, y] : y \in Y, \exists x \in X \text{ mit } (x, y) \in \varphi \text{ und } x\alpha = \emptyset\} \right)$$

Wir betrachten nun folgendes Viereck:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\
 Y & \xrightarrow{\beta} & Y'
 \end{array}$$

Hierbei sind die Relationen  $\beta$  und  $\varphi'$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 \beta & := \{(y, [2, y]) : y \in Y, [2, y] \in Y'\} \subseteq Y \times Y' \\
 \varphi' & := \{(x', [1, x']) : x' \in X', [1, x'] \in Y'\} \subseteq X' \times Y'
 \end{aligned}$$

Die Relationen  $\beta$  und  $\varphi'$  sind nach Konstruktion rechtseindeutig.

Es gilt:

(1) Die Relation  $\begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix} : X' \uplus Y \longrightarrow Y'$  ist rechtstotal und rechtseindeutig.

(2) Das betrachtete Viereck ist ein Pushout.

*Beweis.* Zu Aussage (1).

Es ist

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix} & = \{((1, x'), y') : x' \in X', y' \in Y', (x', y') \in \varphi'\} \cup \{((2, y), y') : y \in Y, y' \in Y', (y, y') \in \beta\} \\
 & = \{((1, x'), [1, x']) : x' \in X', [1, x'] \in Y'\} \cup \{((2, y), [2, y]) : y \in Y, [2, y] \in Y'\}
 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der Definition von  $\varphi'$  und  $\beta$ .

Wir beginnen mit der Rechtseindeutigkeit von  $\begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}$ .

Fall 1: Sei  $(1, x') \in X' \uplus Y$ . Ist  $((1, x'), y') \in \begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}$ , dann ist  $y' = [1, x']$  und liegt also fest.

Fall 2: Sei  $(2, y) \in X' \uplus Y$ . Ist  $((2, y), y') \in \begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}$ , dann ist  $y' = [2, y]$  und liegt also fest.

Wir wollen nun noch zeigen, dass  $\begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}$  rechtstotal ist.

Sei  $y' \in Y'$  gegeben.

Fall 1: Sei  $y' = [1, x']$  die Äquivalenzklasse von  $(1, x') \in X' \uplus Y$  für ein  $x' \in X'$ . Es ist dann

$$((1, x'), y') = ((1, x'), [1, x']) \in \begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Fall 2: Sei  $y' = [2, y]$  die Äquivalenzklasse von  $(2, y) \in X' \uplus Y$  für ein  $y \in Y$ . Es ist dann

$$((2, y), y') = ((2, y), [2, y]) \in \begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Insgesamt ist  $\begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}$  rechtseindeutig und rechtstotal.

Zu Aussage (2).

*Zum kommutativen Viereck.*

Die Kommutativität des Vierecks soll gezeigt werden. Es ist somit zu zeigen, dass  $\alpha \blacktriangle \varphi' \stackrel{!}{=} \varphi \blacktriangle \beta$  gilt. Da die Situation symmetrisch ist, genügt es,  $\alpha \blacktriangle \varphi' \stackrel{!}{\subseteq} \varphi \blacktriangle \beta$  zu zeigen.

Sei  $(x, y') \in \alpha \blacktriangle \varphi'$ . Dann können wir ein  $x' \in X'$  wählen mit  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x', y') \in \varphi'$ . Nach Konstruktion von  $\varphi'$  ist  $y' = [1, x']$ . Da  $(x, x') \in \alpha$  und nach Voraussetzung  $[1, x'] \in Y'$  gilt, muss nach der Definition von  $Y'$  gelten, dass  $x\varphi \neq \emptyset$  ist. Somit können wir ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \varphi$ . Da  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x, y) \in \varphi$ , ist  $[2, y] = [1, x'] \in Y'$ . Es ist nun  $(x, y) \in \varphi$  und  $(y, [2, y]) \in \beta$ . Es folgt, dass  $(x, [2, y]) \in \varphi \blacktriangle \beta$  ist. Wegen  $[1, x'] = [2, y]$  ist also auch  $(x, y') = (x, [1, x']) \in \varphi \blacktriangle \beta$ .

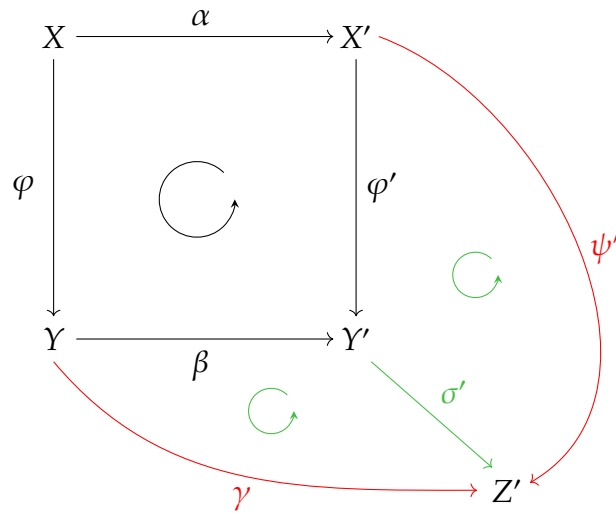
*Zur universellen Eigenschaft des Pushouts.*

Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ Y & \xrightarrow{\gamma} & Z' \end{array}$$

ein kommutatives Viereck mit den Relationen  $Y \xrightarrow{\gamma} Z'$  und  $X' \xrightarrow{\psi'} Z'$ . Es gilt also  $\varphi \blacktriangle \gamma = \alpha \blacktriangle \psi'$ .

Für die universelle Eigenschaft des Pushouts ist zu zeigen, dass genau eine Relation  $Y' \xrightarrow{\sigma'} Z'$  so existiert, dass  $\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma$  und  $\varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'$  gilt; vgl. Definition 33.



Gezeigt werden muss die Existenz und die Eindeutigkeit von  $\sigma'$ .

Zur Existenz von  $\sigma'$ .

Wir betrachten zunächst die Relation  $X' \uplus Y \xrightarrow{\begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}} Z'$  mit

$$\begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix} = \{((1, x'), z') : (x', z') \in \psi'\} \cup \{((2, y), z') : (y, z') \in \gamma\}; \text{ vgl. Definition 19.}$$

Sei die Relation  $\rho: X' \uplus Y \rightarrow \hat{Y}'$  definiert durch

$$\rho := \{((1, x'), [1, x']) : x' \in X'\} \cup \{((2, y), [2, y]) : y \in Y\}$$

Es ist dabei  $[1, x']$  die Äquivalenzklasse von  $(1, x')$  und  $[2, y]$  die Äquivalenzklasse von  $(2, y)$  bezüglich  $(\sim)$ , und es ist  $\hat{Y}' = (X' \uplus Y)/(\sim)$ .

*Behauptung:* Es gibt genau eine Relation  $\hat{Y}' \xrightarrow{\hat{\sigma}'} Z'$  mit  $\rho \blacktriangle \hat{\sigma}' = \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$ .

Dabei ist

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}' &= \{([u], z') : (u, z') \in \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}\} \\ &= \{([1, x'], z') : ((1, x'), z') \in \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}\} \cup \{([2, y], z') : ((2, y), z') \in \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}\} \\ &= \{([1, x'], z') : (x', z') \in \psi'\} \cup \{([2, y], z') : (y, z') \in \gamma\} \end{aligned}$$

Folgendes Diagramm veranschaulicht die Situation:

$$\begin{array}{ccc}
 X' \uplus Y & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}} & Z' \\
 \rho \downarrow & \nearrow & \\
 \hat{Y}' & \xrightarrow{\exists! \hat{\sigma}'} & 
 \end{array}$$

Um diese Behauptung zu zeigen, wollen wir Lemma 28 anwenden. Seien  $(1, x'), (2, y) \in X' \uplus Y$  und  $((1, x'), (2, y)) \in (\Gamma)$ . Letzteres bedeutet, dass wir ein  $x \in X$  wählen können mit  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x, y) \in \varphi$ . Um nun Lemma 28 anwenden zu können, muss  $(1, x') \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} (2, y) \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$  gelten.

Da die Situation symmetrisch ist, genügt es,  $(1, x') \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix} \stackrel{!}{\subseteq} (2, y) \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$  zu zeigen.

Sei  $((1, x'), z') \in \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$ . Zu zeigen ist, dass  $((2, y), z') \stackrel{!}{\in} \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$  gilt. Wir wissen bereits, dass  $(x, x') \in \alpha$

ist, und aus der Definition von  $\begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$ , dass  $(x', z') \in \psi'$  ist. Somit ist  $(x, z') \in \alpha \blacktriangle \psi' = \varphi \blacktriangle \gamma$ . Wir können also ein  $\tilde{y} \in Y$  wählen mit  $(x, \tilde{y}) \in \varphi$  und  $(\tilde{y}, z') \in \gamma$ . Da  $\varphi$  rechtseindeutig ist, folgt aus  $(x, \tilde{y}) \in \varphi$  und  $(x, y) \in \varphi$ , dass  $y = \tilde{y}$  ist. Somit ist  $(y, z') \in \gamma$ . Damit folgt gemäß der Definition von  $\begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$ , dass  $((2, y), z') \in \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$  ist. Dies zeigt die Behauptung.

Es ist  $Y' \subseteq \hat{Y}'$ . Wir können die Relation

$$\omega := \{(y', y') : y' \in Y'\} \subseteq \hat{Y}' \times Y'$$

bilden. Wir betrachten die Relationen  $\hat{Y}' \xrightarrow{\hat{\sigma}'} Z'$  und  $\hat{Y}' \xrightarrow{\omega} Y'$ .

*Behauptung:* Es gibt genau eine Relation  $Y' \xrightarrow{\sigma'} Z'$  mit  $\omega \blacktriangle \sigma' = \hat{\sigma}'$ .

Folgendes Diagramm veranschaulicht die Situation:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{Y}' & \xrightarrow{\hat{\sigma}'} & Z' \\
 \omega \downarrow & \nearrow & \\
 Y' & \xrightarrow{\exists! \sigma'} & 
 \end{array}$$

Um diese Behauptung zu zeigen, wollen wir Lemma 29 anwenden. Sei nun  $m \in \hat{Y}' \setminus Y'$ . Um Lemma 29 anwenden zu können, muss  $m\hat{\sigma}' \stackrel{!}{=} \emptyset$  gelten.

Fall 1: Wir können ein  $x \in X$  wählen mit  $(x, x') \in \alpha$ ,  $x\varphi = \emptyset$  und  $[1, x'] = m$ .

Fall 2: Wir können ein  $x \in X$  wählen mit  $(x, y) \in \varphi$ ,  $x\alpha = \emptyset$  und  $[2, y] = m$ .

Da die Situationen in Fall 1 und Fall 2 symmetrisch sind, genügt es, Fall 1 zu betrachten.

Damit bleibt zu zeigen, dass  $[1, x']\hat{\sigma}' \stackrel{!}{=} \emptyset$  gilt. Da  $\rho$  rechtseindeutig ist, folgt  $(1, x')\rho = \{[1, x']\}$  und damit gilt:

$$[1, x']\hat{\sigma}' = ((1, x')\rho)\hat{\sigma}' \stackrel{\text{Lemma 6}}{=} (1, x')(\rho \blacktriangle \hat{\sigma}') = (1, x') \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Zu zeigen ist nun, dass  $(1, x') \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \emptyset$  ist. Wobei wir bereits wissen, dass wir ein  $x \in X$  wählen konnten mit  $(x, x') \in \alpha$  und  $x\varphi = \emptyset$ .

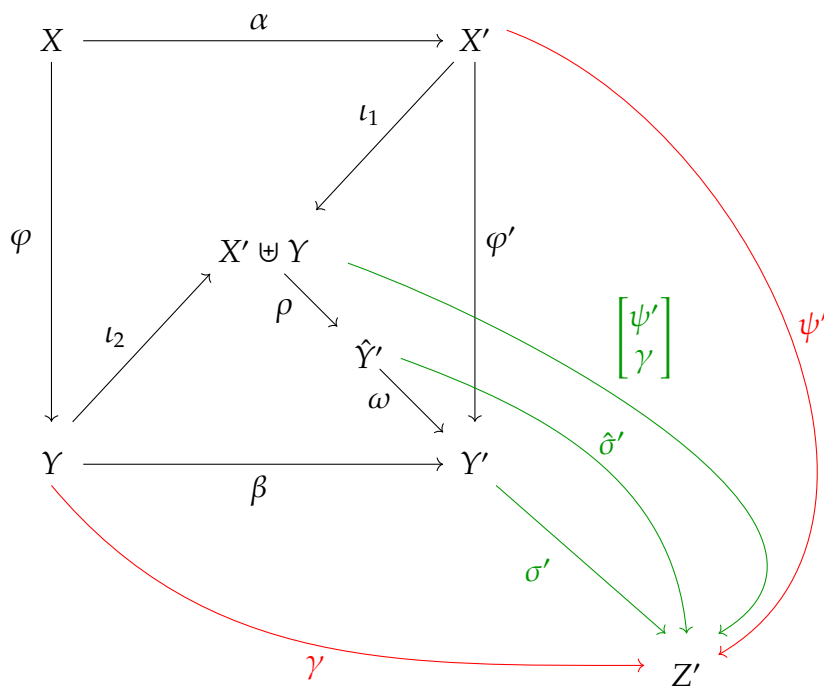
Wir *nehmen an*, dass es ein  $z' \in (1, x') \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$  gibt. Somit ist  $((1, x'), z') \in \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$  und damit folgt mit

der Definition von  $\begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix}$ , dass  $(x', z') \in \psi'$  ist. Insgesamt ist nun  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x', z') \in \psi'$ .

Somit ist  $(x, z') \in \alpha \blacktriangle \psi' = \varphi \blacktriangle \gamma$ . Wir können dann ein  $y \in Y$  wählen mit  $(x, y) \in \varphi$  und  $(y, z') \in \gamma$ . Somit ist aber  $y \in x\varphi$ , was ein *Widerspruch* zu  $x\varphi = \emptyset$  ist.

Da nun also  $m\hat{\sigma}' \stackrel{!}{=} \emptyset$  gilt, ist Lemma 29 anwendbar. Somit existiert genau eine Relation  $Y' \xrightarrow{\sigma'} Z'$  mit  $\omega \blacktriangle \sigma' = \hat{\sigma}'$ . Hiermit ist die Behauptung gezeigt.

Insgesamt ergibt sich die folgende Situation:



Gezeigt werden muss nun, dass  $\varphi' \blacktriangle \sigma' \stackrel{!}{=} \psi'$  und  $\beta \blacktriangle \sigma' \stackrel{!}{=} \gamma$  gilt.

*Behauptung:* Es gelten:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \varphi' &= \iota_1 \blacktriangle \rho \blacktriangle \omega \\ \text{(b)} \quad \beta &= \iota_2 \blacktriangle \rho \blacktriangle \omega \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie genügt es, (a) zu zeigen. Gleichung (b) folgt dann analog.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(x', [1, x']) \in \varphi'$ . Es ist also  $[1, x'] \in Y'$  nach der Definition von  $\varphi'$ . Dann ist  $(x', (1, x')) \in \iota_1$ ,  $((1, x'), [1, x']) \in \rho$  und  $([1, x'], [1, x']) \in \omega$ . Insgesamt ergibt sich damit, dass  $(x', [1, x']) \in \iota_1 \blacktriangle \rho \blacktriangle \omega$  ist.

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(x', y') \in \iota_1 \blacktriangle \rho \blacktriangle \omega$ . Es ist  $x' \iota_1 = \{(1, x')\}$ . Es folgt  $(x', (1, x')) \in \iota_1$  und  $((1, x'), y') \in \rho \blacktriangle \omega$ . Aufgrund der Rechtseindeutigkeit von  $\rho$  ist  $(1, x') \rho = \{[1, x']\}$ . Also ist  $((1, x'), [1, x']) \in \rho$  und  $([1, x'], y') \in \omega$ . Aus der Definition von  $\omega$  folgt damit, dass  $y' = [1, x'] \in Y'$  gilt. Damit folgt nach Definition von  $\varphi'$ , dass  $(x', y') = (x', [1, x']) \in \varphi'$  ist.

Dies zeigt die *Behauptung*.

Mithilfe der Gleichheit (a) kann nun  $\varphi' \blacktriangle \sigma' = \psi'$  gezeigt werden.

$$\begin{aligned} \varphi' \blacktriangle \sigma' &\stackrel{\text{(a)}}{=} \iota_1 \blacktriangle \rho \blacktriangle \omega \blacktriangle \sigma' \\ &= \iota_1 \blacktriangle \rho \blacktriangle \hat{\sigma}' \\ &= \iota_1 \blacktriangle \begin{bmatrix} \psi' \\ \gamma \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\text{Lemma 22}}{=} \psi' \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie der Situation kann  $\beta \blacktriangle \sigma' = \gamma$  mit (b) analog gezeigt werden.

*Zur Eindeutigkeit von  $\sigma'$ .*

Es seien die Relationen  $Y' \xrightarrow{\sigma'} Z'$  und  $Y' \xrightarrow{\tilde{\sigma}'} Z'$  mit

$$\begin{aligned} \beta \blacktriangle \sigma' &= \gamma = \beta \blacktriangle \tilde{\sigma}' \\ \varphi' \blacktriangle \sigma' &= \psi' = \varphi' \blacktriangle \tilde{\sigma}' \end{aligned}$$

gegeben.



Es folgt

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix} \blacktriangle \sigma' &\stackrel{\text{Lemma 24 (2)}}{=} \begin{bmatrix} \varphi' \blacktriangle \sigma' \\ \beta \blacktriangle \sigma' \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \varphi' \blacktriangle \tilde{\sigma}' \\ \beta \blacktriangle \tilde{\sigma}' \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Lemma 24 (2)}}{=} \begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix} \blacktriangle \tilde{\sigma}'
 \end{aligned}$$

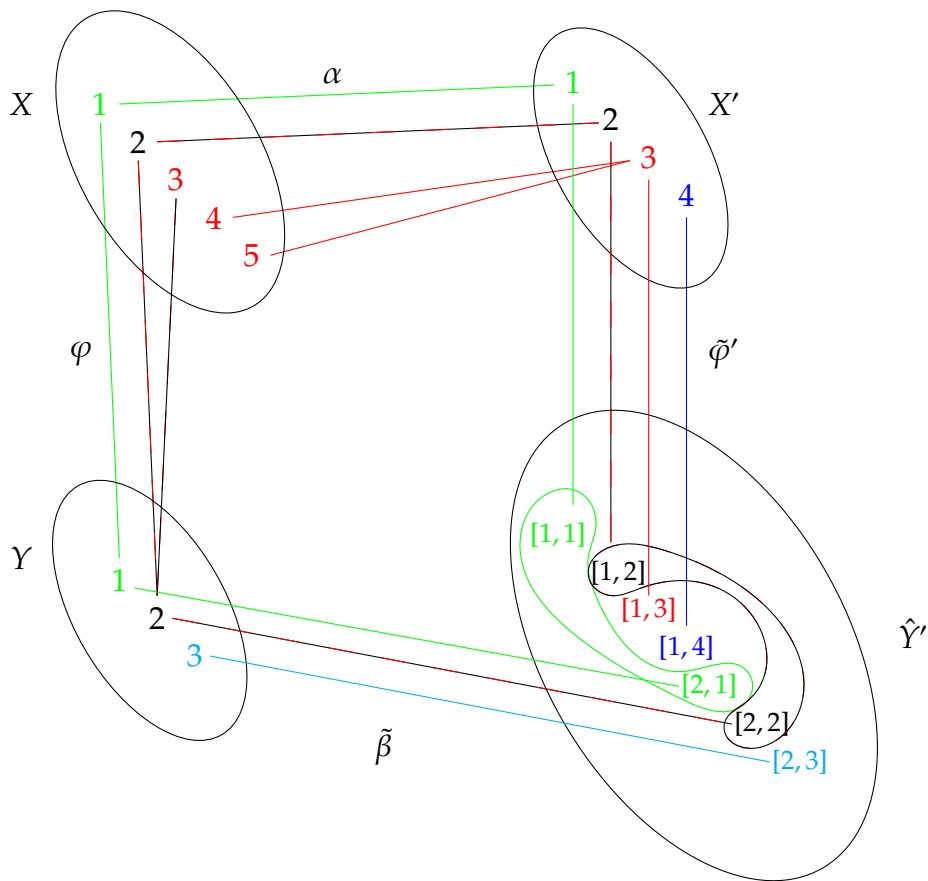
Da  $\begin{bmatrix} \varphi' \\ \beta \end{bmatrix}$  nach (1) rechtseindeutig und rechtstotal ist, folgt mit Lemma 14, dass  $\sigma' = \tilde{\sigma}'$  ist.  $\square$

**Beispiel 47.** In diesem Beispiel soll die Pushoutkonstruktion gemäß Satz 46 bei folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\
 \varphi \downarrow & & \\
 Y & & 
 \end{array}$$

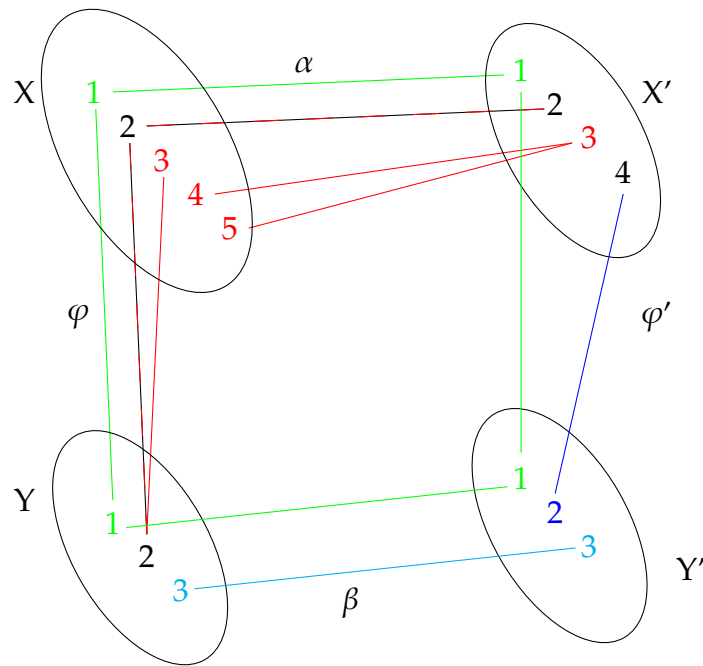
veranschaulicht werden, in welchem für  $\alpha$  und  $\varphi$  rechtseindeutige Relationen gewählt werden.

Seien  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $X' = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $Y = \{1, 2, 3\}$  Mengen, sowie  $\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (4, 3), (5, 3)\} \subseteq X \times X'$  und  $\varphi = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2)\} \subseteq X \times Y$  Relationen. Es sind  $\alpha$  und  $\varphi$  rechtseindeutig. Zunächst werden Äquivalenzklassen gebildet, aus welchen sich im weiteren Verlauf der Pushoutskonstruktion die Menge  $Y'$  entwickelt. Die Menge  $Y'$  ergänzt gemeinsam mit den Relationen  $\beta \subseteq Y \times Y'$  und  $\varphi' \subseteq X' \times Y'$  das obige Eck zu einem Pushout. Bildlich gesprochen werden Elemente aus  $X'$  und  $Y$  der selben Äquivalenzklasse zugeordnet, wenn sie über ein Element in  $X$  miteinander verbunden sind. Elemente der gleichen Äquivalenzklasse sind im Diagramm farblich zusammengefasst. Es verbindet  $\beta$  jedes Element von  $Y$  mit seiner Äquivalenzklasse in  $\hat{Y}'$ . Es verbindet  $\tilde{\varphi}'$  jedes Element von  $X'$  mit seiner Äquivalenzklasse in  $\hat{Y}'$ .



Die rot markierten Elemente in der Menge  $X$  liegen nur im Urbild einer der beiden Relationen  $\alpha$  und  $\varphi$ . Äquivalenzklassen, welche veranschaulicht gesprochen mit diesen Elementen verbunden sind, werden für die Konstruktion des Pushouts herausgenommen. Im Diagramm sind dies die Äquivalenzklassen  $[1, 2]$ ,  $[2, 2]$  und  $[1, 3]$ . Auch die entsprechenden Elemente in  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\varphi}'$ , also diejenigen, welche als zweiten Eintrag eine der herausgenommenen Äquivalenzklassen aufweisen, werden für die Konstruktion des Pushouts entfernt. Im obigen Diagramm sind dies die roten Linien und die rot-schwarz gestrichelten Linien von  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\varphi}'$ . Durch das Herausnehmen jener Elemente werden die Menge  $Y'$  und die Relationen  $\beta$  und  $\varphi'$  erhalten.

Unter Berücksichtigung der beschriebene Schritte ergibt sich somit der im folgenden dargestellte Pushout, wobei jede Äquivalenzklasse eine Nummer zugewiesen bekommen hat.



**Bemerkung 48.** Wir betrachten die Pushoutkonstruktion aus Satz 46. Es gelten hierfür die folgenden Implikationen:

- (1)  $\alpha$  rechtstotal  $\Rightarrow$   $\beta$  rechtstotal
- (2)  $\varphi$  rechtstotal  $\Rightarrow$   $\varphi'$  rechtstotal
- (3)  $\alpha$  linkseindeutig  $\Rightarrow$   $\beta$  linkseindeutig
- (4)  $\varphi$  linkseindeutig  $\Rightarrow$   $\varphi'$  linkseindeutig
- (5) Aus  $\alpha$  linkstotal muss nicht  $\beta$  linkstotal folgen.
- (6) Aus  $\varphi$  linkstotal muss nicht  $\varphi'$  linkstotal folgen.

*Beweis.*

Zu (1): Sei  $y' \in Y'$  gegeben. Gesucht ist ein  $y \in Y$  mit  $[2, y] \stackrel{!}{=} y'$ . Es soll somit  $(y, y') = (y, [2, y]) \in \beta$  gelten.

Fall 1: Sei  $y' = [2, \tilde{y}]$  für ein  $\tilde{y} \in Y$ . Dann ist  $\tilde{y} \in Y$  das gesuchte Element, und es ist  $(\tilde{y}, [2, \tilde{y}]) \in \beta$ .

Fall 2: Sei  $y' = [1, x']$  für ein  $x' \in X'$ . Für das gesuchte Element  $y \in Y$  muss nun  $[2, y] \stackrel{!}{=} [1, x']$  gelten. Nach der Konstruktion von  $Y'$  wissen wir, dass  $y' \notin \{[1, x'] : x' \in X', \exists x \in X \text{ mit } (x, x') \in \alpha \text{ und } x\varphi = \emptyset\}$  ist. Es gibt somit kein  $x \in X$  mit  $(x, x') \in \alpha$  und  $x\varphi = \emptyset$ . Für jedes  $x \in \alpha X'$  ist also  $x\varphi \neq \emptyset$ . Da  $\alpha$  nach Voraussetzung rechtstotal ist, können wir ein  $x \in \alpha x'$  wählen. Da  $x\varphi \neq \emptyset$ , können wir zudem ein  $y \in x\varphi$  wählen. Es ist somit  $(x, x') \in \alpha$  und  $(x, y) \in \varphi$ . Nach der Definition von  $(\Gamma)$  ist dann  $((1, x'), (2, y)) \in (\Gamma)$  und damit  $[1, x'] = [2, y]$ . Das gewählte  $y \in Y$  ist damit das gesuchte Element.

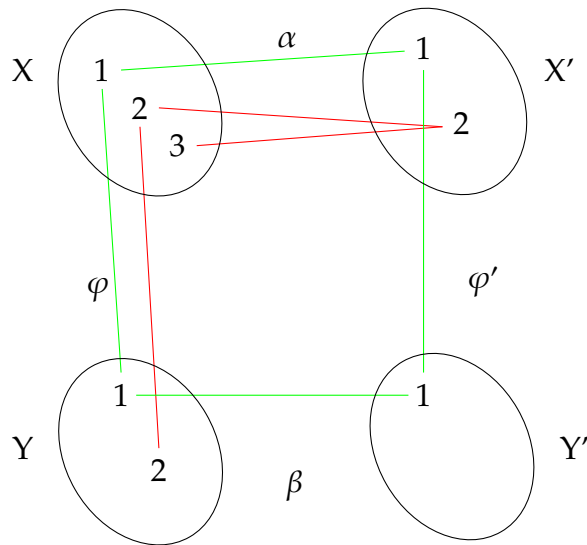
Zu (2): Aufgrund der Symmetrie der Situation ergibt sich (2) analog zu (1).

Zu (3): Die Relation  $\alpha$  ist nach Voraussetzung rechtseindeutig und linkseindeutig. Es kann nun auch die Pushoutkonstruktion gemäß Satz 44 angewendet werden. Diese liefert bis auf

Isomorphie denselben Pushout wie den betrachteten und gemäß dieser Pushoutkonstruktion ist  $\beta$  linkseindeutig; vgl. Satz 44.

Zu (4): Aufgrund der Symmetrie der Situation ergibt sich (4) analog zu (3).

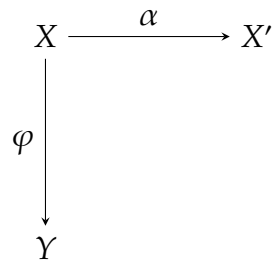
Zu (5): Ein Gegenbeispiel ist durch den Pushout bestehend aus den Mengen  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $X' = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $Y' = \{1\}$  und den Relationen  $\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2)\}$ ,  $\varphi = \{(1, 1), (2, 2)\}$ ,  $\beta = \{(1, 1)\}$ ,  $\varphi' = \{(1, 1)\}$  gegeben. Das Gegenbeispiel wird in folgendem Diagramm veranschaulicht:



Zu (6): Aufgrund der Symmetrie der Situation ergibt sich (6) analog zu (5). □

### 5.3 Übersicht der möglichen und unmöglichen Pushoutkonstruktionen

**Bemerkung 49.** Sei folgendes Diagramm von Mengen und Relationen gegeben.



- (1) Falls  $\alpha$  linkseindeutig und rechtseindeutig ist, dann existiert eine Vervollständigung zu einem Pushout gemäß Satz 44.
- (2) Falls  $\alpha$  und  $\varphi$  rechtseindeutig sind, dann existiert eine Vervollständigung zu einem Pushout gemäß Satz 46.
- (3) Es gibt ein solches Diagramm mit  $\alpha$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig, welches keine Vervollständigung zu einem Pushout besitzt; vgl. Satz 37 (1).
- (4) Es gibt ein solches Diagramm mit  $\alpha$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig, welches keine Vervollständigung zu einem Pushout besitzt; vgl. Satz 37 (2).

**Bemerkung 50.** Der Eigenschaftsvektor zu den Eigenschaften

$$\begin{pmatrix} \text{linkstotal} \\ \text{rechtstotal} \\ \text{linkseindeutig} \\ \text{rechtseindeutig} \end{pmatrix}$$

zeige an, ob die betrachtete Relation die jeweilige Eigenschaft besitzen soll. Wird die Eigenschaft gefordert, so enthält der Vektor an entsprechender Stelle die Ziffer 1. Wird die Eigenschaft nicht gefordert, so enthält der Vektor an entsprechender Stelle die Ziffer 0. So gibt beispielsweise der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, dass die Eigenschaften linkstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig gefordert werden, die Eigenschaft rechtstotal jedoch nicht gefordert wird.

**Bemerkung 51.** Sei folgendes Diagramm von Mengen und Relationen gegeben.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \varphi \downarrow & & \\ & & Y \end{array}$$

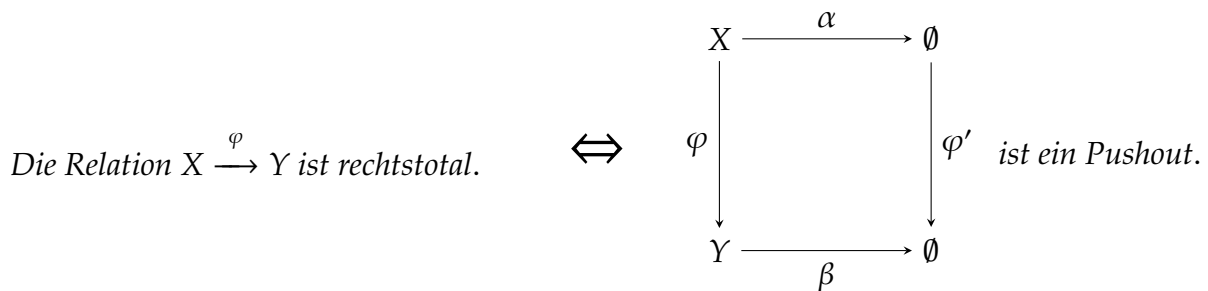
Bezüglich der Voraussetzungen linkstotal, rechtstotal, linkseindeutig und rechtseindeutig an die Relationen  $\alpha$  und  $\varphi$  sind mit Satz 44 und Satz 46 alle Fälle, in welchen eine Pushoutkonstruktion möglich ist abgedeckt. Mit Satz 37 sind alle Fälle, in welchen es ein Gegenbeispiel für die Existenz eines Pushouts gibt, abgedeckt. Die nachfolgende Tabelle bestätigt diese Aussage. Bei ihrer Erstellung wurde die Spiegelsymmetrie des Pushoutbegriffs berücksichtigt.

$\varphi \backslash \alpha$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue	Orange	Blue
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green	Red	Orange	Red	Green
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue	Green	Blue

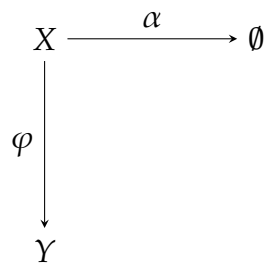
Legende:

- Es existiert ein Gegenbeispiel zur Existenz eines Pushouts; vgl. Satz 37 (1).
- Es existiert ein Gegenbeispiel zur Existenz eines Pushouts; vgl. Satz 37 (2).
- Es existiert stets eine Pushoutkonstruktion; vgl. Satz 44.
- Es existiert stets eine Pushoutkonstruktion; vgl. Satz 46.

**Bemerkung 52.** Sei  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  eine Relation. Wir betrachten die leeren Relationen  $X \xrightarrow{\alpha} \emptyset$ ,  $Y \xrightarrow{\beta} \emptyset$  und  $\emptyset \xrightarrow{\varphi'} \emptyset$ . Es ist  $\alpha$  rechtseindeutig, linkseindeutig und rechtstotal. Ob  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  rechtstotal ist, kann wie folgt charakterisiert werden.



*Beweis.* Da  $\alpha$  rechtseindeutig und linkseindeutig ist, lässt sich nach Satz 44 ein Pushout zu



konstruieren. Die Konstruktion erfolgt dabei wie folgt:

Sei  $X' := \emptyset$ . Wir definieren  $A := Y \setminus X\varphi \subseteq Y$  und  $B := X' \setminus X\alpha \subseteq X'$ . Die Menge  $Y'$  wird wie folgt definiert:

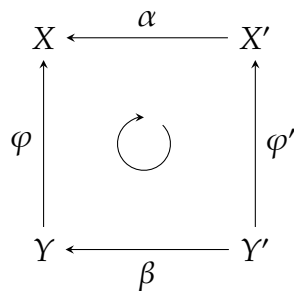
$$\begin{aligned} Y'_1 &:= (\alpha X')\varphi \setminus (X \setminus \alpha X')\varphi \\ Y' &:= Y'_1 \uplus (A \uplus B) \end{aligned}$$

Da  $X' = \emptyset$ , ist  $B = \emptyset$ . Ferner ist deswegen  $\alpha X' = \emptyset$  und damit  $Y'_1 = \emptyset$ . Somit ist  $Y' = \emptyset \uplus (A \uplus \emptyset)$ . Es ist  $Y' = \emptyset$  genau dann, wenn  $A = \emptyset$  ist, das heißt, wenn  $X\varphi = Y$  und damit  $\varphi$  rechtstotal ist.  $\square$

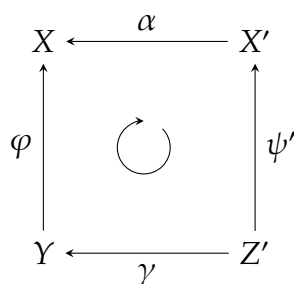


## 6 Pullback - Definition und Konstruktionen

**Definition 53.** Ein kommutatives Viereck der Form



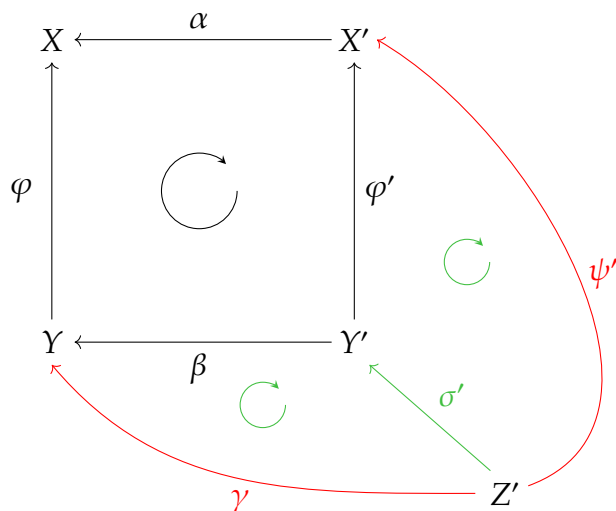
heißt *Pullback*, falls es für jedes kommutative Viereck



genau eine Relation  $\sigma': Z' \rightarrow Y'$  gibt mit

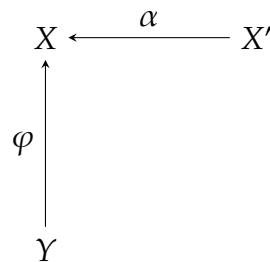
$$\sigma' \triangle \beta = \gamma \text{ und } \sigma' \triangle \varphi' = \psi'.$$

Es ergibt sich damit folgendes Diagramm:

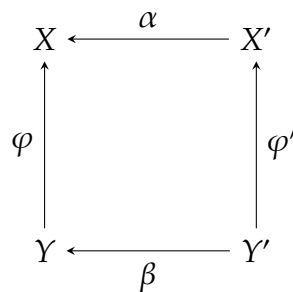


**Bemerkung 54.** Indem die Relationen durch ihre dualen Relationen ersetzt werden, wird aus einem Pushout ein Pullback erhalten und umgekehrt.

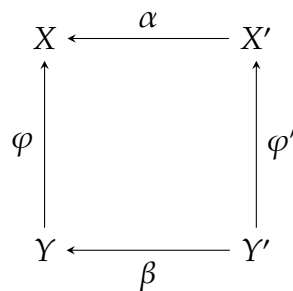
**Satz 55.** Sei folgendes Diagramm aus Mengen und Relationen gegeben.



(1) Falls  $\alpha$  linkseindeutig und rechtseindeutig ist, dann existiert eine Vervollständigung zu einem Pullback.



(2) Falls  $\alpha$  und  $\varphi$  linkseindeutig sind, dann existiert eine Vervollständigung zu einem Pullback.



(3) Es gibt ein solches Diagramm mit  $\alpha$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig, welches keine Vervollständigung zu einem Pullback besitzt.

(4) Es gibt ein solches Diagramm mit  $\alpha$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig und  $\varphi$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig, welches keine Vervollständigung zu einem Pullback besitzt.

*Beweis.*

Zu (1). Wir betrachten das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha^{\text{op}}} & X' \\ \downarrow \varphi^{\text{op}} & & \\ Y & & \end{array}$$

Es ist  $\alpha^{\text{op}}$  linkseindeutig und rechtseindeutig; vgl. Lemma 10 (1, 2). Wir können also einen Pushout der folgenden Form wählen.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha^{\text{op}}} & X' \\ \downarrow \varphi^{\text{op}} & & \downarrow \tilde{\varphi}' \\ Y & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & Y' \end{array}$$

Dualisieren ergibt nach Bemerkung 54 den folgenden Pullback.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\alpha} & X' \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \tilde{\varphi}'^{\text{op}} \\ Y & \xleftarrow{\tilde{\beta}^{\text{op}}} & Y' \end{array}$$

Wir können dann  $\beta := \tilde{\beta}^{\text{op}}$  und  $\varphi' := \tilde{\varphi}'^{\text{op}}$  wählen.

Zu (2). Wir betrachten das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha^{\text{op}}} & X' \\ \downarrow \varphi^{\text{op}} & & \\ Y & & \end{array}$$

Es sind  $\alpha^{\text{op}}$  und  $\varphi^{\text{op}}$  rechtseindeutig; vgl. Lemma 10 (2). Wir können also einen Pushout der folgenden Form wählen.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha^{\text{op}}} & X' \\ \downarrow \varphi^{\text{op}} & & \downarrow \tilde{\varphi}' \\ Y & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & Y' \end{array}$$

Dualisieren ergibt nach Bemerkung 54 den folgenden Pullback.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\alpha} & X' \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \tilde{\varphi}'^{\text{op}} \\ Y & \xleftarrow{\tilde{\beta}^{\text{op}}} & Y' \end{array}$$

Wir können dann  $\beta := \tilde{\beta}^{\text{op}}$  und  $\varphi' := \tilde{\varphi}'^{\text{op}}$  wählen.

Zu (3). Dies folgt durch Dualisieren aus Satz 37 (1).

Zu (4). Dies folgt durch Dualisieren aus Satz 37 (2). □

## 7 Der Graph einer Relation

Seien  $X, Y$  Mengen und  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  eine Relation.

**Definition 56.** Wir definieren die Menge

$$\Gamma_\alpha := \alpha = \{(x, y) : (x, y) \in \alpha\}$$

als den *Graph von  $\alpha$* . Es ist  $\Gamma_\alpha$  ein Objekt in der Kategorie der Relationen.

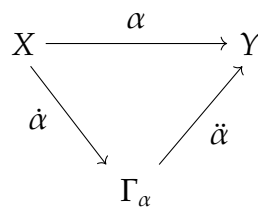
Das Symbol  $\Gamma_\alpha$  steht somit für diese Menge als Objekt und das Symbol  $\alpha$  für diese Menge als Relation.

**Definition 57.** Sei  $X \xrightarrow{\alpha} Y$  eine Relation und  $\Gamma_\alpha$  der Graph von  $\alpha$ . Wir haben die Relationen

$$\dot{\alpha} := \{(x, (x, y)) : (x, y) \in \alpha\} \subseteq X \times \Gamma_\alpha$$

$$\ddot{\alpha} := \{((x, y), y) : (x, y) \in \alpha\} \subseteq \Gamma_\alpha \times Y$$

Die Relation  $\dot{\alpha}$  heißt der *erste Faktor* von  $\alpha$ . Es ist  $\dot{\alpha}$  rechtstotal und linkseindeutig. Die Relation  $\ddot{\alpha}$  heißt der *zweite Faktor* von  $\alpha$ . Es ist  $\ddot{\alpha}$  linkstotal und rechtseindeutig.



**Satz 58.** Es gilt  $\dot{\alpha} \blacktriangle \ddot{\alpha} = \alpha$ . Wir haben also eine Faktorisierung von  $\alpha$  in seinen ersten Faktor  $\dot{\alpha}$  und seinen zweiten Faktor  $\ddot{\alpha}$ , genannt Faktorisierung von  $\alpha$  über seinen Graphen.

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass  $\dot{\alpha} \blacktriangle \ddot{\alpha} \stackrel{!}{=} \alpha$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(x, y) \in \dot{\alpha} \blacktriangle \ddot{\alpha}$ . Dann können wir ein  $(u, v) \in \Gamma_\alpha$  wählen mit  $(x, (u, v)) \in \dot{\alpha}$  und  $((u, v), y) \in \ddot{\alpha}$ . Aus Ersterem folgt nach Definition, dass  $u = x$  ist, und aus Letzterem, dass  $v = y$  ist. Damit ist  $(x, y) = (u, v) \in \Gamma_\alpha = \alpha$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(x, y) \in \alpha$ . Nach Konstruktion von  $\dot{\alpha}$  und  $\ddot{\alpha}$  ist dann  $(x, (x, y)) \in \dot{\alpha}$  und  $((x, y), y) \in \ddot{\alpha}$ . Insgesamt gilt somit  $(x, y) \in \dot{\alpha} \blacktriangle \ddot{\alpha}$ . □

**Beispiel 59.** Seien  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Wir betrachten die Relation  $\alpha = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3), (4, 4)\} \subseteq X \times Y$ .

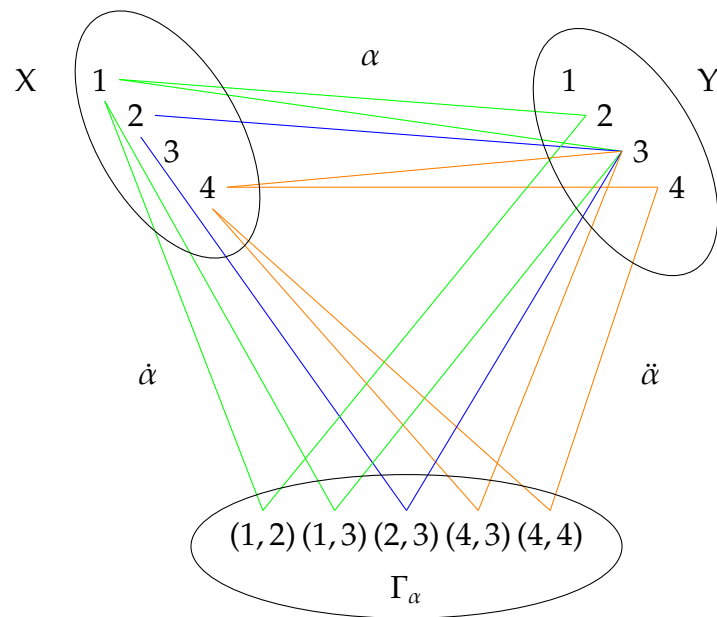
Die Relation

$$\dot{\alpha} = \{(1, (1, 2)), (1, (1, 3)), (2, (2, 3)), (4, (4, 3)), (4, (4, 4))\}$$

ist dann der erste Faktor und die Relation

$$\ddot{\alpha} = \{((1, 2), 2), ((1, 3), 3), ((2, 3), 3), ((4, 3), 3), ((4, 4), 4)\}$$

ist der zweite Faktor. Es ergibt sich folgendes Schaubild:

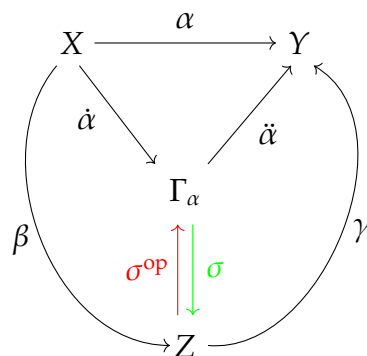


Anhand der Farben ist auch die Kommutativität des Dreiecks erkennbar: Es gilt  $\alpha = \dot{\alpha} \blacktriangle \ddot{\alpha}$ . Ferner erkennen wir:  $\dot{\alpha}$  ist rechtstotal und linkseindeutig und  $\ddot{\alpha}$  ist linkstotal und rechtseindeutig.

**Satz 60.** Wir betrachten die Faktorisierung von  $\alpha$  über seinen Graphen,  $\alpha = \dot{\alpha} \blacktriangle \ddot{\alpha}$ . Des Weiteren sei  $Z$  eine Menge und es seien Relationen  $X \xrightarrow{\beta} Z, Z \xrightarrow{\gamma} Y$  mit  $\beta \blacktriangle \gamma = \alpha$  gegeben. Die Relation  $\beta$  sei zudem rechtstotal und linkseindeutig, und die Relation  $\gamma$  sei linkstotal und rechtseindeutig. Es gibt dann genau eine Relation  $\Gamma_\alpha \xrightarrow{\sigma} Z$  mit

- (1)  $\dot{\alpha} \blacktriangle \sigma = \beta$
- (2)  $\sigma \blacktriangle \gamma = \ddot{\alpha}$
- (3)  $\beta \blacktriangle \sigma^{\text{op}} = \dot{\alpha}$
- (4)  $\sigma^{\text{op}} \blacktriangle \ddot{\alpha} = \gamma$

Es ergibt sich folgendes Diagramm:



*Beweis.* Gezeigt werden muss die Existenz und Eindeutigkeit von  $\sigma$ .

Zur Existenz von  $\sigma$ .

Sei

$$\sigma := \{((x, y), z) : (x, y) \in \Gamma_\alpha \text{ und } z \in Z \text{ mit } (x, z) \in \beta, (z, y) \in \gamma\} \subseteq \Gamma_\alpha \times Z.$$

(1) Zu zeigen ist, dass  $\dot{\alpha} \blacktriangle \sigma \stackrel{!}{=} \beta$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(x, z) \in \dot{\alpha} \blacktriangle \sigma$ . Dann können wir ein  $(u, v) \in \Gamma_\alpha$  wählen mit  $(x, (u, v)) \in \dot{\alpha}$  und  $((u, v), z) \in \sigma$ . Aus Ersterem folgt, dass  $x = u$  ist. Aus Letzterem folgt, dass  $(u, z) \in \beta$  ist. Insgesamt folgt somit  $(x, z) = (u, z) \in \beta$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(x, z) \in \beta$ . Da  $\gamma$  linkstotal ist, können wir für dieses  $z \in Z$  ein  $y \in Y$  so wählen, dass  $(z, y) \in \gamma$  gilt. Es ist  $(x, y) \in \beta \blacktriangle \gamma = \alpha$ . Damit ist  $((x, y), z) \in \sigma$ . Ferner ist  $(x, (x, y)) \in \dot{\alpha}$ . Insgesamt ist somit  $(x, z) \in \dot{\alpha} \blacktriangle \sigma$ .

(2) Zu zeigen ist, dass  $\sigma \blacktriangle \gamma \stackrel{!}{=} \ddot{\alpha}$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $((x, y), \tilde{y}) \in \sigma \blacktriangle \gamma$ . Wir können ein  $z \in Z$  wählen mit  $((x, y), z) \in \sigma$  und  $(z, \tilde{y}) \in \gamma$ . Aus  $((x, y), z) \in \sigma$  folgt, dass  $(x, y) \in \alpha$ ,  $(x, z) \in \beta$  und  $(z, y) \in \gamma$  ist. Da  $\gamma$  rechtseindeutig ist und sowohl  $(z, y) \in \gamma$  als auch  $(z, \tilde{y}) \in \gamma$  gilt, ist  $y = \tilde{y}$ . Aus der Definition von  $\ddot{\alpha}$  wissen wir, dass  $((x, y), y) \in \ddot{\alpha}$  ist. Somit folgt  $((x, y), \tilde{y}) = ((x, y), y) \in \ddot{\alpha}$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $((x, y), y) \in \ddot{\alpha}$ . Nach der Definition von  $\ddot{\alpha}$  ist dann  $(x, y) \in \alpha$ . Es ist nun  $(x, y) \in \alpha = \beta \blacktriangle \gamma$ . Somit können wir ein  $z \in Z$  wählen mit  $(x, z) \in \beta$  und  $(z, y) \in \gamma$ . Damit ist dann  $((x, y), z) \in \sigma$ . Da  $((x, y), z) \in \sigma$  und  $(z, y) \in \gamma$  ist, folgt  $((x, y), y) \in \sigma \blacktriangle \gamma$ .

(3) Zu zeigen ist, dass  $\beta \blacktriangle \sigma^{\text{op}} \stackrel{!}{=} \dot{\alpha}$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(\tilde{x}, (x, y)) \in \beta \blacktriangle \sigma^{\text{op}}$ . Dann können wir ein  $z \in Z$  wählen mit  $(\tilde{x}, z) \in \beta$  und  $(z, (x, y)) \in \sigma^{\text{op}}$ . Da  $(z, (x, y)) \in \sigma^{\text{op}}$  ist, gilt  $(x, y) \in \alpha$ ,  $(x, z) \in \beta$  und  $(z, y) \in \gamma$ . Da  $\beta$  linkseindeutig ist und sowohl  $(\tilde{x}, z) \in \beta$  als auch  $(x, z) \in \beta$  ist, folgt  $x = \tilde{x}$ . Nach der Definition von  $\dot{\alpha}$  ist  $(x, (x, y)) \in \dot{\alpha}$  und damit  $(\tilde{x}, (x, y)) = (x, (x, y)) \in \dot{\alpha}$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(x, (x, y)) \in \dot{\alpha}$ . Nach der Definition von  $\dot{\alpha}$  ist dann  $(x, y) \in \alpha$ . Es gilt  $(x, y) \in \alpha = \beta \blacktriangle \gamma$ . Wir können also ein  $z \in Z$  wählen mit  $(x, z) \in \beta$  und  $(z, y) \in \gamma$ . Hieraus folgt, dass  $(z, (x, y)) \in \sigma^{\text{op}}$  ist. Da nun  $(x, z) \in \beta$  und  $(z, (x, y)) \in \sigma^{\text{op}}$  ist, ergibt sich insgesamt, dass  $(x, (x, y)) \in \beta \blacktriangle \sigma^{\text{op}}$  ist.

(4) Zu zeigen ist, dass  $\sigma^{\text{op}} \blacktriangle \ddot{\alpha} \stackrel{!}{=} \gamma$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(z, y) \in \sigma^{\text{op}} \blacktriangle \ddot{\alpha}$ . Dann können wir ein  $(u, v) \in \Gamma_\alpha$  wählen mit  $(z, (u, v)) \in \sigma^{\text{op}}$  und  $((u, v), y) \in \ddot{\alpha}$ . Aus  $(z, (u, v)) \in \sigma^{\text{op}}$  folgt, dass  $(u, z) \in \beta$  und  $(z, v) \in \gamma$  ist. Aus  $((u, v), y) \in \ddot{\alpha}$  folgt, dass  $v = y$  ist. Somit ergibt sich insgesamt, dass  $(z, y) = (z, v) \in \gamma$  ist.

Zu  $\supseteq$ : Sei  $(z, y) \in \gamma$ . Da  $\beta$  rechtstotal ist, können wir zu  $z \in Z$  ein  $u \in X$  wählen mit  $(u, z) \in \beta$ . Da  $(u, z) \in \beta$  und  $(z, y) \in \gamma$ , ist  $(u, y) \in \beta \blacktriangle \gamma = \alpha$ . Mit  $(u, y) \in \alpha$  folgt, dass  $((u, y), y) \in \ddot{\alpha}$  gilt. Da  $(u, y) \in \alpha$ ,  $(u, z) \in \beta$  und  $(z, y) \in \gamma$  ist, folgt, dass  $(z, (u, y)) \in \sigma^{\text{op}}$  ist. Wegen  $(z, (u, y)) \in \sigma^{\text{op}}$  und  $((u, y), y) \in \ddot{\alpha}$  ist  $(z, y) \in \sigma^{\text{op}} \blacktriangle \ddot{\alpha}$ .

Zur Eindeutigkeit von  $\sigma$ .

Wir betrachten die im Existenzbeweis konstruierte Relation  $\Gamma_\alpha \xrightarrow{\sigma} Z$ .

Sei  $\Gamma_\alpha \xrightarrow{\tilde{\sigma}} Z$  eine Relation mit

- (1)  $\dot{\alpha} \blacktriangle \tilde{\sigma} = \beta$
- (2)  $\tilde{\sigma} \blacktriangle \gamma = \ddot{\alpha}$
- (3)  $\beta \blacktriangle \tilde{\sigma}^{\text{op}} = \dot{\alpha}$
- (4)  $\tilde{\sigma}^{\text{op}} \blacktriangle \ddot{\alpha} = \gamma$

Zu zeigen ist dann, dass  $\tilde{\sigma} \stackrel{!}{=} \sigma$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $((x, y), z) \in \tilde{\sigma}$ . Es ist  $(x, y) \in \Gamma_\alpha$ . Da  $\gamma$  linkstotal ist, können wir ein  $\tilde{y} \in Y$  wählen mit  $(z, \tilde{y}) \in \gamma$ . Damit ist  $((x, y), \tilde{y}) \in \tilde{\sigma} \blacktriangle \gamma \stackrel{(2)}{=} \ddot{\alpha}$ . Aus der Definition von  $\ddot{\alpha}$  folgt, dass  $y = \tilde{y}$  ist. Damit ist  $(z, y) = (z, \tilde{y}) \in \gamma$ . Da  $\beta$  rechtstotal ist, können wir ein  $\tilde{x} \in X$  wählen mit  $(\tilde{x}, z) \in \beta$ . Da  $(\tilde{x}, z) \in \beta$  und  $(z, (x, y)) \in \tilde{\sigma}^{\text{op}}$  ist, folgt, dass  $(\tilde{x}, (x, y)) \in \beta \blacktriangle \tilde{\sigma}^{\text{op}} \stackrel{(3)}{=} \dot{\alpha}$  ist. Aus der Definition von  $\dot{\alpha}$  folgt dann, dass  $x = \tilde{x}$  ist. Somit ergibt sich  $(x, z) = (\tilde{x}, z) \in \beta$ . Wegen  $(x, y) \in \Gamma_\alpha$ ,  $(x, z) \in \beta$  und  $(z, y) \in \gamma$  folgt, dass  $((x, y), z) \in \sigma$  ist.

Zu  $\supseteq$ : Sei  $((x, y), z) \in \sigma$ . Wir wissen dann, dass  $(x, z) \in \beta$ ,  $(z, y) \in \gamma$  und  $(x, y) \in \alpha$  gilt. Wegen  $(x, z) \in \beta \stackrel{(1)}{=} \dot{\alpha} \blacktriangle \tilde{\sigma}$  können wir ein  $(u, v) \in \Gamma_\alpha$  wählen mit  $(x, (u, v)) \in \dot{\alpha}$  und  $((u, v), z) \in \tilde{\sigma}$ . Aus  $(x, (u, v)) \in \dot{\alpha}$  folgt, dass  $x = u$  ist. Somit ist  $((x, v), z) = ((u, v), z) \in \tilde{\sigma}$ . Es ist  $((x, v), z) \in \tilde{\sigma}$  und  $(z, y) \in \gamma$  und damit  $((x, v), y) \in \tilde{\sigma} \blacktriangle \gamma \stackrel{(2)}{=} \ddot{\alpha}$ . Aus der Definition von  $\ddot{\alpha}$  folgt dann, dass  $v = y$  ist. Insgesamt ist hiermit dann  $((x, y), z) = ((x, v), z) \in \tilde{\sigma}$ .  $\square$

**Bemerkung 61.** Für den Beweis der Eindeutigkeit in Satz 60 wurden nur die ersten drei der folgenden vier Voraussetzungen an die Relation  $\sigma$  benötigt:

- (1)  $\dot{\alpha} \blacktriangle \sigma = \beta$
- (2)  $\sigma \blacktriangle \gamma = \ddot{\alpha}$
- (3)  $\beta \blacktriangle \sigma^{\text{op}} = \dot{\alpha}$
- (4)  $\sigma^{\text{op}} \blacktriangle \ddot{\alpha} = \gamma$

Somit ist die Voraussetzung (4) redundant. Aus Symmetriegründen wurden jedoch alle vier Voraussetzungen gefordert.

**Bemerkung 62.** Sei  $U \xrightarrow{\psi} V$  eine Relation. Die Relation  $\psi$  ist genau dann rechtseindeutig und rechtstotal, wenn  $\psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi = \text{id}_V$  gilt.

*Beweis.* Zu " $\Rightarrow$ ": Sei  $\psi$  rechtseindeutig und rechtstotal. Zu zeigen ist, dass dann für  $U \xrightarrow{\psi} V$  die Gleichung  $\psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi \stackrel{!}{=} \text{id}_V$  gilt.

Zu  $\subseteq$ : Sei  $(v, \tilde{v}) \in \psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi$ . Dann können wir ein  $u \in U$  wählen mit  $(v, u) \in \psi^{\text{op}}$  und  $(u, \tilde{v}) \in \psi$ . Damit ist  $(u, v) \in \psi$  und  $(u, \tilde{v}) \in \psi$ . Da  $\psi$  rechtseindeutig ist, folgt  $v = \tilde{v}$ .



Es ist also  $(v, \tilde{v}) = (v, v) \in \text{id}_V$ .

Zu  $\supseteq$ : Sei  $v \in V$ . Es ist  $(v, v) \in \text{id}_V$ . Zu zeigen ist, dass  $(v, v) \stackrel{!}{\in} \psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi$  ist. Da  $\psi$  rechtstotal ist, können wir ein  $u \in U$  wählen mit  $(u, v) \in \psi$ . Es ist dann  $(v, u) \in \psi^{\text{op}}$ . Insgesamt gilt dann  $(v, v) \in \psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi$ .

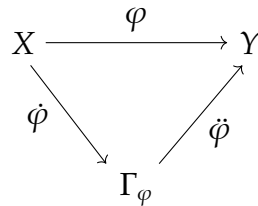
Zu  $\Leftarrow$ : Sei  $\psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi = \text{id}_V$ .

Zu  $\psi$  rechtstotal: Sei  $v \in V$ . Zu zeigen ist dann, dass  $v \stackrel{!}{\in} U\psi$  gilt. Es ist  $(v, v) \in \text{id}_V = \psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi$ . Wir können dann ein  $u \in U$  wählen mit  $(v, u) \in \psi^{\text{op}}$  und  $(u, v) \in \psi$ . Aus Letzterem folgt, dass  $v \in U\psi$  ist.

Zu  $\psi$  rechtseindeutig: Sei  $u \in U$  und seien  $v, \tilde{v} \in V$  mit  $(u, v), (u, \tilde{v}) \in \psi$ . Zu zeigen ist dann, dass  $v \stackrel{!}{=} \tilde{v}$  gilt. Es ist  $(v, u) \in \psi^{\text{op}}$  und  $(u, \tilde{v}) \in \psi$ . Damit ist  $(v, \tilde{v}) \in \psi^{\text{op}} \blacktriangle \psi = \text{id}_V$ . Somit gilt  $v = \tilde{v}$ .

□

**Bemerkung 63.** Sei  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  eine Relation. Wir betrachten die Faktorisierung von  $\varphi$  über seinen Graphen  $\Gamma_\varphi$  mit dem ersten Faktor  $\dot{\varphi}$  und dem zweiten Faktor  $\check{\varphi}$ ; vgl. Definition 57.



Es gilt: Die Relation  $\varphi$  ist genau dann rechtseindeutig, wenn  $\dot{\varphi}$  rechtseindeutig und rechtstotal ist.

Mit Bemerkung 62 ergibt sich folgende Charakterisierung für die Rechtseindeutigkeit der Relation  $X \xrightarrow{\varphi} Y$ :

$$\varphi \text{ ist rechtseindeutig} \Leftrightarrow \dot{\varphi}^{\text{op}} \blacktriangle \dot{\varphi} = \text{id}_{\Gamma_\varphi}$$

*Beweis.* Es gilt nach Definition, dass  $\dot{\varphi} = \{(x, (x, y)) : (x, y) \in \varphi\} \subseteq X \times \Gamma_\varphi$  ist.

Zu  $\Rightarrow$ : Die Relation  $\dot{\varphi}$  ist nach Konstruktion rechtstotal. Es bleibt zu zeigen, dass  $\dot{\varphi}$  rechtseindeutig ist. Seien  $(x, (x, y)), (x, (x, \tilde{y})) \in \dot{\varphi}$ . Es ist zu zeigen, dass dann  $(x, y) \stackrel{!}{=} (x, \tilde{y})$  ist. Nach Definition von  $\dot{\varphi}$  sind  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in \varphi$ . Da  $\varphi$  rechtseindeutig ist, ist  $y = \tilde{y}$  und damit  $(x, y) = (x, \tilde{y})$ .

Zu  $\Leftarrow$ : Seien  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in \varphi$ . Zu zeigen ist, dass  $y \stackrel{!}{=} \tilde{y}$  gilt. Es sind  $(x, (x, y)), (x, (x, \tilde{y})) \in \dot{\varphi}$ . Da  $\dot{\varphi}$  rechtseindeutig ist, ist  $(x, y) = (x, \tilde{y})$  und damit  $y = \tilde{y}$ . □

## Literatur

- [1] Bosma, W., Cannon, J. & Playoust, C. (1997). *The Magma algebra system. I. The user language*. Journal of Symbolic Computation, 24, 235–265.
- [2] Knauer, U. & Knauer, K. (2015). *Diskrete und algebraische Strukturen: kurz gefasst* (2nd ed.). Springer.
- [3] Freyd, J. P. & Scedrov, A. (1990). *Categories, Allegories*. North Holland.
- [4] Mitchell, B. (1965). *Theory of categories*. Academic Press.
- [5] Adámek, J., Herrlich, H. & Strecker, G. E. (2004). *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*.
- [6] nLab (Hrsg.) (2024). *Rel*. Verfügbar unter <https://ncatlab.org/nlab/show/Rel> [abgerufen am 10.06.2024].

## **Danksagungen**

Ich bedanke mich bei Matthias Künzer für die Möglichkeit, die Masterarbeit bei ihm schreiben zu können, und für die Anpassung des Themas der Masterarbeit an meine Interessen. Auch möchte ich mich bei ihm für die Unterstützung und die vielen gemeinsamen Überlegungen und Diskussionen bedanken.

## 8 Anhang

**Anhang 1.** Mengen werden in Magma mit Mengenklammern definiert. Beispielsweise könnte folgendes gewählt werden:

```
M := {1,2,3};  
N := {1,2,3,4};
```

Der folgende Code gibt in Magma alle Relationen  $\alpha \subseteq M \times N$  aus:

```
AllRelations := function(M,N);  
  C := {<m,n> : m in M, n in N};  
  F := Subsets(C);  
  U := SetToSequence(F);  
  Relations := [];  
  for number in [1..#Subsets(C)] do  
    Relations:= Append(Relations,<M,U[number],N>);  
  end for;  
  return Relations;  
end function;
```

Die Funktion kann wie folgt aufgerufen werden:

```
AllRelations(M,N);
```

**Anhang 2.** Relationen werden in Magma wie folgt angegeben:

```
alpha := <{1},{<1,1>,<1,2>},{1,2}>;  
beta := <{1,2},{<1,2>,<2,1>,<2,3>},{1,2,3}>;
```

Der erste Eintrag des Tupels, bei  $\alpha$  die Menge  $\{1\}$ , steht für die Startmenge der Relation. Der zweite Eintrag des Tupels, bei  $\alpha$  die Menge  $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ , gibt die Elemente der Relation an. Der dritte Eintrag des Tupels, bei  $\alpha$  die Menge  $\{1, 2\}$ , steht für die Zielmenge der Relation.

**Anhang 3.** Der folgende Magma-Code gibt das Kompositum zweier Relationen aus. Die beiden Relationen werden der Funktion übergeben.

```
compose := function(alpha, beta) // Zielmenge von alpha soll gleich der  
                                // Startmenge von beta sein  
  if alpha[3] ne beta[1] then
```

```

    return "error";
end if;
M := alpha[1];
N := alpha[3]; // = beta[1];
P := beta[3];
alpha_rel := alpha[2];
beta_rel := beta[2];
gamma_rel := {<m,p> : m in M, p in P | #{n : n in N | <m,n> in alpha_rel
and <n,p> in beta_rel} ne 0};
return <M,gamma_rel,P>;
end function;

```

Die Funktion kann wie folgt aufgerufen werden:

```
compose(alpha,beta);
```

**Anhang 4.** Es seien zwei Relationen  $\alpha \subseteq X \times X'$  und  $\varphi \subseteq X \times Y$  mit gleicher Startmenge gegeben. Werden zusätzlich die Menge  $Z$  sowie Relationen  $\gamma \subseteq Y \times Z$  und  $\psi \subseteq Y \times Z$  gegeben, so bilden diese mit den Mengen  $X, X', Y$  und den Relationen  $\alpha, \varphi$  ein Viereck. Mithilfe des folgenden Codes kann in Magma für gegebene Relationen  $\alpha$  und  $\varphi$  sowie eine Menge  $Z$ , die Menge aller Relationen  $\psi, \gamma$  ausgegeben werden, unter welchen das gebildete Viereck kommutiert.

```

KV := function(alpha,phi,Z) // alpha und phi sollten dieselbe Startmenge haben
  X := alpha[1]; // es sollte auch X = phi[1] sein
  XS := alpha[3];
  Y := phi[3];
  Rel_XS_Z := AllRelations(XS,Z);
  Rel_Y_Z := AllRelations(Y,Z);
  return {<psi,gamma> : psi in Rel_XS_Z, gamma in Rel_Y_Z |
  compose(alpha,psi) eq compose(phi,gamma)};
end function;

```

Die Anzahl der möglichen kommutativen Vervollständigungen kann wie folgt bestimmt werden, wobei alpha und phi als Relationen (vgl. Anhang 2) und Z als Menge (vgl. Anhang 1) zuvor definiert werden :

```
#KV(alpha,phi,Z);
```

Die beiden folgenden Beispiele dienen zum einen als Veranschaulichung zur Verwendung der KV-Funktion, repräsentieren aber auch ein Gegenbeispiel zur Konstruktion eines Pushouts.

**Anhang 4a.** Gegenbeispiel zur Existenz eines Pushouts im Falle, dass  $\alpha \subseteq X \times X'$  und  $\varphi \subseteq X \times Y$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig sind.

```
alpha := <{1,2}, {<1,3>, <2,1>, <2,2>}, {1,2,3}>;
phi := <{1,2}, {<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>}, {1,2,3,4}>;
Z := {1};
#KV(alpha, phi, Z);
```

Magma liefert für

```
#KV(alpha, phi, Z);
```

die Zahl 40.

**Anhang 4b.** Gegenbeispiel zur Existenz eines Pushouts im Falle, dass  $\alpha \subseteq X \times X'$  linkstotal, rechtstotal und rechtseindeutig ist und  $\varphi \subseteq X \times Y$  linkstotal, rechtstotal und linkseindeutig ist.

```
alpha := <{1,2,3}, {<1,1>, <2,1>, <3,2>}, {1,2}>;
phi := <{1,2,3}, {<1,1>, <1,2>, <2,3>, <2,4>, <3,5>}, {1,2,3,4,5}>;
Z := {1};
#KV(alpha, phi, Z);
```

Magma liefert für

```
#KV(alpha, phi, Z);
```

die Zahl 20.

**Anhang 5.** Mithilfe des folgenden Codes kann in Magma überprüft werden, ob eine betrachteten Zahl eine Zweierpotenz ist.

```
PowerOfTwo := function(z) // z: ganze Zahl >= 0
  if z eq 0 then
    return false;
  end if;
  fac := Factorisation(z);
  primes := {x[1] : x in fac};
  if #(primes diff {2}) ge 1 then
    return false;
  else
    return true;
  end if;
end function;
```



```

two_power := #KV(alpha,phi,{1});
if not PowerOfTwo(two_power) then
  print "Kein Pushout, da keine Potenz von 2.";
  return 0;
end if;
two_exp := Valuation(two_power,2);
Y := {j : j in [1..two_exp]}; // Pushout-Kandidaten haben hier Kard. |Y| = two_exp
candidate_pairs := KV(alpha,phi,Y);
for pair in candidate_pairs do
  alphap := pair[2]; // alpha prime, parallel zu alpha
  phip := pair[1]; // phi prime, parallel zu phi
  bijective := true;
  for z in [1..4] do
    // |Z| = 0 kann übersprungen werden, da hier der Test erfolgreich sein muss
    // Aufgrund der Rechenkapazität wird nur bis maximal |Z| = 4 getestet
    // Beim Vorliegen von besseren Rechenkapazitäten kann dieser Wert hier
    // angepasst werden
    Z := {j : j in [1..z]}; // Testmenge
    KV_akt := KV(alpha,phi,Z);
    mapping := {<delta,<compose(phip,delta),compose(alphap,delta)>> : delta
in AllRelations(Y,Z)}; // ist jedenfalls linkstotal und rechtseindeutig
    for x in KV_akt do
      if not #{t[1] : t in mapping | t[2] eq x} eq 1 then
        bijective := false;
        break z;
      end if;
    end for; // x
  end for; // z
  if bijective then // dann hat er jedenfalls den Pushout-Test für Z mit
    //|Z| <= 4 überstanden - das ist kein
    // vollständiger, sicherer Test !
    print "Vorgeschlagener Pushout-Kandidat:";
    return <alpha,phi,alphap,phip>; // der Pushout
  end if;
end for; // pair
print "Nach Suche festgestellt: Hier gibt es doch keinen Pushout, obwohl
der Zweier-Potenz-Test noch funktioniert hat.";
return 0;
end function;

```



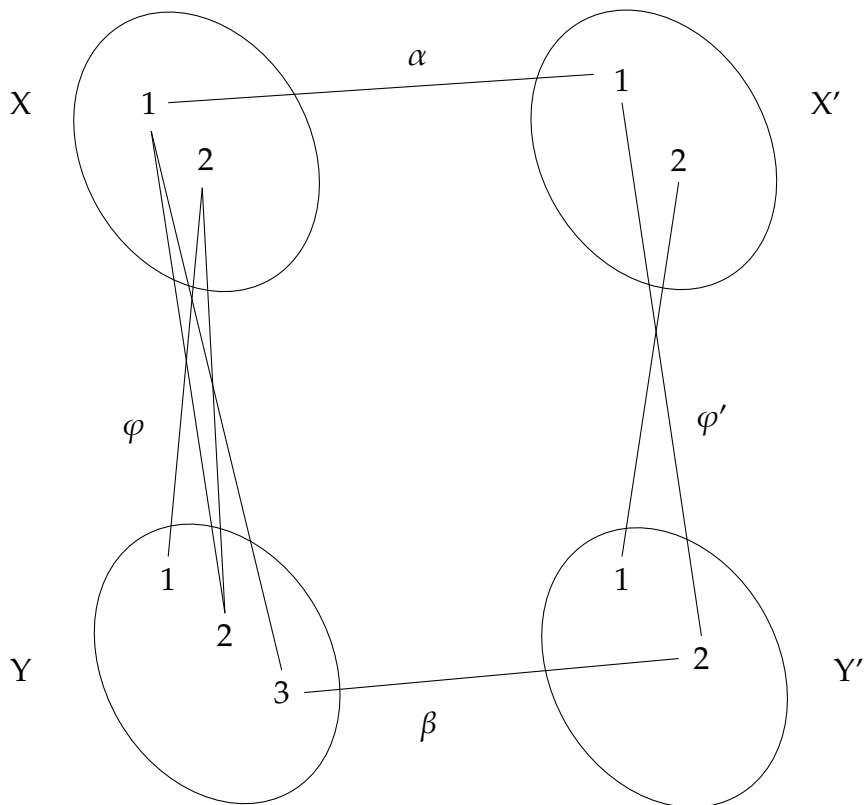
Im Folgenden ist eine Beispieleingabe aufgeführt:

```
phi := <{1,2},{<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>},{1,2,3}>;  
alpha := <{1,2},{<1,1>},{1,2}>;  
Pushout_bauen(alpha,phi);
```

Der Magma-Code gibt hierzu Folgendes aus:

Vorgeschlagener Pushout-Kandidat:

```
<<{ 1, 2 }, { <1, 1> }, { 1, 2 }>, <{ 1, 2 }, { <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <2, 2> },  
{ 1, 2, 3 }>, <{ 1, 2, 3 }, { <3, 2> }, { 1, 2 }>, <{ 1, 2 }, { <1, 2>, <2, 1> },  
{ 1, 2 }>>
```



# Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe, keine anderen Quellen als die angegebenen benutzt habe und alle wörtlichen oder sinngemäßen Aussagen aus anderen Werken als solche gekennzeichnet sind. Die vorliegende Arbeit ist weder vollständig noch in wesentlichen Teilen Gegenstand einer anderen Prüfungsleistung und wurde nicht bereits vollständig oder in Teilen veröffentlicht. Das elektronische Exemplar stimmt mit den anderen Exemplaren überein.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift