Liealgebren

Matthias Künzer

Universität Stuttgart

27. September 2024

Inhalt

Verzeichnis der Sätze

Vorwort

Eine Liealgebra ist der "Keim" einer Liegruppe. Liealgebren verhalten sich in mancher Hinsicht wie Gruppen, sind aber "lineare Objekte" und als solche den Methoden der Linearen Algebra zugänglich.

Hier sollen Liealgebren unabhängig von ihrem Zusammenhang mit Liegruppen behandelt werden. Insbesondere wird nur Lineare Algebra vorausgesetzt; davon e.g. die Hauptraumzerlegung für Endomorphismen.

Auf Übungen und Lösungen wird im Skript manchmal Bezug genommen, sie sind daher als Bestandteil des Skripts anzusehen.

Dieses Skript ist im Ergebnis eine etwas ausführlichere Version eines Teils des Buchs von J.E. Humphreys [4], erstellt unter Verwendung der Skripte von G. Hiss [3] und W. Soergel [8]. Dank geht an S. Thomas für das Erstellen von [3]. Konjugiertheit maximaler Tori wird nach G.A.A. Michael [7] behandelt, unter Verwendung der Ausarbeitung von M.C. Thompson [9]. Die Verantwortung für Fehler und Mißverständnisse im vorliegenden Skript trage ich natürlich selbst.

Für die Entstehungsgeschichte der Klassifikation der einfachen Liealgebren über $\mathbf{C}$ verweisen wir auf [**2**].

Dank geht an Andreas Bächle für zahlreiche Korrekturen und Verbesserungen. Dank geht an Daniela-Maria Cococeanu, Fabian Dyga, Vanda Eggert, Domenica Gusso, Fabian Hartkopf, Liviu-Lucian Ionesi, Tillmann Kleiner, Simon Paridon und Tobias Walter für Korrekturen und Verbesserungen.

Für weitere Hinweise auf Fehler und Unklarheiten bin ich dankbar.

Stuttgart, Sommer 2010, ergänzt im Sommer 2014

Matthias Künzer

Konventionen.

- Werden in einer Aussage mehrere Teilaussagen kommentarlos aufgelistet, so wird die Gültigkeit jeder Teilaussage behauptet.
- Ist X eine Menge, so stehe "für $x \in X$" kurz für "für alle $x \in X$".
- Ist X eine Menge, so bedeute $Y \subset X$, daß $Y \subseteq X$ und $Y \neq X$.
- Ist X eine endliche Menge, so bezeichne $|X|$ die Anzahl ihrer Elemente.
- Sei $(X, \leqslant)$ ein Poset, i.e. eine teilgeordnete Menge. Es heißt $x \in X$ *minimal*, falls es kein $y \in X$ mit $y < x$ gibt. Es heißt $x \in X$ *initial*, falls $x \leqslant z$ für alle $z \in X$ gilt. Es heißt $x \in X$ *maximal*, falls es kein $y \in X$ mit $x < y$ gibt. Es heißt $x \in X$ *terminal*, falls $z \leqslant x$ für alle $z \in X$ gilt.
- Sind $f : X \longrightarrow X'$ und $g := Y \longrightarrow Y'$ Abbildungen, so sei $f \times g : X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$, $(x, y) \longmapsto (f(x), g(y))$.
- Wir schreiben Abbildungen links. I.e. ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung und $x \in X$, so bezeichnet $f(x)$ oder fx das Bild von x unter f.
- Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Sei $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ und $f(X') \subseteq Y'$. Wir schreiben $f|_{X'}^{Y'} : X' \longrightarrow Y'$, $x' \longmapsto f(x')$ für die Einschränkung. Ist $Y' = Y$, so schreiben wir auch $f|_{X'} := f|_{X'}^{Y}$. Ist $X' = X$, so schreiben wir auch $f|^{Y'} := f|_{X}^{Y'}$.
- Die identische Abbildung auf einer Menge X wird id_X, 1_X, oder, falls keine Verwechslungsgefahr besteht, id oder 1 geschrieben.
- Sind X und Y Teilmengen einer Menge, so bezeichnet $X \sqcup Y$ ihre Vereinigung, falls $X \cap Y = \emptyset$.
- Sind x, y Elemente einer Menge, so sei $\partial_{x,y} := 1$ falls $x = y$ und $\partial_{x,y} := 0$ falls $x \neq y$.
- Ist $a \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $\mathbf{Z}_{\geqslant a} := \{z \in \mathbf{Z} \,:\, z \geqslant a\}$, etc.
- Sind a, $b \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $[a, b] := \{z \in \mathbf{Z} \,:\, a \leqslant z \leqslant b\}$ für das ganzzahlige Intervall.
- Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ sei gleich 0 für $k \in \mathbf{Z} \smallsetminus [0, n]$.
- Ist R ein kommutativer Ring und sind a, b, $c \in R$, so bedeute $b \equiv_a c$, daß es ein $x \in R$ mit $ax = b - c$ gibt.
- Wird nichts Gegenteiliges spezifiziert, so liegt allen verwendeten Begriffen der Linearen Algebra etc. der eingangs eines Abschnittes oder einer Aufgabe erwähnte Körper zugrunde.
- Eigenschaften wie die Linearität einer Abbildung oder die Teilraumeigenschaft einer Teilmenge werden oft dem Leser zur Verifikation überlassen.
- Sei K ein Körper. Seien m, $n \geqslant 0$. Es bezeichnet $K^{m \times n}$ den Vektorraum der Matrizen der Form $m \times n$ mit Einträgen in K. Wir identifizieren $\mathrm{End}(K^{n \times 1})$ mit $K^{n \times n}$.
- In Matrizen steht $*$ für einen nicht näher bestimmten Eintrag, oder für mehrere solche. Ein leerer Eintrag steht hingegen für einen Eintrag 0.
- Sei K ein Körper. Sei $n \geqslant 0$. Seien $a_i \in K$ für $i \in [1, n]$.
  Schreibe $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$. Sei $\mathrm{E}_n := \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \in K^{n \times n}$.
  Für i, $j \in [1, n]$ bezeichne $\mathrm{e}_{i,j} \in K^{n \times n}$ die Matrix, die an Position (i, j) den Eintrag 1 hat, und ansonsten 0.
- Die Spur einer Matrix g wird $\mathrm{tr}(g)$ geschrieben (engl. trace). Genauso die Spur eines Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums.
- Die Transponierte einer Matrix g wird g^{t} geschrieben.

- Der Nullvektorraum wird $0 = \{0\}$ geschrieben.
- Ist V ein Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Teilmenge, so sei $\langle M \rangle \subseteq V$ das Teilraumerzeugnis von M.
- Ist V ein Vektorraum über einem Körper K und ist $\mu \in K$, so schreiben wir auch $\mu := \mu\, \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}\, V$.
- Ist V ein Vektorraum über einem Körper K, so bezeichnet V^* den Dualraum, bestehend aus den linearen Abbildungen von V nach K.
- Ist G eine Gruppe und $U \subseteq G$, so bedeute $U \leqslant G$, daß U eine Untergruppe von G ist, und $U \trianglelefteqslant G$, daß U ein Normalteiler von G ist.
- Ist G eine Gruppe und $M \subseteq G$ eine Teilmenge, so sei $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle$ das Untergruppenerzeugnis von M, i.e. $\langle\!\langle M \rangle\!\rangle := \{\, m_1^{\varepsilon_1} m_2^{\varepsilon_2} \cdots m_k^{\varepsilon_k} \,:\, k \geqslant 0,\, m_i \in M \text{ und } \varepsilon_i \in \{-1, +1\} \text{ für } i \in [1, k] \,\}$ [1].
- Die imaginäre Einheit in $\mathbf{C}$ wird mit i bezeichnet.
- Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Sei $x \in \mathrm{End}\, V$ und λ ein Eigenwert von x von algebraischer Vielfachheit α. Sei $\beta \geqslant \alpha$. Es bezeichnet $\mathrm{E}_x(\lambda) := \mathrm{Kern}(x - \lambda)$ den Eigenraum und $\mathrm{H}_x(\lambda) := \mathrm{Kern}\big((x-\lambda)^\alpha\big) = \mathrm{Kern}\big((x-\lambda)^\beta\big)$ den Hauptraum von x bezüglich λ. Ist λ kein Eigenwert von x, so setzen wir $\mathrm{E}_x(\lambda) = \mathrm{H}_x(\lambda) := 0$. Wir schreiben
$$\mathrm{H}_x(\neq 0) \quad := \bigoplus_{\substack{\lambda \in K \smallsetminus \{0\} \\ \lambda \text{ Eigenwert von } x}} \mathrm{H}_x(\lambda) \;=\; \bigoplus_{\lambda \in K \smallsetminus \{0\}} \mathrm{H}_x(\lambda)\,.$$
- Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra; cf. Definition 1.(3). Sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Es besagt $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$, daß $\mathfrak{h}$ eine Teilalgebra in $\mathfrak{g}$ ist, und $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$, daß $\mathfrak{h}$ eine solche ungleich $\mathfrak{g}$ ist; cf. Definition 4. Es besagt $\mathfrak{h} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$, daß $\mathfrak{h}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, und $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$, daß $\mathfrak{h}$ ein solches ungleich $\mathfrak{g}$ ist; cf. Definition 11.
- Sei E ein Vektorraum über $\mathbf{R}$. Sei $\lfloor -, = \rfloor \,:\, E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform. Für Teilmengen $X, Y \subseteq E$ schreiben wir $X \perp Y$, und sagen, X sei *orthogonal* zu Y, falls $\lfloor x, y \rfloor = 0$ für $x \in X$ und $y \in Y$. Wir schreiben auch $x \perp Y$ für $\{x\} \perp Y$, etc.

[1] Diese ansonsten ungebräuchliche Notation wird nur wegen der Verwechslungsgefahr mit dem Teilraumerzeugnis verwendet.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Algebren und Liealgebren

Sei K ein Körper.

Definition 1

(1) Eine *Algebra* (über K) besteht aus einem Vektorraum A (über K) und einer bilinearen Abbildung $A \times A \xrightarrow{(\cdot)} A$, $(a, b) \longmapsto a \cdot b = ab$, ihrer *Multiplikation.* Geschrieben wird sie häufig nur $A = (A, \cdot)$.

(2) Eine Algebra A heißt *assoziativ,* falls $(ab)c = a(bc)$ ist für $a,\ b,\ c \in A$.

(3) Eine Algebra A heißt *Liealgebra,* falls $aa = 0$ und $a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0$ ist für $a,\ b,\ c \in A$.

In der Regel werden Liealgebren mit kleinen Frakturbuchstaben ([2]) geschrieben. Sei also $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Ihre Multiplikation wird in der Regel $[g, h] := gh$ für $g,\ h \in \mathfrak{g}$ geschrieben, genannt *Lieklammer.* Mithin ist

$$\boxed{[g, g] \;=\; 0 \quad \text{und} \quad [g, [h, k]] + [h, [k, g]] + [k, [g, h]] \;=\; 0 \quad \text{für } g,\ h,\ k \in \mathfrak{g}\,.}$$

Zweitere Bedingung heißt *Jacobi-Identität.* Erstere hat

$$[g, h] \;=\; [g, h] + [g, g] + [h, g] + [h, h] - [h, g] \;=\; [g + h, g + h] - [h, g] \;=\; -[h, g]$$

für $g,\ h \in \mathfrak{g}$ zur Folge.

Es heißt $\mathfrak{g}$ *abelsch*, falls $[g, h] = 0$ ist für $g,\ h \in \mathfrak{g}$.

[2] resp. Sütterlin- oder Schreibschriftbuchstaben

Bemerkung 2 *Ist* $(A, \cdot)$ *eine assoziative Algebra, so ist* $(A, [-,=])$ *mit dem* Kommutator $[a,b] := ab - ba$ *für* $a,\, b \in A$ *eine Liealgebra.*

Beweis. Für $a,\, b,\, c \in A$ ist $[a,a] = aa - aa = 0$ und

$$\begin{array}{rl} & [a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] \\ = & (a(bc - cb) - (bc - cb)a) + (b(ca - ac) - (ca - ac)b) + (c(ab - ba) - (ab - ba)c) \\ = & abc - acb - bca + cba + bca - bac - cab + acb + cab - cba - abc + bac \\ = & 0\,. \end{array}$$

□

Beispiel 3

(1) Sei V ein Vektorraum. Sei $\mathfrak{gl}(V)$ die der assoziativen Algebra $\operatorname{End} V$ gemäß Bemerkung 2 zugeordnete Liealgebra (engl. general linear). Für lineare Abbildungen $g,\, h \in \mathfrak{gl}(V) = \operatorname{End} V$ ist also $[g,h] = g \circ h - h \circ g$.

Es ist e.g. $\mathfrak{gl}(K)$ eindimensional und abelsch.

(2) Sei $n \geqslant 0$. Sei $\mathfrak{gl}_n(K)$ die der assoziativen Algebra $K^{n\times n}$ gemäß Bemerkung 2 zugeordnete Liealgebra. Für Matrizen $g,\, h \in \mathfrak{gl}_n(K) = K^{n\times n}$ ist also $[g,h] = gh - hg$.

Definition 4 Sei A eine Algebra.

Ein Teilraum $B \subseteq A$ heißt *Teilalgebra,* falls $bb' \in B$ liegt für $b,\, b' \in B$; symbolisch $B \leqslant A$ geschrieben.

Diesenfalls ist $B = (B, (\cdot)|_{B\times B}^{B})$ wieder eine Algebra.

Ist A assoziativ, dann auch B. Ist A eine Liealgebra, dann auch B.

Beispiel 5

(1) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei

$$\mathfrak{sl}(V) \ := \ \{\, g \in \mathfrak{gl}(V) \,:\, \operatorname{tr}(g) = 0 \,\}$$

(engl. special linear). Sind $g,\, h \in \mathfrak{sl}(V)$ (oder auch nur in $\mathfrak{gl}(V)$), so ist $\operatorname{tr}([g,h]) = \operatorname{tr}(g \circ h) - \operatorname{tr}(h \circ g) = 0$ und also auch $[g,h] \in \mathfrak{sl}(V)$. Somit ist $\mathfrak{sl}(V) \leqslant \mathfrak{gl}(V)$.

(2) Sei $n \geqslant 0$. Wie in (1) ist $\mathfrak{sl}_n(K) := \{\, g \in \mathfrak{gl}_n(K) \,:\, \operatorname{tr}(g) = 0 \,\} \leqslant \mathfrak{gl}_n(K)$.

(3) Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Es ist $\langle g \rangle = \{\, \lambda g \,:\, \lambda \in K \,\} \leqslant \mathfrak{g}$ eine abelsche Teilalgebra.

Definition 6 Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Liealgebren. Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ eine lineare Abbildung. Es heißt φ ein *Morphismus* (von Liealgebren), falls $\varphi([g, g']) = [\varphi(g), \varphi(g')]$ ist für $g,\ g' \in \mathfrak{g}$.

Ist $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ ein Morphismus, dann ist $\varphi(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{h}$.

Es ist e.g. $\mathfrak{g} \xrightarrow{0} \mathfrak{h}$ ein Morphismus.

Ein bijektiver Morphismus heißt *Isomorphismus* (von Liealgebren); symbolisch $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$ geschrieben; cf. Aufgabe 1.(3). Gibt es einen Isomorphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$, so heißen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ *isomorph.* Isomorphe Liealgebren haben dieselben Eigenschaften.

Die Relation der Isomorphie von Liealgebren ist reflexiv (via Identität), symmetrisch (via Inverser) und transitiv (via Kompositums) auf der Menge der Liealgebren. Die diesbezüglichen Äquivalenzklassen heißen *Isoklassen.* Die Isoklasse von $\mathfrak{g}$ werde $[\mathfrak{g}]$ geschrieben.

Ein Isomorphismus (von Liealgebren) $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ heißt *Automorphismus* (der Liealgebra $\mathfrak{g}$).

Beispiel 7 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $n := \dim V$.

(1) Es ist $\operatorname{tr} : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}_1(K) = \mathfrak{gl}(K)$ ein Morphismus. Denn für $g,\ h \in \mathfrak{gl}(V)$ ist $\operatorname{tr}[g, h] = 0 = [\operatorname{tr} g, \operatorname{tr} h]$.

(2) Wähle in V eine Basis. Die Abbildung, die einem linearen Endomorphismus von V seine beschreibende Matrix bezüglich unserer Basis zuordnet, ist ein Isomorphismus $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}_n(K)$ von Liealgebren, der zu einem Isomorphismus $\mathfrak{sl}(V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_n(K)$ von Liealgebren einschränkt.

Dazu habe der lineare Isomorphismus $\beta : K^n \xrightarrow{\sim} V$ die gewählten Basiselemente als Bilder der Standardbasisvektoren.

Wir haben die bijektiven linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{gl}_n(K) & \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\to}} & \mathfrak{gl}(K^n) & \overset{\psi}{\underset{\sim}{\to}} & \mathfrak{gl}(V) \\
A & \mapsto & (x \mapsto A \cdot x) & & \\
 & & \alpha & \mapsto & \beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}
\end{array}$$

Es gilt $\varphi(A \cdot A') = (x \mapsto A \cdot A' \cdot x) = (x \mapsto A \cdot x) \circ (x \mapsto A' \cdot x) = \varphi(A) \circ \varphi(A')$ und folglich auch $\varphi([A, A']) = \varphi(A \cdot A' - A' \cdot A) = \varphi(A \cdot A') - \varphi(A' \cdot A) = \varphi(A) \circ \varphi(A') - \varphi(A') \circ \varphi(A) = [\varphi(A), \varphi(A')]$ für $A,\ A' \in \mathfrak{gl}_n(K) = K^{n \times n}$. Folglich ist φ ein Isomorphismus von Liealgebren.

Es gilt $\psi(\alpha \circ \alpha') = \beta \circ \alpha \circ \alpha' \circ \beta^{-1} = \beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ \alpha' \circ \beta^{-1} = \psi(\alpha) \circ \psi(\alpha')$ und folglich auch $\psi([\alpha, \alpha']) = \psi(\alpha \circ \alpha' - \alpha' \circ \alpha) = \psi(\alpha \circ \alpha') - \psi(\alpha' \circ \alpha) = \psi(\alpha) \circ \psi(\alpha') - \psi(\alpha') \circ \psi(\alpha) = [\psi(\alpha), \psi(\alpha')]$ für $\alpha,\ \alpha' \in \mathfrak{gl}(K^n)$. Folglich ist ψ ein Isomorphismus von Liealgebren.

Sei nun A die beschreibende Matrix zu einem linearen Endomorphismus $\gamma : V \to V$. Man beachte, daß $\beta^{-1}(v) \in K^n$ der Koordinatenvektor von $v \in V$ bezüglich unserer Basis ist. Also ist $A \cdot \beta^{-1}(v) = \beta^{-1}(\gamma(v))$ für $v \in V$ nach Definition von A, i.e.

$\beta(A\cdot\beta^{-1}(v)) = \gamma(v)$ für $v \in V$. Mit anderen Worten, es ist $\beta\circ(x\mapsto A\cdot x)\circ\beta^{-1} = \gamma$. Mit anderen Worten, es ist $\psi(\varphi(A)) = \gamma$. Mit anderen Worten, es ordnet

$$\sigma \;:=\; \varphi^{-1}\circ\psi^{-1} \;:\; \mathfrak{gl}(V) \;\to\; \mathfrak{gl}_n(K)$$

unserem linearen Endomorphismus γ seine beschreibende Matrix A zu.

Nun ist auch $\sigma = \varphi^{-1}\circ\psi^{-1}$ ein Isomorphismus von Liealgebren, wie behauptet; cf. Aufgabe 1.(3).

Für die Einschränkung nach $\sigma|_{\mathfrak{sl}(V)}^{\mathfrak{sl}_n(K)} : \mathfrak{sl}(V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_n(K)$ beachten wir, daß $\mathrm{tr}(\gamma) = \mathrm{tr}(\sigma(\gamma))$ gilt für $\gamma \in \mathfrak{gl}(V)$ nach Definition der Spur. Folglich ist genau dann $\gamma \in \mathfrak{sl}(V)$, wenn $\sigma(\gamma) \in \mathfrak{sl}_n(K)$ liegt.

Definition 8 (adjungierter Morphismus) Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

Setze

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ g & \longmapsto & \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g := (\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},\ x \longmapsto [g,x])\ . \end{array}}$$

Kurz, $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g = [g,-]$.

Bemerkung 9 *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Liealgebra. Es ist* $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *ein Morphismus.*

Insgesamt ist also $\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}|^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})}} \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *.*

Cf. auch Aufgabe 6.

Beweis. Seien $g,\ h \in \mathfrak{g}$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}[g,h])(x) & = & [[g,h],x] \\ & = & -[x,[g,h]] \\ & = & [g,[h,x]] + [h,[x,g]] \\ & = & (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g)((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h)(x)) - (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h)((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g)(x)) \\ & = & [\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g, \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h](x) \end{array}$$

für $x \in \mathfrak{g}$. Folglich ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}[g,h] = [\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g, \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h]$. □

Bemerkung 10 *Sei* V *ein Vektorraum.*

Ist $x \in \mathrm{End}\, V = \mathfrak{gl}(V)$ *nilpotent, so auch* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x \in \mathrm{End}\, \mathfrak{gl}(V)$*.*

Beweis. Mit Induktion erkennt man, daß für $y \in \mathfrak{gl}(V)$ und $m \geqslant 0$

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)^m(y) \;=\; \sum_{i\in[0,m]} (-1)^i \binom{m}{i}\, x^{m-i}\circ y\circ x^i$$

ist. In der Tat steht für $m = 0$ hier auf beiden Seiten y; für $m \geqslant 1$ erhalten wir

$$\begin{array}{rl} & (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)^m(y) \\ = & (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)\big(\sum_{i\in[0,m-1]}(-1)^i \binom{m-1}{i} x^{m-1-i}\circ y\circ x^i\big) \\ = & \big(\sum_{i\in[0,m-1]}(-1)^i \binom{m-1}{i} x^{m-i}\circ y\circ x^i\big) - \big(\sum_{i\in[0,m-1]}(-1)^i \binom{m-1}{i} x^{m-1-i}\circ y\circ x^{i+1}\big) \\ = & \big(\sum_{i\in[0,m-1]}(-1)^i \binom{m-1}{i} x^{m-i}\circ y\circ x^i\big) - \big(\sum_{i\in[1,m]}(-1)^{i-1} \binom{m-1}{i-1} x^{m-i}\circ y\circ x^i\big) \\ = & \big(\sum_{i\in[0,m]}(-1)^i \binom{m-1}{i} x^{m-i}\circ y\circ x^i\big) + \big(\sum_{i\in[0,m]}(-1)^i \binom{m-1}{i-1} x^{m-i}\circ y\circ x^i\big) \\ = & \sum_{i\in[0,m]}(-1)^i \binom{m}{i} x^{m-i}\circ y\circ x^i\,. \end{array}$$

Ist also $x^m = 0$ für ein $m \geqslant 0$, so ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)^{2m} = 0$. ▫

1.2 Ideale, Zentrum, Zentralisator, Normalisator

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

1.2.1 Ideale

Für Teilmengen $X,\, Y \subseteq \mathfrak{g}$ sei $[X,Y] := \langle\, [x,y] \,:\, x\in X,\, y\in Y\,\rangle$. Ist $X = \{x\}$ einelementig, so schreiben wir auch $[x,Y] := [\{x\},Y]$; analog in zweiter Stelle.

Definition 11 Ein Teilraum $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{g}$ heißt *Ideal* (oder *normale Teilalgebra*), falls $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{a}$ ist; symbolisch $\mathfrak{a}\trianglelefteqslant\mathfrak{g}$ geschrieben.

Beachte, daß für einen Teilraum $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{g}$ die Aussage $[\mathfrak{g},\mathfrak{a}]\subseteq\mathfrak{a}$ zur Aussage $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{a}$ äquivalent ist; cf. Definition 1.(3).

Ist $\mathfrak{a}\trianglelefteqslant\mathfrak{g}$, dann ist auch $\mathfrak{a}\leqslant\mathfrak{g}$.

Beispiel 12

(1) Ist $\mathfrak{g}\xrightarrow{\varphi}\mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren, so ist $\mathrm{Kern}\,\varphi := \varphi^{-1}(0)\trianglelefteqslant\mathfrak{g}$. Denn ist $a\in\mathrm{Kern}\,\varphi$ und $g\in\mathfrak{g}$, so ist $\varphi[a,g] = [\varphi a,\varphi g] = [0,\varphi g] = 0$, und also $[a,g]\in\mathrm{Kern}\,\varphi$. Cf. auch Aufgabe 4.(2.i).

Es ist e.g. $\mathfrak{sl}(V) = \mathrm{Kern}(\mathfrak{gl}(V)\xrightarrow{\mathrm{tr}}\mathfrak{gl}(K))\trianglelefteqslant\mathfrak{gl}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V.

(2) Es ist $\mathfrak{h} := \left(\begin{smallmatrix} K & K \\ 0 & K\end{smallmatrix}\right)\leqslant\mathfrak{gl}_2(K)$ kein Ideal, da e.g. $[\left(\begin{smallmatrix} 0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\notin\mathfrak{h}$.

Definition 13 Es heißt $\mathfrak{g}$ *einfach*, wenn $\mathfrak{g}$ nichtabelsch ist und nur die Ideale 0 und $\mathfrak{g}$ besitzt.

Cf. e.g. Aufgabe 3.

Bemerkung 14

(1) *Ist* $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$*, so ist der Faktorraum* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *vermöge* $[g + \mathfrak{a}, \tilde{g} + \mathfrak{a}] := [g, \tilde{g}] + \mathfrak{a}$ *für* $g, \tilde{g} \in \mathfrak{g}$ *eine Liealgebra, genannt* Faktoralgebra *von* $\mathfrak{g}$ *nach (oder modulo)* $\mathfrak{a}$*. Die Restklassenabbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\rho = \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}} & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ g & \longmapsto & g + \mathfrak{a} \end{array}$$

ist ein Morphismus.

(2) *Sei* $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ *ein Morphismus von Liealgebren. Dann haben wir den Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}/\operatorname{Kern}\varphi & \xrightarrow[\sim]{\bar{\varphi}} & \varphi(\mathfrak{g}) \\ g + \operatorname{Kern}\varphi & \longmapsto & \varphi(g)\ . \end{array}$$

Beweis. Siehe Aufgabe 4. □

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Kern}\varphi \trianglelefteq \mathfrak{g} \arrow[rrr, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho_{\mathfrak{g},\operatorname{Kern}\varphi}"'] & & & \mathfrak{h} \\ & \mathfrak{g}/\operatorname{Kern}\varphi \arrow[r, "\bar{\varphi}", "\sim"'] & \varphi(\mathfrak{g}) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 15

(1) Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ für ein $n \geqslant 0$ und $\mathfrak{a}_i \trianglelefteq \mathfrak{g}$ für alle $i \in [1, n]$. Dann ist $[a_i\,, a_j] = 0$ für $i, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$ und $a_i \in \mathfrak{a}_i\,, a_j \in \mathfrak{a}_j$, da $[\mathfrak{a}_i\,, \mathfrak{a}_j] \subseteq \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = 0$. Somit wird $[a_1 + \cdots + a_n\,, a'_1 + \cdots + a'_n] = [a_1\,, a'_1] + \cdots + [a_n\,, a'_n]$ für $a_i\,, a'_i \in \mathfrak{a}_i$ für $i \in [1, n]$.

(2) Sind umgekehrt Liealgebren $\mathfrak{h}_1\,, \ldots, \mathfrak{h}_m$ für ein $m \geqslant 0$ gegeben, so wird die direkte Summe $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$ zu einer Liealgebra vermöge

$$[(h_1, \ldots, h_m), (h'_1, \ldots, h'_m)] \ := \ ([h_1\,, h'_1], \ldots, [h_m\,, h'_m])$$

für $h_i \in \mathfrak{h}_i$ für $i \in [1, m]$. Darin ist dann $\mathfrak{h}_i \trianglelefteq \mathfrak{h}$ für $i \in [1, m]$ und $[\mathfrak{h}_i\,, \mathfrak{h}_j] = 0$ für $i, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$.

1.2.2 Zentrum

Bemerkung 16 Es hat $\mathfrak{g}$ das *Zentrum* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \operatorname{Kern}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} = \{\, z \in \mathfrak{g} \,:\, [z, \mathfrak{g}] = 0 \,\} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

Es ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ abelsch.

Insgesamt ist

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \ \trianglelefteqslant\ \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \xrightarrow[\sim]{\overline{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}}} \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}) \ \leqslant\ \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\ ;$$

cf. Bemerkung 14. Cf. auch Aufgabe 6.

Beispiel 17 Sei $n \geqslant 0$. Es ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(K)) = \langle \mathrm{E}_n \rangle$.

1.2.3 Zentralisator, Normalisator

Sei $V \subseteq \mathfrak{g}$ ein Teilraum. Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$.

Definition 18

(1) Sei $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(V) := \{\, g \in \mathfrak{g} \,:\, [g, V] \subseteq V \,\}$ der *Normalisator* von V in $\mathfrak{g}$.

(2) Sei $\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(V) := \{\, g \in \mathfrak{g} \,:\, [g, V] = 0 \,\}$ der *Zentralisator* von V in $\mathfrak{g}$.

Bemerkung 19

(1) Es ist $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(V) \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{h} \trianglelefteqslant \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{g}$.

(2) Es ist $[V, \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(V)] = 0$ und $\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(V) \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5. ▫

1.3 Jordan-Zerlegung (gewöhnlich)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. I.e. zerfalle jedes normierte Polynom $f(T) \in K[T]$ in ein Produkt von Linearfaktoren.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $n := \dim V$. Sei $x \in \operatorname{End} V$.

Beispiel 20 Es ist der Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen. Siehe e.g. [**6,** §4.5.2.1].

Definition 21

(1) Es heißt x *halbeinfach,* falls x diagonalisierbar ist, i.e. falls sein Minimalpolynom $\mu_x(T)$ nur einfache Nullstellen hat.

(2) Es heißt weiterhin x nilpotent, falls es ein $k \geqslant 0$ mit $x^k = 0$ gibt, i.e. falls sein Minimalpolynom $\mu_x(T)$ eine Potenz von T ist.

Lemma 22 (Jordan, gewöhnlich)

(1) *Es gibt genau ein Paar* $(x_{\mathrm{gs}}\,,\, x_{\mathrm{gn}}) \in (\operatorname{End} V) \times (\operatorname{End} V)$ *so, daß* x_{gs} *halbeinfach,* x_{gn} *nilpotent,* $x = x_{\mathrm{gs}} + x_{\mathrm{gn}}$ *und* $x_{\mathrm{gs}} \circ x_{\mathrm{gn}} = x_{\mathrm{gn}} \circ x_{\mathrm{gs}}$ *ist* ([3]).

(2) *Es gibt Polynome* $f(T),\, g(T) \in K[T]$ *mit* $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $f(T) + g(T) = T$ *und* $x_{\mathrm{gs}} = f(x)$, $x_{\mathrm{gn}} = g(x)$.

(3) *Sei* $\lambda \in K$ *ein Eigenwert von* x. *Es ist* λ *auch ein Eigenwert von* x_{gs} . *Der Hauptraum von* x *zum Eigenwert* λ *ist gleich dem Eigenraum von* x_{gs} *zum Eigenwert* λ *; i.e.* $\mathrm{H}_x(\lambda) = \mathrm{E}_{x_{\mathrm{gs}}}(\lambda)$.

Das Paar $(x_{\mathrm{gs}}\,,\, x_{\mathrm{gn}})$ heißt *gewöhnliche Jordanzerlegung* von x. Cf. Satz 70 unten.

Es ist $x = x_{\mathrm{gs}}$ genau dann, wenn x halbeinfach ist. Es ist $x = x_{\mathrm{gn}}$ genau dann, wenn x nilpotent ist. Beides ergibt sich aus (1).

Ad hoc kann man mit (1) e.g. sehen, daß für $K = \mathbf{C}$, $V = \mathbf{C}^3$ und $x = \left(\begin{smallmatrix} 3&0&0\\ 0&7&1\\ 0&0&7 \end{smallmatrix}\right)$ sich $x_{\mathrm{gs}} = \left(\begin{smallmatrix} 3&0&0\\ 0&7&0\\ 0&0&7 \end{smallmatrix}\right)$ und $x_{\mathrm{gn}} = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ ergeben müssen.

Beweis zu Lemma 22. Das charakteristische Polynom werde zerlegt in $\chi_x(T) = \prod_{i\in[1,m]} (T - \lambda_i)^{\alpha_i}$ mit $m \geqslant 0$, mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und mit $\alpha_i \geqslant 1$, wobei $i,\, j \in [1, m]$. Wir haben die Hauptraumzerlegung $V = \bigoplus_{i\in[1,m]} \mathrm{H}_x(\lambda_i) = \bigoplus_{i\in[1,m]} \operatorname{Kern}\big((x - \lambda_i)^{\alpha_i}\big)$; cf. [**6,** §4.3.1].

Sei $f(T) \equiv_{(T-\lambda_i)^{\alpha_i}} \lambda_i$ für alle $i \in [1, m]$ und, falls alle $\lambda_i \neq 0$, dazuhin $f(T) \equiv_T 0$. Dies ist möglich mit dem Chinesischen Restsatz; cf. Aufgabe 8. Setze $x_{\mathrm{gs}} := f(x)$. Sei $g(T) := T - f(T)$. Setze $x_{\mathrm{gn}} := g(x) = x - x_{\mathrm{gs}}$.

Es ist $x_{\mathrm{gs}}(\mathrm{H}_x(\lambda_i)) \subseteq \mathrm{H}_x(\lambda_i)$ für $i \in [1, m]$, da x_{gs} ein Polynom in x ist und daher mit $(x - \lambda_i)^{\alpha_i}$ vertauscht. Für $i \in [1, m]$ gibt es ein $h_i(T) \in K[T]$ mit $f(T) - \lambda_i = h_i(T)(T - \lambda_i)^{\alpha_i}$, woraus

$$(x_{\mathrm{gs}} - \lambda_i)|_{\mathrm{H}_x(\lambda_i)}^{\mathrm{H}_x(\lambda_i)} \;=\; (f(x) - \lambda_i)|_{\mathrm{H}_x(\lambda_i)}^{\mathrm{H}_x(\lambda_i)} \;=\; (h_i(x) \circ (x - \lambda_i)^{\alpha_i})|_{\mathrm{H}_x(\lambda_i)}^{\mathrm{H}_x(\lambda_i)} \;=\; 0$$

folgt. Also ist $\mathrm{H}_x(\lambda_i) \subseteq \mathrm{E}_{x_{\mathrm{gs}}}(\lambda_i)$. Da dies für alle $i \in [1, m]$ gilt, hat V eine Basis aus Eigenvektoren von x_{gs} , i.e. x_{gs} ist diagonalisierbar.

Da ferner $V = \bigoplus_{i\in[1,m]} \mathrm{H}_x(\lambda_i) = \bigoplus_{i\in[1,m]} \mathrm{E}_{x_{\mathrm{gs}}}(\lambda_i)$ ist, folgt aus Dimensionsgründen $\mathrm{H}_x(\lambda_i) = \mathrm{E}_{x_{\mathrm{gs}}}(\lambda_i)$ für $i \in [1, m]$.

Für $i \in [1, m]$ ist $x_{\mathrm{gn}}(\mathrm{H}_x(\lambda_i)) \subseteq \mathrm{H}_x(\lambda_i)$ und

$$(x_{\mathrm{gn}})^{\alpha_i}|_{\mathrm{H}_x(\lambda_i)}^{\mathrm{H}_x(\lambda_i)} \;=\; (x - x_{\mathrm{gs}})^{\alpha_i}|_{\mathrm{H}_x(\lambda_i)}^{\mathrm{H}_x(\lambda_i)} \;=\; (x - \lambda_i)^{\alpha_i}|_{\mathrm{H}_x(\lambda_i)}^{\mathrm{H}_x(\lambda_i)} \;=\; 0\,.$$

Daher ist $(x_{\mathrm{gn}})^{\max_{i\in[1,m]} \alpha_i} = 0$ und also x_{gn} nilpotent.

---

[3]engl. semisimple, nilpotent

Ferner ist $x = x_{\mathrm{gs}} + x_{\mathrm{gn}}$ und $x_{\mathrm{gs}} \circ x_{\mathrm{gn}} = f(x) \circ g(x) = g(x) \circ f(x) = x_{\mathrm{gn}} \circ x_{\mathrm{gs}}$.

Bleibt die in (1) behauptete Eindeutigkeit zu zeigen. Sei $x = \tilde{x}_{\mathrm{gs}} + \tilde{x}_{\mathrm{gn}}$ und $\tilde{x}_{\mathrm{gs}} \circ \tilde{x}_{\mathrm{gn}} = \tilde{x}_{\mathrm{gn}} \circ \tilde{x}_{\mathrm{gs}}$ mit $\tilde{x}_{\mathrm{gs}}$ halbeinfach und $\tilde{x}_{\mathrm{gn}}$ nilpotent. Es vertauschen $\tilde{x}_{\mathrm{gs}}$ und $\tilde{x}_{\mathrm{gn}}$ mit $\tilde{x}_{\mathrm{gs}} + \tilde{x}_{\mathrm{gn}} = x$ und also auch mit $f(x) = x_{\mathrm{gs}}$ und $g(x) = x_{\mathrm{gn}}$. Somit ist $x_{\mathrm{gs}} - \tilde{x}_{\mathrm{gs}}$ halbeinfach und $x_{\mathrm{gn}} - \tilde{x}_{\mathrm{gn}}$ nilpotent; cf. Aufgabe 10.(2). Da sich aber $x_{\mathrm{gs}} - \tilde{x}_{\mathrm{gs}} = \tilde{x}_{\mathrm{gn}} - x_{\mathrm{gn}}$ ergibt, folgt $x_{\mathrm{gs}} = \tilde{x}_{\mathrm{gs}}$ und $x_{\mathrm{gn}} = \tilde{x}_{\mathrm{gn}}$. ▫

Bemerkung 23 *Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V mit $x_{\mathrm{gs}} v_i = \mu_i v_i$ für $i \in [1,n]$, wobei $\mu_i \in K$. Für $i,\, j \in [1,n]$ sei $e_{i,j} \in \operatorname{End} V$ durch $e_{i,j} v_k = \partial_{j,k} v_i$ für $k \in [1,n]$ definiert.*

(1) *Es ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_{\mathrm{gs}}))(e_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j) e_{i,j}$ für $i,\, j \in [1,n]$.*

(2) *Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_{\mathrm{gs}}) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)_{\mathrm{gs}}$ und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_{\mathrm{gn}}) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)_{\mathrm{gn}}$ in $\operatorname{End} \mathfrak{gl}(V)$.*

Beweis. Wir schreiben kurz $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(V)$.

Zu (1). Es ist

$$\begin{array}{rcl} \big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}))(e_{i,j})\big)(v_k) & = & [x_{\mathrm{gs}}\,,\, e_{i,j}](v_k) \\ & = & (x_{\mathrm{gs}} \circ e_{i,j} - e_{i,j} \circ x_{\mathrm{gs}})(v_k) \\ & = & x_{\mathrm{gs}}(\partial_{j,k} v_i) - e_{i,j}(\mu_k v_k) \\ & = & \partial_{j,k} \mu_i v_i - \mu_k \partial_{j,k} v_i \\ & = & \mu_i \partial_{j,k} v_i - \mu_j \partial_{j,k} v_i \\ & = & ((\mu_i - \mu_j) e_{i,j}) v_k \end{array}$$

für $k \in [1,n]$ und also $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}))(e_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j) e_{i,j}$.

Zu (2). Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}})$ halbeinfach, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}})$ nilpotent, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}}) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}})$ ist; cf. Lemma 22.(1).

Nach Bemerkung 10 ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}})$ nilpotent. Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$. Ferner ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}}) - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}}) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}) = [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}), \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gn}})] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}[x_{\mathrm{gs}}\,,\, x_{\mathrm{gn}}] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, 0 = 0$; cf. Bemerkung 9. Schließlich ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}})$ halbeinfach, da die Basis $(\, e_{i,j} \,:\, i,\, j \,\in\, [1,n] \,)$ von $\mathfrak{g}$ dank (1) aus Eigenvektoren von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}})$ besteht. ▫

Kapitel 2

Auflösbar, halbeinfach und nilpotent

2.1 Begriffe für Liealgebren

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra. Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$.

2.1.1 Auflösbar

Bemerkung 24

(1) Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \tilde{\mathfrak{g}}$ ein Morphismus von Liealgebren.
Es ist $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ für $X,\, Y \subseteq \mathfrak{g}$.

(2) Es ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \trianglelefteq \mathfrak{g}$; cf. Aufgabe 11.
Es ist $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ abelsch.
Ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ abelsch, dann ist $[x, y]+\mathfrak{a} = [x+\mathfrak{a}, y+\mathfrak{a}] = 0$ für $x,\, y \in \mathfrak{g}$ und also $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$.

Definition 25 Schreibe $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}] \subseteq \mathfrak{g}^{(n)}$ für $n \geqslant 0$.

Es ist $\mathfrak{g}^{(n)} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ für $n \geqslant 0$; cf. Aufgabe 11.

Es heißt $\mathfrak{g}$ *auflösbar,* falls ein $n \geqslant 0$ mit $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ existiert.

> Sprechen kann man $\mathfrak{g}^{(n)}$ als "Skript g rund n".

Beispiel 26 Ist $\mathfrak{g} = \left(\begin{smallmatrix} K & K \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right) \leqslant \mathfrak{gl}_2(K)$, dann wird $\mathfrak{g}^{(1)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathfrak{g}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; was zeigt, daß $\mathfrak{g}$ auflösbar ist. Cf. Aufgabe 13.

Bemerkung 27

(1) *Ist* $\mathfrak{g}$ *auflösbar, so auch* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$*.*

(2) *Ist* $\mathfrak{g}$ *auflösbar, so auch* $\mathfrak{h}$.

(3) *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *auflösbar, so auch* $\mathfrak{g}$.

(4) *Sind* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{a}$ *auflösbar, so auch* $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ *; cf. Aufgabe* 4.(2.v).

Beweis.

Zu (1). Es ist $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}^{(n)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)}$ für $n \geqslant 0$; cf. Bemerkung 24.(1).

Zu (2). Es ist $\mathfrak{h}^{(n)} \leqslant \mathfrak{g}^{(n)}$ für $n \geqslant 0$.

Zu (3). Seien $m,\, n \geqslant 0$ mit $\mathfrak{a}^{(m)} = 0$ und $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)} = 0$. Aus $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}^{(n)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)} = 0$ folgt $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{a}$ und also $\mathfrak{g}^{(n+m)} \subseteq \mathfrak{a}^{(m)} = 0$.

Zu (4). Es ist $(\mathfrak{h}+\mathfrak{a})/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a})$ auflösbar nach (1); cf. Aufgabe 4.(2.v). Da auch $\mathfrak{a}$ auflösbar ist, folgt mit (3), daß auch $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ auflösbar ist. ▫

2.1.2 Halbeinfach

Sei $\mathfrak{g}$ endlichdimensional.

Bemerkung 28 (und Definition) *Es gibt ein auflösbares Ideal* $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$ *in* $\mathfrak{g}$, *das* Radikal *von* $\mathfrak{g}$, *welches jedes auflösbare Ideal von* $\mathfrak{g}$ *enthält. I.e.* $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$ *ist das terminale auflösbare Ideal in* $\mathfrak{g}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{r}$ ein auflösbares Ideal maximaler Dimension in $\mathfrak{g}$; existent, da 0 auflösbar und $\mathfrak{g}$ endlichdimensional ist. Sei $\mathfrak{c} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ auflösbar. *Wäre* $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{r}$, so wäre $\dim(\mathfrak{r}+\mathfrak{c}) > \dim\mathfrak{r}$, aber $\mathfrak{r}+\mathfrak{c}$ nach Bemerkung 27.(4) auflösbar, was der Wahl von $\mathfrak{r}$ *widerspricht*; cf. Aufgabe 11. Setze $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) := \mathfrak{r}$. ▫

Beispiel 29 Ist $\operatorname{char} K = 0$, dann ist $\mathfrak{rad}(\mathfrak{gl}_2(K)) = \langle \mathrm{E}_2 \rangle$; cf. Aufgabe 13.(5).

Definition 30 Ist $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, so heißt $\mathfrak{g}$ *halbeinfach.*

Bemerkung 31

(1) *Es ist* $\mathfrak{g}/\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$ *halbeinfach.*

(2) *Ist* $\mathfrak{g}$ *einfach, so ist* $\mathfrak{g}$ *halbeinfach.*

Beweis.

Zu (1). Ist $\mathfrak{d} \trianglelefteq \mathfrak{g}/\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$ auflösbar, so auch $\rho^{-1}(\mathfrak{d}) \trianglelefteq \mathfrak{g}$, da $\rho^{-1}(\mathfrak{d})/\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = \rho(\rho^{-1}(\mathfrak{d})) = \mathfrak{d}$; cf. Aufgabe 4.(2.i), Bemerkung 27.(3). Also ist $\rho^{-1}(\mathfrak{d}) \subseteq \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$, und somit $\mathfrak{d} = \rho(\rho^{-1}(\mathfrak{d})) = 0$. Insbesondere ist $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})) = 0$.

Zu (2). Da $\mathfrak{g}$ einfach ist, enthält es nur die Ideale 0 und $\mathfrak{g}$. Daher ist auch $\mathfrak{g}^{(1)} \in \{0,\, \mathfrak{g}\}$. Es ist $\mathfrak{g}^{(1)} \neq 0$, da $\mathfrak{g}$ nicht abelsch ist. Also ist $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$. Daher ist $\mathfrak{g}$ nicht auflösbar, folglich $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) \lhd \mathfrak{g}$, und also muß $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ sein. □

Bemerkung 32 *Es ist $\mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{g}$ kein abelsches Ideal ungleich* 0 *enthält.*

Beweis. Enthält zum einen $\mathfrak{g}$ ein abelsches Ideal $\mathfrak{a}$ ungleich 0, so ist $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$ und somit $\mathfrak{g}$ nicht halbeinfach.

Ist zum anderen $\mathfrak{g}$ nicht halbeinfach, so ist $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Also gibt es ein $n \geqslant 0$ mit $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})^{(n)} \neq 0$, aber $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})^{(n+1)} = 0$. Damit ist $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})^{(n)}$ ein abelsches Ideal in $\mathfrak{g}$ ungleich 0; cf. Aufgabe 11. □

Bemerkung 33 *Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist* $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *injektiv und* $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})$ *halbeinfach.*

Beweis. Da $\mathrm{Kern}\,\mathrm{ad}_\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ ist, als abelsches Ideal in der halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$, ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ injektiv; cf. Bemerkungen 16 und 32. Insbesondere ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}$ halbeinfach. □

2.1.3 Nilpotent

Definition 34 Schreibe $\mathfrak{g}^{[0]} := \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^{[n+1]} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{[n]}] \subseteq \mathfrak{g}^{[n]}$ für $n \geqslant 0$. Es ist $\mathfrak{g}^{[n]} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ für $n \geqslant 0$; cf. Aufgabe 11.

Es heißt $\mathfrak{g}$ *nilpotent,* falls ein $n \geqslant 0$ mit $\mathfrak{g}^{[n]} = 0$ existiert.

Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, dann auch auflösbar, da $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}^{[n]}$ für $n \geqslant 0$; cf. Definition 25.

Sprechen kann man $\mathfrak{g}^{[n]}$ als "Skript g eckig n".

Beispiel 35

(1) Ist $\mathfrak{g} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \leqslant \mathfrak{gl}_3(K)$, dann ist $\mathfrak{g}^{[1]} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathfrak{g}^{[2]} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, was die Nilpotenz von $\mathfrak{g}$ zeigt. Cf. Aufgabe 13.

(2) Ist $\mathfrak{g} = \left(\begin{smallmatrix} K & K \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right) \leqslant \mathfrak{gl}_2(K)$, dann wird $\mathfrak{g}^{[n]} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ für $n \geqslant 1$. Also ist $\mathfrak{g}$ nicht nilpotent. Cf. Beispiel 26, Aufgabe 13.

Bemerkung 36

(1) *Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so auch $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.*

(2) *Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so auch $\mathfrak{h}$.*

(3) *Ist* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *und ist* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *nilpotent, so ist* $\mathfrak{g}$ *nilpotent.*

Beweis.

Zu (1). Es ist $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}^{[n]}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{[n]}$ für $n \geqslant 0$; cf. Bemerkung 24.(1).

Zu (2). Es ist $\mathfrak{h}^{[n]} \leqslant \mathfrak{g}^{[n]}$.

Zu (3). Sei $n \geqslant 0$ mit $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{[n]} = 0$, woraus $\mathfrak{g}^{[n]} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Es folgt $\mathfrak{g}^{[n+1]} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$. ▫

Cf. auch Aufgabe 14.

2.2 Satz von Engel

Sei K ein Körper. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

Lemma 37 *Sei* $\dim V \geqslant 1$. *Sei* $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$. *Sei jedes* $g \in \mathfrak{g}$ *ein nilpotenter Endomorphismus von* V. *Dann gibt es ein* $v \in V \smallsetminus \{0\}$ *mit* $g(v) = 0$ *für alle* $g \in \mathfrak{g}$.

Wir haben also einen gemeinsamen Eigenvektor v mit Eigenwert 0 für alle Elemente von $\mathfrak{g}$.

Beweis. Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Die Aussage ist richtig, falls $\dim \mathfrak{g} = 0$. Sei nun $\dim \mathfrak{g} \geqslant 1$. Sei $\mathfrak{h}$ eine bezüglich Inklusion maximale echte Teilalgebra von $\mathfrak{g}$. Wir betrachten den Faktorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ und erhalten einen Morphismus

$$\tilde{\mathrm{ad}} \,:\, \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \,, \quad h \longmapsto (g + \mathfrak{h} \mapsto [h, g] + \mathfrak{h}) \,.$$

Das Bild $(g + \mathfrak{h} \mapsto [h, g] + \mathfrak{h})$ ist wohldefiniert, da für $g + \mathfrak{h} = g' + \mathfrak{h}$ auch $([h, g] + \mathfrak{h}) - ([h, g'] + \mathfrak{h}) = [h,\, g - g'] + \mathfrak{h} = 0 + \mathfrak{h}$ ist, wobei $g,\, g' \in \mathfrak{g}$. Es ist $\tilde{\mathrm{ad}}$ ein Morphismus, da $(\tilde{\mathrm{ad}}[h, h'])(g + \mathfrak{h}) = [[h, h'], g] + \mathfrak{h} = ([h, [h', g]] + \mathfrak{h}) - ([h', [h, g]] + \mathfrak{h}) = [\tilde{\mathrm{ad}}\, h, \tilde{\mathrm{ad}}\, h'](g + \mathfrak{h})$ ist, wobei $h,\, h' \in \mathfrak{h}$ und $g \in \mathfrak{g}$.

Es ist $\dim \tilde{\mathrm{ad}}(\mathfrak{h}) \leqslant \dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$. Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(h)|_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}}$ ein nilpotenter Endomorphismus für $h \in \mathfrak{h}$; cf. Bemerkung 10. Da $(\tilde{\mathrm{ad}}(h))^n(g + \mathfrak{h}) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)^n)(g) + \mathfrak{h}$ ist für $h \in \mathfrak{h}$, $n \geqslant 0$ und $g \in \mathfrak{g}$, folgt, daß auch $\tilde{\mathrm{ad}}(h)$ ein nilpotenter Endomorphismus ist für $h \in \mathfrak{h}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also ein $g \in \mathfrak{g} \smallsetminus \mathfrak{h}$ mit $0 = \tilde{\mathrm{ad}}(h)(g + \mathfrak{h}) = [h, g] + \mathfrak{h}$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. I.e. es ist $[\mathfrak{h}, g] \subseteq \mathfrak{h}$, mithin $g \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \smallsetminus \mathfrak{h}$. Insbesondere ist $\mathfrak{h} < \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Die Maximalität von $\mathfrak{h}$ liefert nun $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, i.e. $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

Wäre $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) > 1$, so könnte man in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eine eindimensionale abelsche echte Teilalgebra wählen; ihr Urbild in $\mathfrak{g}$ würde der Maximalität von $\mathfrak{h}$ *widersprechen*; cf. Aufgabe 4.(2.i). Also ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \langle g_0 \rangle$, wenn wir $g_0 \in \mathfrak{g} \smallsetminus \mathfrak{h}$ wählen.

Abermals nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $\tilde{v} \in V \smallsetminus \{0\}$ mit $h(\tilde{v}) = 0$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. Also ist $W := \{\, w \in V \,:\, h(w) = 0 \text{ für alle } h \in \mathfrak{h} \,\} \neq 0$. Es schränkt g_0 nach W

ein, da $hg_0(w) = g_0h(w) + [h, g_0](w) = 0$ für $w \in W$ und $h \in \mathfrak{h}$ wegen $[h, g_0] \in \mathfrak{h}$. Da g_0 nilpotent ist, ist auch $g_0|_W^W$ nilpotent. Sei $n \geqslant 0$ so, daß zwar $(g_0|_W^W)^n \neq 0$, aber $(g_0|_W^W)^{n+1} = 0$ ist; möglich, da $W \neq 0$. Sei $x \in W$ mit $v := (g_0|_W^W)^n(x) \neq 0$. Dann ist $g_0(v) = 0$ und, da $v \in W$ liegt, auch $h(v) = 0$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. Folglich ist $g(v) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{h} + \langle g_0 \rangle = \mathfrak{g}$. □

Definition 38 Für $n \geqslant 0$ sei

$$\begin{array}{lcll} \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K) & := & \{\, (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathfrak{gl}_n(K) \,:\, \alpha_{i,j} = 0 \text{ falls } i > j \,\} & \text{(obere Dreiecksmatrizen)} \\ \mathfrak{gl}_n^{>}(K) & := & \{\, (\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathfrak{gl}_n(K) \,:\, \alpha_{i,j} = 0 \text{ falls } i \geqslant j \,\} & \text{(strikte obere Dreiecksmatrizen)}\ . \end{array}$$

Wir erhalten $\mathfrak{gl}_n^{>}(K) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K) \leqslant \mathfrak{gl}_n(K)$. Cf. auch Aufgabe 13.(2).

Lemma 39 *Sei* $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ *eine Teilalgebra. Sei* $n := \dim V$*.*

Die folgenden Aussagen $(1, 2, 3)$ *sind äquivalent.*

(1) *Es besteht* $\mathfrak{h}$ *aus nilpotenten Endomorphismen von* V*.*

(2) *Es gibt eine Basis* $(v_i \,:\, i \in [1, n])$ *von* V *derart, daß*

$$h\langle v_i \,:\, i \in [1, j]\rangle \;\subseteq\; \langle v_i \,:\, i \in [1, j-1]\rangle$$

ist für $j \in [1, n]$ *und* $h \in \mathfrak{h}$*.*

(3) *Es gibt eine Basis* $(v_i \,:\, i \in [1, n])$ *von* V *derart, daß für den gemäß Beispiel* 7.(2) *zugehörigen Isomorphismus* $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$ *gilt, daß* $\varphi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ *ist.*

Cf. Aufgabe 16.

Beweis. Ad (2) $\Leftrightarrow$ (3). Dies folgt unter Beibehaltung der Basis $(v_i \,:\, i \in [1, n])$ aus der Konstruktion der beschreibenden Matrix zu einem Endomorphismus.

Ad (3) $\Rightarrow$ (1). Sei also $\varphi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ für den zu einer Basiswahl gehörigen Isomorphismus $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$. Es besteht $\mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ aus nilpotenten Endomorphismen, also auch $\varphi(\mathfrak{h})$ und somit auch $\mathfrak{h}$.

Ad (1) $\Rightarrow$ (2). Bestehe also $\mathfrak{h}$ aus nilpotenten Endomorphismen.

Wir führen eine Induktion nach $\dim V$. Die Aussage ist richtig, falls $\dim V = 0$. Sei $\dim V \geqslant 1$.

Es gibt ein $v_1 \in V$ mit $h(v_1) = 0$ für alle $h \in \mathfrak{h}$; cf. Lemma 37. Also haben wir den Morphismus von Liealgebren

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{gl}(V/\langle v_1 \rangle)\,, \quad h \longmapsto (v + \langle v_1 \rangle \mapsto h(v) + \langle v_1 \rangle)\ .$$

In der Tat ist ψ wohldefiniert, und es schicken sowohl $\psi([h,h']) = \psi(h \circ h' - h' \circ h)$ als auch $[\psi(h), \psi(h')] = \psi(h) \circ \psi(h') - \psi(h') \circ \psi(h)$ das Element $v + \langle v_1 \rangle$ auf das Element $hh'(v) - h'h(v) + \langle v_1 \rangle$, wobei $h,\, h' \in \mathfrak{h}$ und $v \in V$.

Da jedes Element von $\mathfrak{h}$ nilpotent ist, gilt dies auch für jedes Element von $\psi(\mathfrak{h})$. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die Teilalgebra $\psi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}(V/\langle v_1 \rangle)$, gibt es eine Basis $(v_2 + \langle v_1 \rangle\, , \, \dots\, , \, v_n + \langle v_1 \rangle)$ von $V/\langle v_1 \rangle$ so, daß

$$h(v_j) + \langle v_1 \rangle \;=\; \psi(h)(v_j + \langle v_1 \rangle) \;\in\; \langle\, v_i + \langle v_1 \rangle \,:\, i \in [2, j-1]\,\rangle$$

ist, i.e. $h(v_j) \in \langle\, v_i \,:\, i \in [1, j-1]\,\rangle$, für $h \in \mathfrak{h}$ und $j \in [2, n]$.

Es ist $(v_1\, , \, v_2\, , \, \dots\, , \, v_n)$ eine Basis von V. Insgesamt ist $h(v_j) \in \langle\, v_i \,:\, i \in [1, j-1]\,\rangle$ für $h \in \mathfrak{h}$ und $j \in [1, n]$. Ist φ die Abbildung, die bezüglich dieser Basis einem Endomorphismus seine beschreibende Matrix zuordnet, so ist mithin $\varphi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$. ▫

Satz 40 (Engel) *Weiterhin ist K ein Körper.*

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Schreibe $n := \dim \mathfrak{g}$.

Die folgenden Aussagen $(1,2,3,4)$ sind äquivalent.

(1) *Es ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.*

(2) *Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ nilpotent.*

(3) *Es besteht $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ aus nilpotenten Endomorphismen von $\mathfrak{g}$.*

(4) *Es gibt eine Basis von $\mathfrak{g}$ so, daß für den zugehörigen Isomorphismus $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$ gilt, daß $\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ ist.*

Was $(2,3)$ angeht, cf. auch Aufgabe 16.

Es ist also eine nilpotente endlichdimensionale Liealgebra "eine Teilalgebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen, mit ggf. noch einem untergeschobenen zentralen Stück", da $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ und Bemerkung 36.$(1,3)$; cf. Bemerkung 16.

Die Äquivalenz von (3) und (4) ergibt sich aus Lemma 39.

Ad (1) $\Rightarrow$ (3). Sei $\mathfrak{g}$ nilpotent. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ ein nilpotenter Endomorphismus, da $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)^k(x) \in \mathfrak{g}^{[k]}$ für $x \in \mathfrak{g}$ und $k \geqslant 0$.

Ad (3) $\Rightarrow$ (1). Bestehe $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ aus nilpotenten Endomorphismen. Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Die Aussage ist richtig, falls $\dim \mathfrak{g} = 0$. Sei nun $\dim \mathfrak{g} \geqslant 1$. Da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g$ nilpotent ist für $g \in \mathfrak{g}$, gibt es ein $z \in \mathfrak{g} \smallsetminus \{0\}$ mit $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)(z) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{g}$ gemäß Lemma 37, angewandt auf $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Also ist $0 \neq z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Mit $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g$ ist auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}(g + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ nilpotent für alle $g \in \mathfrak{g}$. Da $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) < \dim \mathfrak{g}$, ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ nilpotent. Folglich ist auch $\mathfrak{g}$ nilpotent; cf. Bemerkung 36.(3). ▫

2.3 Satz von Lie

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

Lemma 41 *Sei* $\dim V \geqslant 1$. *Sei* $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ *eine auflösbare Teilalgebra. Dann gibt es ein* $v \in V \smallsetminus \{0\}$ *und eine lineare Abbildung* $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow K$ *mit* $g(v) = \lambda(g) \cdot v$ *für* $g \in \mathfrak{g}$.

> Wir haben also einen gemeinsamen Eigenvektor v für alle Elemente von $\mathfrak{g}$, mit via λ variierendem Eigenwert.
>
> Es hat die abelsche Teilalgebra $\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathfrak{gl}_2(\mathbf{R})$ kein solches $v \in \mathbf{R}^{2\times 1}$. Aber $\mathbf{R}$ ist auch nicht algebraisch abgeschlossen.
>
> Sei L ein Körper mit $\operatorname{char} L = 3$. Es hat die auflösbare Teilalgebra $\langle \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathfrak{gl}_3(L)$ kein solches $v \in L^{3\times 1}$.

Beweis. Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$. Die Aussage ist richtig, falls $\dim \mathfrak{g} = 0$. Sei nun $\dim \mathfrak{g} \geqslant 1$. Da $\mathfrak{g}$ auflösbar ist, ist $\mathfrak{g}^{(1)} \lhd \mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ abelsch ist, da also darin jeder Teilraum ein Ideal ist, gibt es darin ein Ideal von Codimension 1. Für sein Urbild $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ gilt mithin $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$ und $\dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{g} - 1$; cf. Aufgabe 4.(2.i). Es ist $\mathfrak{a}$ auflösbar; cf. Bemerkung 27.(2). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $\tilde{v} \in V \smallsetminus \{0\}$ und eine lineare Abbildung $\mu : \mathfrak{a} \longrightarrow K$ mit $a(\tilde{v}) = \mu(a) \cdot \tilde{v}$ für $a \in \mathfrak{a}$.

Sei $W := \{\, w \in V \,:\, a(w) = \mu(a) \cdot w \text{ für } a \in \mathfrak{a} \,\}$. Es ist $W \neq 0$, da $\tilde{v} \in W$.

Sei $g \in \mathfrak{g}$. Wir *behaupten* $\mu([a,g]) \overset{!}{=} 0$ für $a \in \mathfrak{a}$. Wähle ein $w \in W \smallsetminus \{0\}$. Sei $\ell \geqslant 1$ minimal mit $(g^0(w), \ldots, g^\ell(w))$ linear abhängig. Schreibe

$$U_k \;:=\; \langle\, g^i(w) \,:\, i \in [0, k-1] \,\rangle$$

für $k \geqslant 0$. Es ist $\dim U_\ell = \ell$. Es ist $U_\ell = U_{\ell+1}$, da $g^\ell(w) \in \langle g^0(w), \ldots, g^{\ell-1}(w) \rangle = U_\ell$. Es ist $gU_k \subseteq U_{k+1}$ für $k \geqslant 0$. Es ist $gU_\ell \subseteq U_{\ell+1} = U_\ell$.

Mit Induktion wollen wir zeigen, daß $(a - \mu(a))g^k(w) \overset{!}{\in} U_k$ ist für $a \in \mathfrak{a}$ und $k \geqslant 0$. Dies trifft zu für $k = 0$, da $w \in W$. Für $k \geqslant 1$ wird, unter Beachtung von $[g,a] \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{array}{rcl}
(a - \mu(a))g^k(w) + U_k & = & (a \circ g - \mu(a)g)g^{k-1}(w) + U_k \\
& = & (g \circ a - [g,a] - \mu(a)g)g^{k-1}(w) + U_k \\
& = & (g \circ (a - \mu(a)) - [g,a])g^{k-1}(w) + U_k \\
& \overset{\text{Ind.vor.}}{=} & -[g,a]g^{k-1}(w) + U_k \\
& \overset{\text{Ind.vor.}}{=} & -\mu([g,a]) \cdot g^{k-1}(w) + U_k \\
& = & 0 + U_k \;,
\end{array}$$

was wir zeigen wollten.

Sei $a \in \mathfrak{a}$. Wir haben eben $ag^k(w) \in \mu(a) \cdot g^k(w) + \langle g^0(w), \ldots, g^{k-1}(w) \rangle$ für $k \geqslant 0$ gezeigt. Insbesondere ist $aU_\ell \subseteq U_\ell$. Ferner hat bezüglich der Basis $(g^0(w), \ldots, g^{\ell-1}(w))$ von U_ℓ die beschreibende Matrix von $a|_{U_\ell}^{U_\ell}$ obere Dreiecksform, und alle ihre Diagonaleinträge sind gleich $\mu(a)$. Also ist $\mathrm{tr}(a|_{U_\ell}^{U_\ell}) = \ell\mu(a)$.

Sei $a \in \mathfrak{a}$. Da auch $[a, g] \in \mathfrak{a}$ ist, folgt

$$\ell\mu([a, g]) \;=\; \mathrm{tr}([a, g]|_{U_\ell}^{U_\ell}) \;=\; \mathrm{tr}(a|_{U_\ell}^{U_\ell} \circ g|_{U_\ell}^{U_\ell} - g|_{U_\ell}^{U_\ell} \circ a|_{U_\ell}^{U_\ell}) \;=\; 0\ .$$

Wegen $\mathrm{char}\, K = 0$ liefert dies $\mu([a, g]) = 0$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Sei $g \in \mathfrak{g}$. Wir *behaupten* $gW \subseteq W$. Sei $w \in W$. Sei $a \in \mathfrak{a}$. Mit voriger Behauptung wird

$$ag(w) \;=\; ga(w) - [g, a](w) \;=\; g(\mu(a) \cdot w) - \mu([g, a]) \cdot w \;=\; \mu(a) \cdot g(w)\ .$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Wähle ein $g_0 \in \mathfrak{g} \smallsetminus \mathfrak{a}$. Es wird $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \langle g_0 \rangle$. Sei $v \in W \smallsetminus \{0\}$ mit $g_0 v = \xi v$ für ein $\xi \in K$, existent, da $g_0 W \subseteq W$ liegt und da K algebraisch abgeschlossen ist. Sei nun $\lambda : \mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \langle g_0 \rangle \longrightarrow K$, $a + \gamma \cdot g_0 \longmapsto \mu(a) + \gamma\xi$, wobei $a \in \mathfrak{a}$ und $\gamma \in K$. Damit erhalten wir

$$(a + \gamma \cdot g_0)v \;=\; \mu(a) \cdot v + \gamma\xi \cdot v \;=\; \lambda(a + \gamma \cdot g_0) \cdot v\ .$$

□

Lemma 42 *Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ eine Teilalgebra. Sei $n := \dim V$.*

Die folgenden Aussagen $(1, 2, 3)$ sind äquivalent.

(1) *Es ist $\mathfrak{h}$ auflösbar.*

(2) *Es gibt eine Basis $(v_i \,:\, i \in [1, n])$ von V derart, daß*

$$h\langle v_i \,:\, i \in [1, j]\rangle \;\subseteq\; \langle v_i \,:\, i \in [1, j]\rangle$$

ist für $j \in [1, n]$ und $h \in \mathfrak{h}$.

(3) *Es gibt eine Basis $(v_i \,:\, i \in [1, n])$ von V derart, daß für den gemäß Beispiel 7.(2) zugehörigen Isomorphismus $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$ gilt, daß $\varphi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$ ist.*

Beweis. Beweis. Ad (2) $\Leftrightarrow$ (3). Dies folgt unter Beibehaltung der Basis $(v_i \,:\, i \in [1, n])$ aus der Konstruktion der beschreibenden Matrix zu einem Endomorphismus.

Ad (3) $\Rightarrow$ (1). Sei also $\varphi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$ für den zu einer Basiswahl gehörigen Isomorphismus $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$. Es ist $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$ auflösbar, also auch $\varphi(\mathfrak{h})$ und somit wegen $\mathfrak{h} \simeq \varphi(\mathfrak{h})$ auch $\mathfrak{h}$; cf. Aufgabe 13.(2); Bemerkung 27.(2).

Ad (1) $\Rightarrow$ (2). Sei also $\mathfrak{h}$ auflösbar.

Wir führen eine Induktion nach $\dim V$. Die Aussage ist richtig, falls $\dim V = 0$. Sei $\dim V \geqslant 1$. Es gibt ein $v_1 \in V$ und eine lineare Abbildung $\lambda_1 : \mathfrak{h} \longrightarrow K$ mit $h(v_1) = \lambda_1(h)v_1$ für alle $h \in \mathfrak{h}$; cf. Lemma 41. Also haben wir den Morphismus von Liealgebren

$$\mathfrak{h} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{gl}(V/\langle v_1 \rangle)\ ,\quad h \longmapsto (v + \langle v_1 \rangle \mapsto h(v) + \langle v_1 \rangle)\ .$$

Es ist $\psi(\mathfrak{h})$ auflösbar; cf. Bemerkungen 14.(2) und 27.(1).

Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $\psi(\mathfrak{h})$ und $V/\langle v_1\rangle$, gibt es eine Basis $(v_2 + \langle v_1\rangle\, , \ldots , v_n + \langle v_1\rangle)$ von $V/\langle v_1\rangle$ so, daß

$$h(v_j) + \langle v_1\rangle \;=\; \psi(h)(v_j + \langle v_1\rangle) \;\in\; \langle\, v_i + \langle v_1\rangle \,:\, i \in [2,j]\,\rangle$$

ist, i.e. $h(v_j) \in \langle\, v_i \,:\, i \in [1,j]\,\rangle$, für $h \in \mathfrak{h}$ und $j \in [2,n]$.

Es ist $(v_1\, , v_2\, , \ldots , v_n)$ eine Basis von V. Insgesamt ist $h(v_j) \in \langle\, v_i \,:\, i \in [1,j]\,\rangle$ für $h \in \mathfrak{h}$ und $j \in [1,n]$. Ist φ die Abbildung, die bezüglich dieser Basis einem Endomorphismus seine beschreibende Matrix zuordnet, so ist mithin $\varphi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$. ▫

Satz 43 (Lie) *Weiterhin ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit* $\operatorname{char} K = 0$*. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Schreibe $n := \dim \mathfrak{g}$.*

Die folgenden Aussagen $(1,2,3)$ sind äquivalent.

(1) *Es ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.*

(2) *Es ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}$ auflösbar.*

(3) *Es gibt eine Basis von $\mathfrak{g}$ so, daß für den zugehörigen Isomorphismus $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$ gilt, daß $\varphi(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$ ist.*

Damit folgt für K algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{char} K = 0$ nochmals die Implikation $(1,3) \Rightarrow (4)$ in Engel, Satz 40. Denn wegen $\mathfrak{g}$ nilpotent ist $\mathfrak{g}$ auflösbar und mithin $\varphi(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$; da nun $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}$ aus nilpotenten Elementen besteht, so auch $\varphi(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g})$, woraus $\varphi(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ folgt.

Es ist also eine auflösbare endlichdimensionale Liealgebra (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper von Charakteristik 0) "eine Teilalgebra der oberen Dreiecksmatrizen, mit ggf. noch einem untergeschobenen zentralen Stück", da $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \varphi(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}$ und Bemerkung 27.(1, 3); cf. Bemerkung 16.

Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Lemma 42, angewandt auf $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. ▫

Korollar 44 *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra.*

Genau dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, wenn $\mathfrak{g}^{(1)}$ nilpotent ist.

Beweis.

Sei zum einen $\mathfrak{g}^{(1)}$ nilpotent. Dann ist $\mathfrak{g}^{(1)}$ auflösbar; cf. Definition 34. Also gibt es ein $k \geqslant 0$ derart, daß $(\mathfrak{g}^{(1)})^{(k)} = \mathfrak{g}^{(k+1)}$ verschwindet. Also ist $\mathfrak{g}$ auflösbar.

Sei zum anderen $\mathfrak{g}$ auflösbar. Da $\mathrm{Kern}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}^{(1)} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{(1)})$ liegt, genügt es, $\mathfrak{g}^{(1)}/(\mathrm{Kern}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}^{(1)}) \simeq \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^{(1)}) = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})^{(1)}$ als nilpotent nachzuweisen; cf. Bemerkungen 36.(3) und 24.(1), Aufgabe 4.(3).

Nach Lie, Satz 43, ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})$ isomorph zu einer Teilalgebra von $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$, wobei $n := \dim \mathfrak{g}$. Also ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})^{(1)}$ isomorph zu einer Teilalgebra von $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)^{(1)} = \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$; cf. Lösung zu Aufgabe 13.(2). Mit $\mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ ist daher auch $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})^{(1)}$ nilpotent; cf. Aufgabe 13.(1), Bemerkung 36.(2). ▫

2.4 Killingform

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra.

Bemerkung 45 *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.*
Es ist $\mathrm{tr}([g,h] \circ k) = \mathrm{tr}(g \circ [h,k])$ *für* $g,\ h,\ k \in \mathfrak{gl}(V)$.

Beweis. Es ist $\mathrm{tr}([g,h] \circ k) = \mathrm{tr}(g \circ h \circ k) - \mathrm{tr}(h \circ g \circ k) = \mathrm{tr}(g \circ h \circ k) - \mathrm{tr}(g \circ k \circ h) = \mathrm{tr}(g \circ [h,k])$. ▫

Definition 46 Die symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{ccccl} \mathfrak{g} & \times & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\kappa_\mathfrak{g}} & K \\ (g & , & h) & \longmapsto & \kappa_\mathfrak{g}(g,h) \ := \ \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h)\big) \end{array}$$

heißt *Killingform* auf $\mathfrak{g}$.

Bemerkung 47

(1) *Es ist* $\kappa_\mathfrak{g}([g,h],k) = \kappa_\mathfrak{g}(g,[h,k])$ *für* $g,\ h,\ k \in \mathfrak{g}$.

(2) *Ist* $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$, *so ist* $\mathfrak{a}^\perp := \{\, g \in \mathfrak{g} \,:\, \kappa_\mathfrak{g}(g,a) = 0 \text{ für } a \in \mathfrak{a} \,\} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.
Insbesondere ist $\mathrm{rad}\,\kappa_\mathfrak{g} := \mathfrak{g}^\perp \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.

Beweis.

Zu (1). Dank Bemerkung 45 ist

$$\begin{array}{rcl} \kappa_\mathfrak{g}([g,h],k) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}[g,h]) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, k)\big) \\ & = & \mathrm{tr}\big([\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g, \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h] \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, k)\big) \\ & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g) \circ [\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h, \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, k]\big) \\ & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}[h,k])\big) \\ & = & \kappa_\mathfrak{g}(g,[h,k])\ . \end{array}$$

Zu (2). Für $b \in \mathfrak{a}^\perp$ und $g \in \mathfrak{g}$ ist $\kappa_\mathfrak{g}([b,g],a) \overset{(1)}{=} \kappa_\mathfrak{g}(b,[g,a]) = 0$ für $a \in \mathfrak{a}$, also $[b,g] \in \mathfrak{a}^\perp$. ▫

2.5 Cartan-Kriterium

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik 0.

Es ist $\mathbf{Q} \subseteq K$; cf. e.g. [**5,** §2.1].

Lemma 48 *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.*

Seien $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ Teilräume.

Sei $N := \{\, g \in \mathfrak{gl}(V) \,:\, [g, B] \subseteq A \,\} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.

Sei $x \in N$. Ist $\operatorname{tr}(x \circ w) = 0$ für alle $w \in N$, so ist x ein nilpotenter Endomorphismus.

> Ist $\operatorname{char} K = 2$, $\dim V = 2$, $A = 0$ und $B = \mathfrak{gl}(V)$, so ist $N = \langle \mathrm{id} \rangle$. Es ist $\operatorname{tr}(\mathrm{id} \circ w) = 0$ für alle $w \in N$, obwohl id nicht nilpotent ist.

Beweis. Schreibe $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(V)$.

Beachte $N = \{\, g \in \mathfrak{g} \,:\, (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} g)(B) \subseteq A \,\}$. Betrachte die gewöhnliche Jordanzerlegung $x = x_\mathrm{gs} + x_\mathrm{gn}$; cf. Lemma 22. Da $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(x_\mathrm{gs}) = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)_\mathrm{gs}$ ein Polynom ohne konstanten Term in $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$ ist, folgt aus $(\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)(B) \subseteq A \subseteq B$, daß $(\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(x_\mathrm{gs}))(B) \subseteq A$ ist, i.e. $x_\mathrm{gs} \in N$; cf. Bemerkung 23.(2), Lemma 22.(2). Ferner ist $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(x_\mathrm{gs})|_B^B = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)_\mathrm{gs}|_B^B$ halbeinfach; cf. Aufgabe 9.(2).

Sei $n := \dim V$ und $(v_1\,,\,\ldots\,,\,v_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x_gs. Sei $x_\mathrm{gs} v_i = \lambda_i v_i$ mit einem $\lambda_i \in K$ für $i \in [1,n]$. Sei $L = {}_\mathbf{Q}\langle\, \lambda_i \,:\, i \in [1,n] \,\rangle \subseteq K$. Wir haben $L \overset{!}{=} 0$ zu zeigen, denn dann ist $x_\mathrm{gs} = 0$ und also $x = x_\mathrm{gn}$ nilpotent gezeigt.

> Zwar ist $0 = \operatorname{tr}(x \circ x_\mathrm{gs}) = \sum_{i \in [1,n]} \lambda_i^2$ nach Voraussetzung und dank $x_\mathrm{gn} \circ x_\mathrm{gs}$ nilpotent, doch hilft das in K nichts. Wir müssen zu $0 = \sum_{i \in [1,n]} \lambda_i \cdot f(\lambda_i)$ modifizieren mit einem geeigneten f.

Annahme, $L \neq 0$. Dann gibt es eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung $f : L \longrightarrow \mathbf{Q}$ mit $f(\lambda_t) \neq 0$ für ein $t \in [1,n]$. Sei z der halbeinfache Endomorphismus von V, der durch $zv_i = f(\lambda_i)v_i$ für $i \in [1,n]$ definiert ist.

Für $i,\, j \in [1,n]$ sei $e_{i,j} \in \mathfrak{g}$ durch $e_{i,j} v_k = \partial_{j,k} v_i$ für $k \in [1,n]$ definiert.

So ist also $x_\mathrm{gs} = \sum_{i \in [1,n]} \lambda_i\, e_{i,i}$ und $z = \sum_{i \in [1,n]} f(\lambda_i) e_{i,i}$.

Gemäß Bemerkung 23.(1) ist

$$(\operatorname{ad}_\mathfrak{g} z) e_{i,j} \;=\; (f(\lambda_i) - f(\lambda_j)) e_{i,j} \;=\; f(\lambda_i - \lambda_j) e_{i,j}\ .$$

Für $\mu \in K$ ist

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{E}_{\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(x_\mathrm{gs})}(\mu) & \overset{\text{B. 23.(1)}}{=} & \langle\, e_{i,j} \,:\, i,\, j \,\in\, [1,n],\ \lambda_i - \lambda_j = \mu \,\rangle \\ & \subseteq & \langle\, e_{i,j} \,:\, i,\, j \,\in\, [1,n],\ f(\lambda_i - \lambda_j) = f(\mu) \,\rangle \\ & \overset{\text{s.o.}}{=} & \mathrm{E}_{\operatorname{ad}_\mathfrak{g} z}(f(\mu))\ . \end{array}$$

Wir *behaupten,* daß $z \in N$ liegt. Da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}})|_B^B$ halbeinfach ist, genügt es zu zeigen, daß $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} z$ jeden Eigenvektor b von $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}})|_B^B$ nach A abbildet. Schreibe $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}))(b) = \gamma b$ für ein $\gamma \in K$.

Fall $b \in A$. Es ist $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} z)(b) \overset{(*)}{=} f(\gamma)b \in A$.

Fall $b \in B \smallsetminus A$. Aus $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}))(B) \subseteq A$ folgt $\gamma b = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}}))(b) \in A$ und also $\gamma = 0$. Mithin ist $b \in \mathrm{E}_{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_{\mathrm{gs}})}(0) \overset{(*)}{\subseteq} \mathrm{E}_{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} z}(0)$. Also ist auch $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} z)(b) = 0 \in A$.

Dies zeigt die *Behauptung* in beiden Fällen.

Sei $\Lambda := \{\, \lambda_i \,:\, i \in [1,n] \,\}$. Dank Lemma 22.(3) ist $\mathrm{H}_x(\mu) = \mathrm{E}_{x_{\mathrm{gs}}}(\mu)$ für $\mu \in \Lambda$. Es folgt insbesondere $zv = f(\mu)v$ für $v \in \mathrm{H}_x(\mu)$. Die Voraussetzung an x gibt nun

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{tr}(x \circ z) \\
&= \textstyle\sum_{\mu\in\Lambda} \operatorname{tr}\big((x_{\mathrm{gs}} + x_{\mathrm{gn}})|_{\mathrm{H}_x(\mu)}^{\mathrm{H}_x(\mu)} \circ z|_{\mathrm{H}_x(\mu)}^{\mathrm{H}_x(\mu)}\big) \\
&= \textstyle\sum_{\mu\in\Lambda} \operatorname{tr}\big((\mu \operatorname{id}_{\mathrm{H}_x(\mu)} + x_{\mathrm{gn}}|_{\mathrm{H}_x(\mu)}^{\mathrm{H}_x(\mu)}) \circ f(\mu) \operatorname{id}_{\mathrm{H}_x(\mu)}\big) \\
&= \textstyle\sum_{\mu\in\Lambda} \operatorname{tr}\big(\mu \operatorname{id}_{\mathrm{H}_x(\mu)} \circ f(\mu) \operatorname{id}_{\mathrm{H}_x(\mu)}\big) \\
&= \textstyle\sum_{\mu\in\Lambda} \mu \cdot f(\mu) \cdot \dim \mathrm{H}_x(\mu) \\
&= \textstyle\sum_{i\in[1,n]} \lambda_i \cdot f(\lambda_i)\;,
\end{aligned}$$

und somit $0 = f(\operatorname{tr}(x \circ z)) = \sum_{i\in[1,n]} f(\lambda_i)^2 \geqslant f(\lambda_t)^2 > 0$, was ein *Widerspruch* ist. □

Lemma 49 *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$.*

Es ist $\mathfrak{h}$ genau dann auflösbar, wenn $\operatorname{tr}(\mathfrak{h} \circ \mathfrak{h}^{(1)}) = 0$ ist.

Beweis.

Sei zum einen $\mathfrak{h}$ auflösbar. Schreibe $n := \dim V$. Nach Lemma 42 gibt es eine Basis von V so, daß für den zugehörigen Isomorphismus $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{gl}_n(K)$ auch $\varphi(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$ gilt. Folglich ist $\varphi(\mathfrak{h}^{(1)}) = \varphi(\mathfrak{h})^{(1)} \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$; cf. Lösung zu Aufgabe 13.(2). Für $h \in \mathfrak{h}$ und $k \in \mathfrak{h}^{(1)}$ wird also

$$\operatorname{tr}(h \circ k) \;=\; \operatorname{tr}(\varphi(h) \cdot \varphi(k)) \;=\; 0\,,$$

da $\varphi(h) \cdot \varphi(k) \in \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$.

Sei zum anderen $\operatorname{tr}(\mathfrak{h} \circ \mathfrak{h}^{(1)}) = 0$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{h}^{(1)}$ nilpotent ist. Nach Aufgabe 16.(2) genügt es, jedes $h \in \mathfrak{h}^{(1)}$ als nilpotent nachzuweisen.

Sei $N := \{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \,:\, [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}^{(1)} \,\}$. Wollen wir Lemma 48 verwenden, so haben wir $h \overset{!}{\in} N$ und $\operatorname{tr}(h \circ w) \overset{!}{=} 0$ für $w \in N$ zu zeigen.

Für ersteres merken wir an, daß in der Tat $[h, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}^{(1)}$ ist.

Für zweiteres dürfen wir wegen $h \in \mathfrak{h}^{(1)}$ annehmen, daß $h = [k, \ell]$ ist für gewisse $k,\ \ell\ \in\ \mathfrak{h}$. Es ist $[\ell, w] = -[w, \ell] \in \mathfrak{h}^{(1)}$, da $w \in N$. Somit wird

$$\mathrm{tr}(h \circ w) \ = \ \mathrm{tr}([k, \ell] \circ w) \ \overset{\text{B. 45}}{=} \ \mathrm{tr}(\underbrace{k}_{\in \mathfrak{h}} \circ \underbrace{[\ell, w]}_{\in \mathfrak{h}^{(1)}}) \ \overset{\text{Vor.}}{=} \ 0 \ .$$

□

Satz 50 (E. Cartan)

Weiterhin ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}\, K = 0$*.*

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Wir erinnern an die Killingform $\kappa_\mathfrak{g}$ aus §2.4*.*

(1) *Es ist $\mathfrak{g}$ auflösbar genau dann, wenn $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}) = 0$ ist.*

(2) *Es ist* $\mathrm{rad}\, \kappa_\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$.

(3) *Ist $\mathfrak{a}$ ein abelsches Ideal von $\mathfrak{g}$, dann ist* $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{rad}\, \kappa_\mathfrak{g}$.

(4) *Es ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach genau dann, wenn $\kappa_\mathfrak{g}$ nichtausgeartet ist.*

In (2) gilt im allgemeinen keine Gleichheit; cf. Aufgabe 19.(3).

Beweis.

Zu (1). Es ist $\mathfrak{g}$ auflösbar nach Lie, Satz 43, äquivalent zu $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g}$ auflösbar, was nach Lemma 49 äquivalent ist zu $0 = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g}) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g})^{(1)}) \overset{\text{B. 24.(1)}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}) \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^{(1)})) \overset{\text{D. 46}}{=} \kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)})$.

Zu (2). Schreibe $\mathfrak{r} := \mathrm{rad}\, \kappa_\mathfrak{g} \trianglelefteq \mathfrak{g}$; cf. Bemerkung 47.(2). Es ist $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{r}, \mathfrak{g}) = 0$. Insbesondere ist $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}^{(1)}) = 0$. Also ist auch $\kappa_\mathfrak{r}(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}^{(1)}) = 0$; cf. Aufgabe 17.(1). Gemäß (1) ist $\mathfrak{r}$ also auflösbar. Also ist $\mathrm{rad}\, \kappa_\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$; cf. Bemerkung 28.

Zu (3). Wir haben $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) \overset{!}{=} 0$ zu zeigen. Sei $a \in \mathfrak{a}$. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Wir haben $0 \overset{!}{=} \kappa_\mathfrak{g}(a, g) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g))$ zu zeigen. Es genügt, $((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g))^2 \overset{!}{=} 0$ zu zeigen. Für $x \in \mathfrak{g}$ wird

$$\underbrace{(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a) \circ \underbrace{(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g) \circ \underbrace{(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a) \circ \underbrace{(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, g)(x)}_{\in\, \mathfrak{g}}}_{\in\, \mathfrak{a}}}_{\in\, \mathfrak{a}}}_{=\,0} \qquad ,$$

da $\mathfrak{a}$ ein abelsches Ideal ist.

Zu (4). *Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach.* Wir haben $\mathrm{rad}\, \kappa_\mathfrak{g} \overset{(2)}{\subseteq} \mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. Mithin ist $\kappa_\mathfrak{g}$ nichtausgeartet.

Sei umgekehrt $\kappa_\mathfrak{g}$ nichtausgeartet, i.e. $\mathrm{rad}\, \kappa_\mathfrak{g} = 0$. Wegen (3) enthält daher $\mathfrak{g}$ kein abelsches Ideal ungleich 0. Somit ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach; cf. Bemerkung 32.

□

Bemerkung 51 Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Schreibe $n := \dim \mathfrak{g}$.

Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so gibt es nach Engel Satz 40, eine Basis von $\mathfrak{g}$, derbezüglich der Isomorphismus $\varphi : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}_n(K)$ auch $\varphi(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ erfüllt.

Es folgt $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g}) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g})) = \mathrm{tr}(\varphi(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g}) \circ \varphi(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, \mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{tr}(\mathfrak{gl}_n^{>}(K) \circ \mathfrak{gl}_n^{>}(K)) = 0$.

Die Umkehrung gilt nicht; cf. Aufgabe 19.(1).

Beispiel 52 Es ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ eine einfache, also auch halbeinfache Liealgebra; cf. Aufgabe 3, Bemerkung 31.(2).

Wir verwenden die Basis $(e, f, h) = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Ihrbezüglich ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Grammatrix der Killingform $\kappa_\mathfrak{g}$ ergibt sich also zu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} e \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} e) & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} e \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} f) & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} e \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} h) \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} f \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} e) & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} f \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} f) & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} f \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} h) \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} e) & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} f) & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{g} h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} .$$

Da diese regulär ist, ist $\kappa_\mathfrak{g}$ nichtausgeartet; wie auch aus Cartan, Satz 50.(4), folgt.

2.6 Zerlegung halbeinfacher Liealgebren

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}\, K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Ein *einfaches Ideal* in $\mathfrak{g}$ ist ein Ideal, welches zudem eine einfache Liealgebra ist.

Lemma 53 *Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach.*

(1) *Es gibt (bis auf Summandenpermutation) genau eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$ in einfache Ideale $\mathfrak{h}_i \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$, wobei $m \geqslant 0$.*

(2) *Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Es gibt eine Teilmenge $A \subseteq [1, m]$ mit $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{h}_i$. Es sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ halbeinfach.*

Cf. Bemerkung 15.(1).

Beweis.

Zeigen wir die Existenz einer Zerlegung wie in (1). Induktion über $\dim \mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}$ einfach, so sind wir fertig. Ist $\mathfrak{g}$ abelsch, so ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, und wir sind fertig. Ansonsten gibt es $0 \neq \mathfrak{b} \triangleleft \mathfrak{g}$. Nach Aufgabe 23.(2) ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^\perp$. Es ist $\mathfrak{b}$ halbeinfach, da ein nichtverschwindendes abelsches Ideal darin nach Aufgabe 23.(3) auch eines in $\mathfrak{g}$ wäre; cf. Bemerkung 32. Genauso ist $\mathfrak{b}^\perp$ halbeinfach.

Mit Induktion, angewandt auf $\mathfrak{b}$ und auf $\mathfrak{b}^\perp$, gibt es Zerlegungen $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}'_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}'_k$ und $\mathfrak{b}^\perp = \mathfrak{h}''_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}''_\ell$ mit $k,\, \ell \geqslant 0$, $\mathfrak{h}'_i \trianglelefteqslant \mathfrak{b}$ einfach für $i \in [1, k]$ und $\mathfrak{h}''_j \trianglelefteqslant \mathfrak{b}^\perp$ einfach für

$j \in [1, \ell]$. Dank Aufgabe 23.(3) ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}'_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}'_k \oplus \mathfrak{h}''_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}''_\ell$ eine Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in einfache Ideale.

Zeigen wir (2) *für eine Zerlegung* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$ *in einfache Ideale.* Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Sei $A := \{ i \in [1, m] \,:\, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_i \neq 0 \}$.

Für $i \in A$ ist $0 \neq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_i \trianglelefteq \mathfrak{h}_i$, wegen $\mathfrak{h}_i$ einfach also $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_i$, i.e. $\mathfrak{h}_i \subseteq \mathfrak{a}$. Es folgt $\mathfrak{a} \supseteq \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{h}_i$.

Sei $a \in \mathfrak{a}$. Schreibe $a = h_1 + \cdots + h_m$ mit $h_i \in \mathfrak{h}_i$ für $i \in [1, m]$. Für $j \in [1, m] \smallsetminus A$ wird $0 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_j \supseteq [a, \mathfrak{h}_j] = [h_j\,, \mathfrak{h}_j]$, und also $h_j \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_j) = 0$. Es folgt $\mathfrak{a} \subseteq \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{h}_i$.

Insgesamt ist $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{h}_i$.

Die Projektion $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in [1,m]} \mathfrak{h}_j \longrightarrow \bigoplus_{j \in [1,m] \smallsetminus A} \mathfrak{h}_j$ ist ein surjektiver Morphismus von Liealgebren; cf. Bemerkung 15.(1). Da ihr Kern gleich $\mathfrak{a}$ ist, folgt $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \bigoplus_{j \in [1,m] \smallsetminus A} \mathfrak{h}_j$; cf. Aufgabe 4.(3).

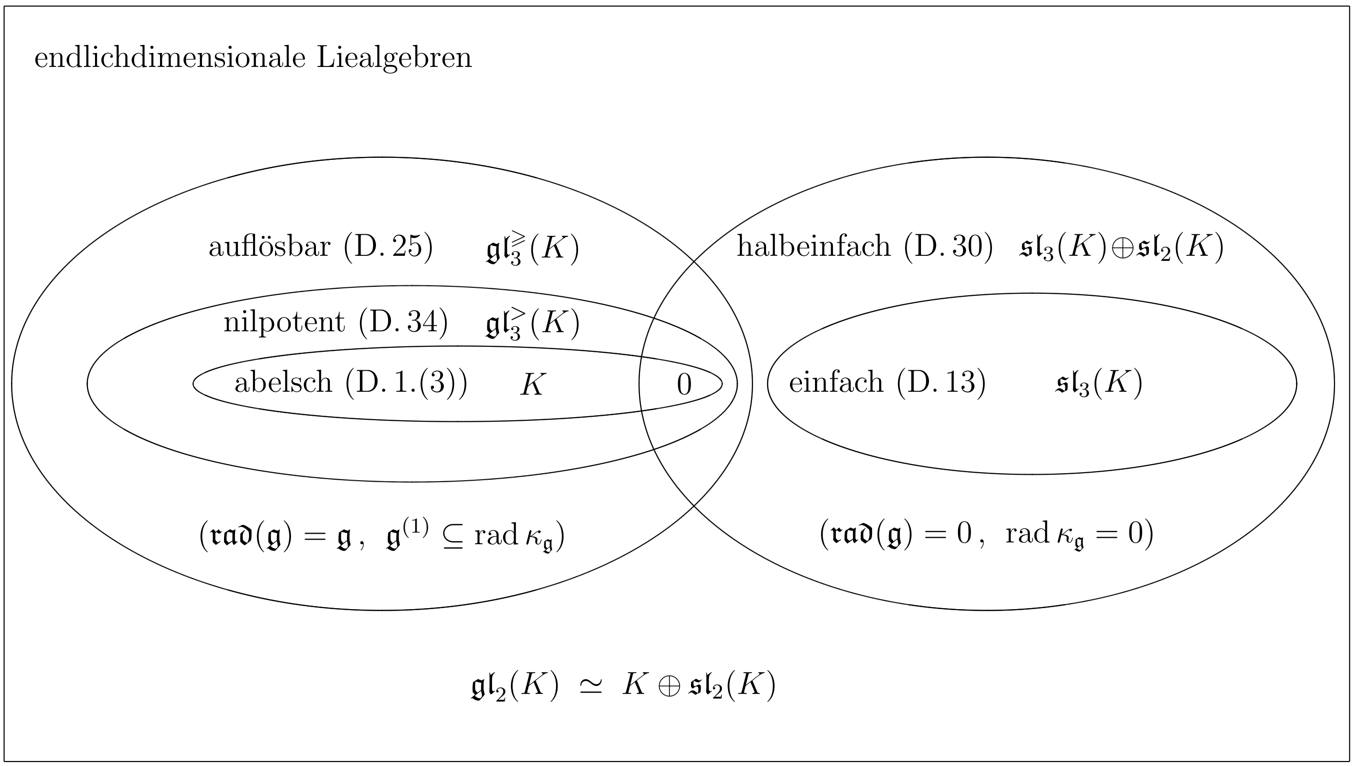
Daher sind $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in A} \mathfrak{h}_i$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \bigoplus_{j \in [1,m] \smallsetminus A} \mathfrak{h}_j$ halbeinfach; cf. Aufgabe 15.(1), Bemerkung 31.(2).

Zeigen wir die Eindeutigkeit der Zerlegung in (1). Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$ eine Zerlegung in einfache Ideale. Es genügt zu zeigen, daß ein einfaches Ideal $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ gleich $\mathfrak{h}_j$ ist für ein $j \in [1, m]$. Denn dann stimmt jeder Summand einer alternativen Zerlegung mit einem der $\mathfrak{h}_j$ überein, was zeigt, daß die Menge der Summanden einer alternativen Zerlegung eine Teilmenge von $\{ \mathfrak{h}_j \,:\, j \in [1, m] \}$ ist, und diese Teilmenge kann nicht echt sein.

Mit vorigem Schritt ist aber $\mathfrak{b} = \bigoplus_{i \in B} \mathfrak{h}_i$ mit $B := \{ i \in [1, m] \,:\, \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}_i \neq 0 \}$. Da $\mathfrak{b}$ einfach ist, enthält B genau ein Element. $\square$

2.7 Eine Übersicht

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Wir geben eine Übersicht über die aufgetretenen Arten von endlichdimensionalen Liealgebren, zusammen mit ein paar Beispielen.



Beachte, daß wegen des einfachen Ideals $\mathfrak{gl}_2(K)^{(1)} = \mathfrak{sl}_2(K) \triangleleft \mathfrak{gl}_2(K)$ die Liealgebra $\mathfrak{gl}_2(K)$ weder auflösbar noch halbeinfach ist; cf. Lösung zu Aufgabe 11, Aufgabe 21. Gegen die Halbeinfachheit spricht auch das abelsche Ideal $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(K)) \trianglelefteq \mathfrak{gl}_2(K)$. Cf. Aufgabe 13.(5). Die Isomorphie zu $K \oplus \mathfrak{sl}_2(K)$ folgt aus Aufgabe 23.(1) oder aus der direkten Zerlegung $\mathfrak{gl}_2(K) = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(K)) \oplus \mathfrak{sl}_2(K)$ in Ideale; cf. Bemerkung 15.(1).

Die Einfachheit von $\mathfrak{sl}_3(K)$ und $\mathfrak{sl}_2(K)$ folgt aus Aufgabe 3, die Halbeinfachheit von $\mathfrak{sl}_3(K) \oplus \mathfrak{sl}_2(K)$ dann aus Bemerkung 31 und Aufgabe 15.(1).

Die Einordnung von $\mathfrak{gl}_3^{>}(K)$ und von $\mathfrak{gl}_3^{\geqslant}(K)$ folgt mit Aufgabe 13.

Ferner ist für eine endlichdimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$, die zugleich auflösbar und halbeinfach ist, bereits $\mathfrak{g} = \mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. Cf. auch Aufgabe 21.

Die angeführten Charakterisierungen von auflösbaren und halbeinfachen Liealgebren über die Killingform $\kappa_{\mathfrak{g}}$ finden sich in Cartan, Satz 50.(1, 4), wenn wir beachten, daß $\mathfrak{g}^{(1)} \subseteq \operatorname{rad} \kappa_{\mathfrak{g}}$ äquivalent ist zu $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}) = 0$ sowie $\operatorname{rad} \kappa_{\mathfrak{g}} = 0$ äquivalent ist zu $\kappa_{\mathfrak{g}}$ nichtausgeartet.

Kapitel 3

Moduln

3.1 Definition

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

Definition 54 Ein $\mathfrak{g}$-*Modul* (M, φ) besteht aus einem Vektorraum M und einem Morphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{gl}(M)$ von Liealgebren, genannt *Operationsmorphismus*. Häufig schreibt man kurz $M = (M, \varphi)$.

Wir schreiben auch $[g, m] := (\varphi(g))(m)$ für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$. In anderen Worten, es wird $\varphi(g) =: [g, -]$ geschrieben.

Für Teilmengen $X \subseteq \mathfrak{g}$ und $Y \subseteq M$ sei $[X, Y] := \langle\, [x, y] \;:\; x \in X,\; y \in Y \,\rangle \subseteq M$. Ist $X = \{x\}$ einelementig, so schreiben wir auch $[x, Y] := [\{x\}, Y]$; analog in zweiter Stelle.

Ist M als Vektorraum endlichdimensional, so sagt man kurz, M sei ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul.

Bemerkung 55 *Sei M ein $\mathfrak{g}$-Modul. Seien $g,\, g' \in \mathfrak{g}$, $m,\, m' \in M$, $\lambda,\, \lambda',\, \mu,\, \mu' \in K$.*

(1) *Es ist* $[\lambda g + \lambda' g',\, m] = \lambda[g, m] + \lambda'[g', m]$ *und* $[g,\, \mu m + \mu' m'] = \mu[g, m] + \mu'[g, m']$.

(2) *Es ist* $[[g, g'], m] = [g, [g', m]] - [g', [g, m]]$.

Beweis.

Zu (1). Es wird

$$[\lambda g + \lambda' g', m] \;=\; (\varphi(\lambda g + \lambda' g'))(m)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda[g, m] + \lambda'[g', m] &= \lambda\varphi(g)(m) + \lambda'\varphi(g')(m) \\ &= (\lambda\varphi(g) + \lambda'\varphi(g'))(m), \end{aligned}$$

was wegen φ linear dasselbe ist.

Es wird
$$[g,\, \mu m + \mu' m'] \;=\; (\varphi(g))(\mu m + \mu' m')$$
und
$$\mu[g,m] + \mu'[g,m'] \;=\; \mu\varphi(g)(m) + \mu'\varphi(g)(m')\ ,$$
was wegen $\varphi(g)$ linear dasselbe ist.

Zu (2). Es wird
$$[[g,g'],m] \;=\; \varphi([g,g'])(m)$$
und
$$\begin{array}{rcl} [g,[g',m]] - [g',[g,m]] & = & \varphi(g)(\varphi(g')(m)) - \varphi(g')(\varphi(g)(m)) \\ & = & (\varphi(g)\circ\varphi(g') - \varphi(g')\circ\varphi(g))(m) \\ & = & [\varphi(g),\varphi(g')](m)\ , \end{array}$$
was wegen φ Morphismus von Liealgebren dasselbe ist. ▫

Bemerkung 56 Auf einem Vektorraum M definiert umgekehrt eine bilineare Abbildung $\mathfrak{g}\times M \longrightarrow M$, $(g,m)\longmapsto [g,m]$, welche $[[g,g'],m] = [g,[g',m]] - [g',[g,m]]$ erfüllt für g, $g'\in\mathfrak{g}$ und $m \in M$, via
$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(M) \\ & & g & \longmapsto & (\varphi(g) : m \longmapsto [g,m]) \end{array}$$
einen $\mathfrak{g}$-Modul (M,φ). Dies kann man durch Uminterpretation der Gleichungen im Beweis von Bemerkung 55 erkennen.

Beispiel 57

(1) Es ist K zusammen mit der Nullabbildung $\mathfrak{g} \xrightarrow{0} \mathfrak{gl}(K)$ der *triviale* $\mathfrak{g}$-Modul.

Allgemeiner wird jeder Vektorraum V zusammen mit der Nullabbildung $\mathfrak{g} \xrightarrow{0} \mathfrak{gl}(V)$ auf triviale Weise zu einem $\mathfrak{g}$-Modul.

(2) Es ist $\mathfrak{g}$ zusammen mit $\mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}} \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ der *reguläre* $\mathfrak{g}$-Modul; cf. Bemerkung 9. Für diesen haben wir für g, $x \in \mathfrak{g}$ in Definition 54 festgelegt, daß $[g,x] := (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(g))(x) = [g,x]$ sein soll, wobei das zweite Auftreten von $[g,x]$ aus der Lieklammer von $\mathfrak{g}$ resultiert.

(3) Ist $M = (M,\varphi)$ ein $\mathfrak{g}$-Modul und ist $\mathfrak{h} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{g}$ ein Morphismus von Liealgebren, dann ist $M|_\mathfrak{h} := (M, \varphi\circ\psi)$ ein $\mathfrak{h}$-Modul, genannt die *Einschränkung* von M auf $\mathfrak{h}$ via ψ.

E.g. gibt es für $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$ den $\mathfrak{h}$-Modul $\mathfrak{g}|_\mathfrak{h}$, eingeschränkt via der Inklusionsabbildung $\mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $h \longmapsto h$.

(4) Sei V ein Vektorraum. Es ist V ein $\mathfrak{gl}(V)$-Modul via $\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}(V)} : \mathfrak{gl}(V) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Dann wird $[g,v] = (\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}(V)}(g))(v) = g(v)$ für $g \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$.

Definition 58 Gegeben seien $\mathfrak{g}$-Moduln $M = (M, \varphi)$ und $N = (N, \psi)$.

(1) Es wird $M \oplus N$ via $[g,(m,n)] := ([g,m],[g,n])$ zu einem $\mathfrak{g}$-Modul, wobei $m \in M$, $n \in N$, $g \in \mathfrak{g}$.

(2) Ein Teilraum $M' \subseteq M$ heiße *($\mathfrak{g}$-)Teilmodul,* falls $[\mathfrak{g}, M'] \subseteq M'$ ist. Diesenfalls ist M' mit der von M eingeschränkten Operation ein $\mathfrak{g}$-Modul.

(3) Ist $M' \subseteq M$ ein Teilmodul, so ist M/M' ein $\mathfrak{g}$-Modul via $[g, m + M'] = [g,m] + M'$ für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$. Siehe Aufgabe 25.(1).

(4) Es heiße M *einfach,* falls $M \neq 0$ ist und M nur die Teilmoduln 0 und M hat.

(5) Es heiße M *halbeinfach,* falls es $k \geqslant 0$ und einfache Teilmoduln $N_1, \ldots, N_k$ von M mit $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$ gibt.

(6) Eine lineare Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ heiße $\mathfrak{g}$-*linear,* falls $f([g,m]) = [g, f(m)]$ ist für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$.

(7) Eine bijektive $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ heiße *Isomorphismus* (von $\mathfrak{g}$-Moduln); geschrieben $M \xrightarrow[\sim]{f} N$; cf. Aufgabe 25.(2). Existiert $M \xrightarrow{\sim} N$, so heißen M und N *isomorph,* geschrieben $M \simeq N$.

Beispiel 59

(1) Im Beweis zu Lemma 39 ist V ein $\mathfrak{h}$-Modul, $\langle v_1 \rangle \subseteq V$ ein Teilmodul und $\mathfrak{h} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{gl}(V/\langle v_1 \rangle)$ der Operationsmorphismus des Faktormoduls $V/\langle v_1 \rangle$.

(2) Wie in (1) auch im Beweis zu Lemma 42.

(3) Im Beweis zu Lemma 37 wird $\mathfrak{g}$ als regulärer $\mathfrak{g}$-Modul angesehen, cf. Beispiel 57.(2), eingeschränkt auf die Teilalgebra $\mathfrak{h}$, cf. Beispiel 57.(3). Im $\mathfrak{h}$-Modul $\mathfrak{g}$ findet sich nun als Teilmodul der reguläre $\mathfrak{h}$-Modul $\mathfrak{h}$, sodaß wir den $\mathfrak{h}$-Faktormodul $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ bilden können, dessen Operationsmorphismus gerade $\tilde{\mathrm{ad}}$ ist.

Bemerkung 60 *Sei M ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Es ist M genau dann halbeinfach, wenn zu jedem Teilmodul $M' \subseteq M$ ein Teilmodul $M'' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus M''$ existiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 25.(5). □

Bemerkung 61 (Schur) *Sei K algebraisch abgeschlossen.*

Sei M ein endlichdimensionaler einfacher $\mathfrak{g}$-Modul.

Sei $M \xrightarrow{f} M$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung.

Dann ist $f = \lambda \, \mathrm{id}_M$ für ein $\lambda \in K$.

Beweis. Siehe Aufgabe 25.(6). □

Bemerkung 62 *Seien* $\mathfrak{g}$*-Moduln* M *und* N *gegeben. Definiere auf dem Vektorraum* $\operatorname{Hom}(M,N)$ *der linearen Abbildungen von* M *nach* N *wie folgt eine* $\mathfrak{g}$*-Modulstruktur. Gegeben* $g \in \mathfrak{g}$ *und* $f \in \operatorname{Hom}(M,N)$*, so bilde* $[g,f] \in \operatorname{Hom}(M,N)$ *ein Element* $m \in M$ *ab nach*

$$[g,f](m) \;:=\; [g,f(m)] - f([g,m]) \;.$$

Für $f \in \operatorname{Hom}(M,N)$ *bedeutet* $[\mathfrak{g},f] = 0$ *gerade, daß* f *eine* $\mathfrak{g}$*-lineare Abbildung ist.*

Insbesondere wird für $g \in \mathfrak{g}$ *und* $f \in M^* := \operatorname{Hom}(M,K)$

$$[g,f](m) \;=\; -f([g,m])$$

für $m \in M$*.*

Beweis. Siehe Aufgabe 25.(7). ▫

3.2 Das Casimir-Element

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Schreibe $n := \dim \mathfrak{g}$. Sei $M = (M,\varphi)$ ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul.

Lemma 63 *Sei* $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ *eine nichtausgeartete Bilinearform, für welche*

$$b([g,h],k) \;=\; b(g,[h,k])$$

ist für $g,\ h,\ k \in \mathfrak{g}$*. Sei* $(x_1,\dots,x_n)$ *eine Basis von* $\mathfrak{g}$*. Sei* $(y_1,\dots,y_n)$ *die dazu bezüglich* b *duale Basis von* $\mathfrak{g}$*, i.e.* $b(x_i,y_j) = \partial_{i,j}$ *für* $i,\ j \in [1,n]$*.*

Die lineare Abbildung

$$c_{\varphi,b} \;:=\; \textstyle\sum_{i\in[1,n]} \varphi(x_i)\circ\varphi(y_i) \;:\; M \longrightarrow M \;,$$

genannt Casimir-Element bezüglich b, *ist* $\mathfrak{g}$*-linear.*

In Aufgabe 28 wird gezeigt, daß $c_{\varphi,b}$ nicht von der Wahl der Basis $(x_1,\dots,x_n)$ abhängt.

Beweis zu Lemma 63. Wir schreiben kurz $c := c_{\varphi,b}$.

Sei $g \in \mathfrak{g}$. Es ist zu zeigen, daß $c([g,m]) \overset{!}{=} [g,c(m)]$ ist für $m \in M$, i.e. $c\circ\varphi(g) \overset{!}{=} \varphi(g)\circ c$, i.e. $[\varphi(g),c] \overset{!}{=} 0$.

Im folgenden erstrecken sich die Summen alle über $[1,n]$. Für $i \in [1,n]$ schreiben wir

$$\begin{array}{rcl} [g,x_i] & =: & \sum_j \xi_{i,j}\, x_j \\ [g,y_i] & =: & \sum_j \eta_{i,j}\, y_j \end{array}$$

mit $\xi_{i,j}\,,\,\eta_{i,j}\,\in\,K$. Für $i,\,k\,\in\,[1,n]$ wird

$$\begin{array}{rcl}
\xi_{i,k} & = & \sum_j\,\xi_{i,j}\,\partial_{j,k} \\
& = & \sum_j\,\xi_{i,j}\,b(x_j\,,y_k) \\
& = & b(\sum_j\,\xi_{i,j}\,x_j\,,y_k) \\
& = & b([g,x_i]\,,y_k) \\
& = & -b([x_i\,,g]\,,y_k) \\
& = & -b(x_i\,,[g\,,y_k]) \\
& = & -b(x_i\,,\sum_j\eta_{k,j}\,y_j) \\
& = & -\sum_j\eta_{k,j}\,b(x_i\,,y_j) \\
& = & -\sum_j\eta_{k,j}\,\partial_{i,j} \\
& = & -\eta_{k,i}\;.
\end{array}$$

Beachte, daß für $a,\,u,\,v\,\in\,\mathfrak{gl}(M)$ sich

$$[a,u]\circ v+u\circ[a,v]\;=\;(a\circ u\circ v-u\circ a\circ v)+(u\circ a\circ v-u\circ v\circ a)\;=\;a\circ u\circ v-u\circ v\circ a\;=\;[a,u\circ v]$$

ergibt. Also wird

$$\begin{array}{rcl}
[\varphi(g),c] & = & \sum_i\,[\varphi(g),\varphi(x_i)\circ\varphi(y_i)] \\
& = & \sum_i\,[\varphi(g),\varphi(x_i)]\circ\varphi(y_i)+\sum_i\varphi(x_i)\circ[\varphi(g),\varphi(y_i)] \\
& = & \sum_i\varphi([g,x_i])\circ\varphi(y_i)+\sum_i\varphi(x_i)\circ\varphi([g,y_i]) \\
& = & \sum_{i,j}\xi_{i,j}\,\varphi(x_j)\circ\varphi(y_i)+\sum_{i,j}\eta_{i,j}\,\varphi(x_i)\circ\varphi(y_j) \\
& = & \sum_{i,j}\xi_{i,j}\,\varphi(x_j)\circ\varphi(y_i)-\sum_{i,j}\xi_{j,i}\,\varphi(x_i)\circ\varphi(y_j) \\
& = & 0\;.
\end{array}$$

□

Definition 64 Die symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{ccccl}
\mathfrak{g} & \times & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\kappa_{\mathfrak{g},\varphi}} & K \\
(g & , & h) & \longmapsto & \kappa_{\mathfrak{g},\varphi}(g,h)\;:=\;\mathrm{tr}\big(\varphi(g)\circ\varphi(h)\big)
\end{array}$$

heißt *Killingform bezüglich* $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(M)$ auf $\mathfrak{g}$.

Es ist $\kappa_{\mathfrak{g},\varphi}([g,h],k)=\kappa_{\mathfrak{g},\varphi}(g,[h,k])$ für $g,\,h,\,k\,\in\,\mathfrak{g}$; cf. Bemerkung 45.

So ist e.g. $\kappa_{\mathfrak{g}}=\kappa_{\mathfrak{g},\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}}$; cf. Definition 46.

Bemerkung 65 *Sei K algebraisch abgeschlossen mit* $\mathrm{char}\,K=0$. *Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei φ injektiv. Dann ist $\kappa_{\mathfrak{g},\varphi}$ nichtausgeartet.*

Im Falle $\varphi=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ folgt dies auch aus Cartan, Satz 50.(4); cf. auch Bemerkung 33.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} := \operatorname{rad} \kappa_{\mathfrak{g},\varphi} = \{ a \in \mathfrak{g} \, : \, \kappa_{\mathfrak{g},\varphi}(a, \mathfrak{g}) = 0 \}$. Wir haben $\mathfrak{a} \overset{!}{=} 0$ zu zeigen.

Es ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, da mit $a \in \mathfrak{a}$ und $g \in \mathfrak{g}$ für $h \in \mathfrak{g}$ folgt, daß $\kappa_{\mathfrak{g},\varphi}([a,g],h) = \kappa_{\mathfrak{g},\varphi}(a,[g,h]) = 0$ ist; cf. auch Bemerkung 47.(2). Es ist

$$\operatorname{tr}\big(\varphi(\mathfrak{a}) \circ \varphi(\mathfrak{a})^{(1)}\big) \;=\; \operatorname{tr}\big(\varphi(\mathfrak{a}) \circ \varphi(\mathfrak{a}^{(1)})\big) \;=\; \kappa_{\mathfrak{g},\varphi}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{(1)}) \;\subseteq\; \kappa_{\mathfrak{g},\varphi}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) \;=\; 0 \;,$$

und also $\mathfrak{a} \simeq \varphi(\mathfrak{a})$ auflösbar; cf. Bemerkung 24.(1), Lemma 49. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, folgt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. ▫

Definition 66 Sei K algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

Wir haben eine eindeutige Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \operatorname{Kern}\varphi$ mit $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$; cf. Lemma 53.(2). Es ist $\varphi|_{\mathfrak{h}}$ injektiv, da $\operatorname{Kern}\varphi|_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \cap \operatorname{Kern}\varphi = 0$. Also ist $\kappa_{\mathfrak{h},\varphi|_{\mathfrak{h}}}$ nichtausgeartet; cf. Lemma 53.(2), Bemerkung 65.

Setze

$$\mathrm{c}_\varphi \;:=\; c_{\varphi|_{\mathfrak{h}}\,,\,\kappa_{\mathfrak{h},\varphi|_{\mathfrak{h}}}} \;:\; M \longrightarrow M \;,$$

Casimir-Element genannt.

Bemerkung 67 *Sei K algebraisch abgeschlossen mit* $\operatorname{char} K = 0$. *Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach.*

(1) *Es ist c_φ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung.*

(2) *Es ist* $\operatorname{tr} \mathrm{c}_\varphi = \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \dim \operatorname{Kern}\varphi$.

(3) *Ist M ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul, so wird* $\mathrm{c}_\varphi = (\dim \mathfrak{g} - \dim \operatorname{Kern}\varphi)/(\dim M)$.

Beweis.

Zu (1). Es ist c_φ eine $\mathfrak{h}$-lineare Abbildung; cf. Lemma 63. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Schreibe $g = h + k$ mit $h \in \mathfrak{h}$ und $k \in \operatorname{Kern}\varphi$. Beachte, daß $[g,m] = (\varphi(g))(m) = (\varphi(h+k))(m) = (\varphi(h))(m) = [h,m]$ ist für $m \in M$. Es wird

$$\mathrm{c}_\varphi([g,m]) \;=\; \mathrm{c}_\varphi([h,m]) \;=\; [h, \mathrm{c}_\varphi(m)] \;=\; [g, \mathrm{c}_\varphi(m)]$$

für $m \in M$.

Zu (2). Schreibe $\ell := \dim \mathfrak{h}$. Sei $(x_1, \ldots, x_\ell)$ eine Basis von $\mathfrak{h}$. Sei $(y_1, \ldots, y_\ell)$ die dazu bezüglich $\kappa_{\mathfrak{h},\varphi|_{\mathfrak{h}}}$ duale Basis von $\mathfrak{h}$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{tr} \mathrm{c}_\varphi & = & \operatorname{tr}\big(\sum_{i\in[1,\ell]} \varphi(x_i) \circ \varphi(y_i)\big) \\
& = & \sum_{i\in[1,\ell]} \operatorname{tr}\big(\varphi(x_i) \circ \varphi(y_i)\big) \\
& = & \sum_{i\in[1,\ell]} \kappa_{\mathfrak{h},\varphi|_{\mathfrak{h}}}(x_i\,,y_i) \\
& = & \sum_{i\in[1,\ell]} \partial_{i,i} \\
& = & \ell \,.
\end{array}$$

Zu (3). Dank (1) und Bemerkung 61 gibt es wegen M einfach ein $\lambda \in K$ mit $\mathrm{c}_\varphi = \lambda$. Mit (2) ergibt sich daraus $(\dim M)\lambda = \operatorname{tr} \mathrm{c}_\varphi = \dim \mathfrak{g} - \dim \operatorname{Kern}\varphi$, und daraus, dank $\operatorname{char} K = 0$, die Aussage. ▫

3.3 Satz von Weyl

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Satz 68 (Weyl) *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra.*

Sei $M = (M, \varphi)$ ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul.

Dann ist M halbeinfach; cf. Definition 58.(5).

Beweis. Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Wir haben zu zeigen, daß es einen Teilmodul M'' gibt mit $M' \oplus M'' = M$; cf. Bemerkung 60.

Wir *behaupten* die Existenz eines M'' wie benötigt, falls $\dim M = 1 + \dim M'$.

Wir führen eine Induktion nach $\dim M'$. Ist $\dim M' = 0$, so setze $M'' := M$. Sei nun $\dim M' \geqslant 1$.

Fall M' nicht einfach. Sei $0 \subset N \subset M'$ ein Teilmodul. Es ist $M'/N \subseteq M/N$ ein Teilmodul mit $\dim(M/N) = 1 + \dim(M'/N)$. Mit Induktion gibt es einen Teilmodul $N \subseteq X \subseteq M$ mit $(M'/N) \oplus (X/N) = M/N$, i.e. mit $M' + X = M$ und $M' \cap X = N$. Es ist $\dim(X/N) = 1$, und also $\dim X = 1 + \dim N$. Abermals mit Induktion gibt es einen Teilmodul $M'' \subseteq X$ mit $X = N \oplus M''$. Es folgt $M = M' + X = M' + N + M'' = M' + M''$. Ist ferner $m \in M' \cap M''$, so folgt $m \in M' \cap M'' \subseteq M' \cap X = N$, und also $m \in N \cap M'' = 0$. Also ist $M = M' \oplus M''$.

$$\begin{tikzcd}
 & M & & \\
M' \arrow[ur] & & X \arrow[ul] & \\
 & N \arrow[ul] \arrow[ur] & & M'' \arrow[ul] \\
 & & 0 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Fall M' einfach.

Subfall $\varphi = 0$. Ein Teilmodul ist dasselbe wie ein Teilraum, und das Resultat folgt aus der Linearen Algebra.

Subfall $\varphi \neq 0$. Setze $M'' := \operatorname{Kern} \mathrm{c}_\varphi$. Dies ist ein Teilmodul von M ; cf. Bemerkung 67.(1), Aufgabe 25.(3).

Es operiert $\mathfrak{g}$ trivial auf dem eindimensionalen $\mathfrak{g}$-Modul M/M' ; cf. Aufgabe 24. Also ist $(\varphi(g))(M) \subseteq M'$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. Somit ist auch $\mathrm{c}_\varphi(M) \subseteq M'$; cf. Lemma 63, Definition 66. Bezüglich einer Basis von M, die aus einer Basis von M' erweitert wurde, hat c_φ wegen M' einfach somit die Blockmatrixform $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ * & \lambda' \mathrm{E} \end{smallmatrix}\right)$ für ein $\lambda' \in K$, wobei E eine Einheitsmatrix bezeichnet; cf. Bemerkung 61.

Also ist $\dim \mathfrak{g} - \dim \operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{tr} \mathrm{c}_\varphi = (\dim M')\lambda'$; cf. Bemerkung 67.(2). Da $\varphi \neq 0$, folgt $\operatorname{Kern} \varphi \subset \mathfrak{g}$ und also $\lambda' \neq 0$. Somit ist $\dim M'' = \dim \operatorname{Kern} \mathrm{c}_\varphi = 1$. Ist ferner $m \in M' \cap M''$, so ist $\lambda' m = \mathrm{c}_\varphi(m) = 0$. Somit ist $M' \cap M'' = 0$. Insgesamt ist $M = M' \oplus M''$.

Dies zeigt die *Behauptung*.

Allgemein ist uns ein Teilmodul $M' \subseteq M$ beliebiger Dimension vorgegeben.

Ist $\dim M' = 0$, so setzen wir $M'' := M$.

Sei nun $\dim M' \geqslant 1$.

Es ist $\mathrm{Hom}(M, M')$ ein $\mathfrak{g}$-Modul; cf. Bemerkung 62. Wir haben darin die Teilmoduln

$$\begin{array}{lcl} H & := & \{\, f \in \mathrm{Hom}(M, M') \;:\; f|_{M'} = \mu \,\mathrm{id}_{M'} \text{ für ein } \mu \in K \,\} \\ H' & := & \{\, f \in \mathrm{Hom}(M, M') \;:\; f|_{M'} = 0 \,\} \,. \end{array}$$

In der Tat gibt es für $f \in H$ ein $\mu \in K$ mit $f|_{M'} = \mu \,\mathrm{id}_{M'}$, sodaß für $g \in \mathfrak{g}$ sich

$$[g, f](m') \;=\; [g, f(m')] - f([g, m']) \;=\; [g, \mu m'] - \mu[g, m'] \;=\; 0$$

ergibt für $m' \in M'$, und somit sogar $[g, f] \in H'$. Dies trifft auch für $f \in H' \subseteq H$ zu.

Es ist $\dim H = 1 + \dim H'$, da H' der Kern der surjektiven linearen Abbildung $H \longrightarrow \langle \mathrm{id}_{M'} \rangle$, $f \longmapsto f|_{M'}$ ist; hierbei folgt die Surjektivität aus der Existenz einer linearen Abbildung $M \longrightarrow M'$, die mit der Inklusionsabbildung $M' \longrightarrow M$ zur Identität komponiert. Gemäß vorstehender Behauptung gibt es also ein $h'' \in H \smallsetminus H'$ so, daß $\langle h'' \rangle \subseteq H$ ein Teilmodul ist und sich $H = H' \oplus \langle h'' \rangle$ ergibt. Durch Reskalieren dürfen wir $h''|_{M'} = \mathrm{id}_{M'}$ annehmen, da $h'' \notin H'$.

Da $\langle h'' \rangle$ eindimensional ist, ist $[g, h''] = 0$ für $g \in \mathfrak{g}$; cf. Aufgabe 24. Also ist h'' eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung. Somit ist $\mathrm{Kern}\, h'' \subseteq M$ ein Teilmodul; cf. Aufgabe 25.(3).

Sei $m \in M$. Wir können $m = h''(m) + (m - h''(m))$ schreiben, und es liegt $m - h''(m) \in \mathrm{Kern}\, h''$. Somit ist $M = \mathrm{Im}\, h'' + \mathrm{Kern}\, h''$.

Sei $m \in \mathrm{Im}\, h'' \cap \mathrm{Kern}\, h''$. Dann ist $m = h''(n)$ für ein $n \in M$. Es wird $0 = h''(m) = h''(h''(n)) = \mathrm{id}_{M'}(h''(n)) = m$. Also ist $0 = \mathrm{Im}\, h'' \cap \mathrm{Kern}\, h''$.

Insgesamt folgt $M = \mathrm{Im}\, h'' \oplus \mathrm{Kern}\, h'' = M' \oplus \mathrm{Kern}\, h''$. $\square$

Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra, so liefert Weyl, Satz 68, angewandt auf den regulären $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{g}$, eine direkte Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$ in einfache Teilmoduln, d.h. in Ideale, die als $\mathfrak{g}$-Moduln einfach sind. Keiner der Summanden ist eine abelsche Liealgebra, cf. Bemerkung 32. Die Lieklammerbildung erfolgt summandenweise; cf. Bemerkung 15. Für $i \in [1, m]$ ist also ein $\mathfrak{h}_i$-Teilmodul von $\mathfrak{h}_i$ auch ein $\mathfrak{g}$-Teilmodul von $\mathfrak{h}_i$, und somit in $\{0, \mathfrak{h}_i\}$. Also sind die $\mathfrak{h}_i$ einfache Ideale von $\mathfrak{g}$.

Eine solche Zerlegung wurde auch schon in Lemma 53 hergeleitet. Nur brauchen wir Lemma 53 für das Casimir-Element in Definition 66, welches wiederum für Weyl, Satz 68 gebraucht wird (Beweis der Behauptung, Fall M' einfach).

3.4 Jordan-Zerlegung (abstrakt)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}\, K = 0$.

Lemma 69 *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ mit $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Dann sind $g_{\mathrm{gs}}\,,\, g_{\mathrm{gn}} \,\in\, \mathfrak{g}$.*

Cf. auch Aufgabe 16.(6).

Beweis. Es ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul vermöge der Einbettung $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Für $g \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$ ist also $[g, v] = g(v)$.

Definiere den Teilraum

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{n} & := & \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \cap \{\, x \in \mathfrak{gl}(V) \;:\; \text{für alle } \mathfrak{g}\text{-Teilmoduln } W \subseteq V \text{ ist } x(W) \subseteq W \text{ und } \operatorname{tr}(x|_W^W) = 0 \,\} \\
& \subseteq & \mathfrak{gl}(V)\;;
\end{array}
$$

cf. §1.2.3.

Mit der Spurbedingung wird unter anderem id_V aus $\mathfrak{n}$ entfernt.

Wir *behaupten,* daß mit $x \in \mathfrak{n}$ auch $x_{\mathrm{gs}}\,,\, x_{\mathrm{gn}} \,\in\, \mathfrak{n}$ liegen. Es genügt, dies für x_{gn} zu zeigen, da $x_{\mathrm{gs}} = x - x_{\mathrm{gn}}$.

Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_{\mathrm{gn}}) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)_{\mathrm{gn}}$ ein Polynom in $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x$ ohne konstanten Term; cf. Lemma 22.(2), Bemerkung 23.(2). Da $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x)(\mathfrak{g}) = [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$, ist also auch $[x_{\mathrm{gn}}, \mathfrak{g}] = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_{\mathrm{gn}}))(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$, i.e. $x_{\mathrm{gn}} \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$.

Sei $W \subseteq V$ ein $\mathfrak{g}$-Teilmodul. Da x_{gn} ein Polynom in x ohne konstanten Term ist, folgt aus $x(W) \subseteq W$, daß $x_{\mathrm{gn}}(W) \subseteq W$ liegt. Da $x_{\mathrm{gn}}|_W^W$ wie x_{gn} nilpotent ist, verschwindet seine Spur.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Es bleibt also $\mathfrak{g} \overset{!}{=} \mathfrak{n}$ zu zeigen.

Es ist $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$: Seien dazu $x, y \,\in\, \mathfrak{n}$ gegeben. Sei $W \subseteq V$ ein $\mathfrak{g}$-Teilmodul. Es ist $[x, y](W) = (x \circ y - y \circ x)(W) \subseteq W$. Es ist $\operatorname{tr}([x, y]|_W^W) = \operatorname{tr}[x|_W^W\,, y|_W^W] = 0$.

Es ist $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{n}$, da wegen $\mathfrak{g}$ halbeinfach für jeden $\mathfrak{g}$-Teilmodul $W \subseteq V$ das Bild von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{gl}(W)$ unter $g \longmapsto g|_W^W$ in $\mathfrak{sl}(W)$ liegt; cf. Aufgabe 24.

Es ist $\mathfrak{g} \trianglelefteqslant \mathfrak{n}$, da $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$.

Es ist $\mathfrak{n} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$, da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, wobei $\mathfrak{g}^{\perp}$ bezüglich $\kappa_{\mathfrak{n}}$ zu bilden ist und dann $\mathfrak{g}^{\perp} \trianglelefteqslant \mathfrak{n}$ wird; cf. Aufgabe 23.(1) und Bemerkung 47.

Sei $h \in \mathfrak{g}^{\perp}$. Wir haben $h \overset{!}{=} 0$ zu zeigen. Da $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\perp}] \subseteq \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^{\perp} = 0$, ist $h \circ g - g \circ h = [h, g] = 0$ für $g \in \mathfrak{g}$.

Mit Weyl, Satz 68, können wir ein $s \geqslant 0$ und einfache $\mathfrak{g}$-Teilmoduln $V_i \subseteq V$ für $i \in [1, s]$ so finden, daß $V = \bigoplus_{i \in [1,s]} V_i$ ist.

Sei $i \in [1, s]$. Es ist $h(V_i) \subseteq V_i$, da $h \in \mathfrak{n}$. Es ist $h|_{V_i}^{V_i}$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung, denn für $v \in V_i$ ist $[g, h(v)] = g(h(v)) = h(g(v)) = h([g, v])$. Also gibt es ein $\lambda_i \in K$ mit $h|_{V_i}^{V_i} = \lambda_i$;

cf. Bemerkung 61. Wegen $h \in \mathfrak{n}$ ist aber auch $0 = \operatorname{tr}(h|_{V_i}^{V_i}) = (\dim V_i)\lambda_i$, also $\lambda_i = 0$ dank $\operatorname{char} K = 0$, und somit $h|_{V_i}^{V_i} = 0$.

Insgesamt zeigt dies $h = 0$. ▫

Satz 70 (Jordan, abstrakt)

Weiterhin ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra.

Sei $g \in \mathfrak{g}$. Es gibt genau ein $(g_{\mathrm{as}}\, , \, g_{\mathrm{an}}) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ so, daß $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}})$ halbeinfach, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}})$ nilpotent, $g = g_{\mathrm{as}} + g_{\mathrm{an}}$ und $[g_{\mathrm{as}}\, , g_{\mathrm{an}}] = 0$ ist.

Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}}) & = & (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gs}} \\ \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}}) & = & (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gn}} \ ; \end{array}$$

cf. Lemma 22.(1). *Auch diese beiden Gleichungen legen $(g_{\mathrm{as}}\, , g_{\mathrm{an}})$ fest.*

Das Paar $(g_{\mathrm{as}}\, , \, g_{\mathrm{an}})$ heißt *abstrakte Jordan-Zerlegung* von g. Cf. Lemma 22.

Beweis. Vorbemerkung. Sei $(u, v) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Wegen der Injektivität von $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ aus Bemerkung 33 ist ($g = u+v$ und $[u, v] = 0$) äquivalent zu ($\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(u+v)$ und $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}[u, v] = 0$), was äquivalent ist zu ($\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} u + \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} v$ und $[\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} u, \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} v] = 0$). Somit genügt es zu zeigen, daß es genau ein $(g_{\mathrm{as}}\, , \, g_{\mathrm{an}}) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ so gibt, daß $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}})$ halbeinfach, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}})$ nilpotent, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}}) + \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}})$ und $[\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}}), \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}})] = 0$ ist.

Eindeutigkeit. Sei $(u, v) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ so, daß $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} u$ halbeinfach, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} v$ nilpotent, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} u + \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} v$ und $[\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} u, \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} v] = 0$ ist. Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} u = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gs}}$ und $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} v = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gn}}$; cf. Lemma 22.(1). Da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ injektiv ist, zeigt dies die Eindeutigkeit.

Existenz. Dank Lemma 69 liegen mit $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g$ auch $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gs}}$ und $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gn}}$ in $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$; cf. Bemerkung 33. Wähle $(g_{\mathrm{as}}\, , \, g_{\mathrm{an}}) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ so, daß $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}}), \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}})) = ((\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gs}}\, , \, (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gn}})$ ist. Die behaupteten Eigenschaften folgen; cf. Lemma 22.(1). ▫

Bemerkung 71 *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ mit $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Dann ist $g_{\mathrm{gs}} = g_{\mathrm{as}}$ und $g_{\mathrm{gn}} = g_{\mathrm{an}}$.*

Diesenfalls kann man auch kurz von der *Jordanzerlegung* von g reden.

Beweis. Gemäß Lemma 69 ist $g_{\mathrm{gn}} \in \mathfrak{g}$. Mit Jordan, Satz 70, ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}}) = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g)_{\mathrm{gn}}$. Mit Bemerkung 23.(2) ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(g_{\mathrm{gn}}) = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} g)_{\mathrm{gn}}$. Schreibe $\mathfrak{g} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{gl}(V)$ für die Inklusionsabbildung. Wir haben das kommutative Viereck linearer Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}(V) \arrow[r, "\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} g"] & \mathfrak{gl}(V) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

mit vertikalen Inklusionen. Aufgabe 9.(3) gibt uns daraus das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}(V) \arrow[r, "(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, g)_{\mathrm{gn}}"] & \mathfrak{gl}(V) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)_{\mathrm{gn}}"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} .$$

Desweiteren haben wir das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}(V) \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(g_{\mathrm{gn}})"] & \mathfrak{gl}(V) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{gn}})"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} .$$

Wir erhalten

$$\iota \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{gn}}) \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(g_{\mathrm{gn}}) \circ \iota \;=\; (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, g)_{\mathrm{gn}} \circ \iota = \iota \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)_{\mathrm{gn}} \;=\; \iota \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}}) \;.$$

Da ι injektiv ist, folgt $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{gn}}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{an}})$. Da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ nach Bemerkung 33 injektiv ist, folgt $g_{\mathrm{gn}} = g_{\mathrm{an}}$.

Schließlich wird $g_{\mathrm{gs}} = g - g_{\mathrm{gn}} = g - g_{\mathrm{an}} = g_{\mathrm{as}}$. ▫

Bemerkung 72 *Sei* $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ *ein Morphismus von halbeinfachen endlichdimensionalen Liealgebren. Sei* $g \in \mathfrak{g}$*. Es ist* $\varphi(g_{\mathrm{as}}) = \varphi(g)_{\mathrm{as}}$ *und* $\varphi(g_{\mathrm{an}}) = \varphi(g)_{\mathrm{an}}$.

Beweis. Siehe Aufgabe 30. ▫

Korollar 73
Sei V *ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei* $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ *eine halbeinfache Teilalgebra.*

Sei $W = (W, \varphi)$ *ein endlichdimensionaler* $\mathfrak{g}$*-Modul. Sei* $g \in \mathfrak{g}$.

Ist g *ein halbeinfacher Endomorphismus von* V*, so ist* $\varphi(g)$ *ein halbeinfacher Endomorphismus von* W.

Ist g *ein nilpotenter Endomorphismus von* V*, so ist* $\varphi(g)$ *ein nilpotenter Endomorphismus von* W.

Beweis. Sei g ein halbeinfacher Endomorphismus von V. Dann ist $g = g_{\mathrm{gs}} = g_{\mathrm{as}}$, letzteres genommen in $\mathfrak{g}$; cf. Bemerkung 71. Verwenden wir die halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}/\mathrm{Kern}\,\varphi \simeq \varphi(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}(W)$, cf. Lemma 53.(2), und den Morphismus

$$\bar{\varphi} \;:=\; \varphi|^{\varphi(\mathfrak{g})} \;:\; \mathfrak{g} \longrightarrow \varphi(\mathfrak{g})$$

halbeinfacher endlichdimensionaler Liealgebren, so folgt

$$\varphi(g) \;=\; \varphi(g_{\mathrm{as}}) = \bar{\varphi}(g_{\mathrm{as}}) \;\overset{\mathrm{B.72}}{=}\; \bar{\varphi}(g)_{\mathrm{as}} \;=\; \varphi(g)_{\mathrm{as}} \;\overset{\mathrm{B.71}}{=}\; \varphi(g)_{\mathrm{gs}} \;,$$

i.e. $\varphi(g)$ ist ein halbeinfacher Endomorphismus von W.

Analog im nilpotenten Fall.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}(V) & \mathfrak{gl}(W) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\bar{\varphi}"'] & \varphi(\mathfrak{g}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

□

3.5 Moduln von $\mathfrak{sl}_2(K)$

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Wir verwenden die Basis

$$(e, f, h) \;=\; \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right)$$

von $\mathfrak{sl}_2(K)$ wie in der Lösung zu Aufgabe 2. Es ist

$$[e, f] \;=\; h\,, \qquad [h, e] \;=\; 2e\,, \qquad [h, f] \;=\; -2f\,.$$

Nach Aufgabe 3 ist $\mathfrak{sl}_2(K)$ einfach, also auch halbeinfach; cf. Bemerkung 31.(2).

Sei $M = (M, \varphi)$ ein endlichdimensionaler $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul. Hierbei ist $\varphi : \mathfrak{sl}_2(K) \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$.

Definition 74 Für $\lambda \in K$ schreiben wir $M_\lambda := \mathrm{E}_{\varphi(h)}(\lambda) = \{\, m \in M \;:\; [h, m] = \lambda m \,\}$. Ist $M_\lambda \neq 0$, so heißt λ ein *Gewicht* und M_λ ein *Gewichtsraum* von M. Die Menge der Gewichte von M schreiben wir $\gamma(M) \subseteq K$; dies ist gerade die Menge der Eigenwerte von $\varphi(h)$. Da M endlichdimensional ist, ist $\gamma(M)$ endlich. Ist $M \neq 0$, so ist $\gamma(M) \neq \emptyset$.

Bemerkung 75

(1) *Es ist $\varphi(h)$ halbeinfach. Es sind $\varphi(e)$ und $\varphi(f)$ nilpotent.*

(2) *Es ist $M = \bigoplus_{\lambda \in \gamma(M)} M_\lambda$.*

Beweis. Es folgt (1) aus Korollar 73. Die direkte Zerlegung von M in die Eigenräume von $\varphi(h)$, die in (2) behauptet wird, folgt dank Korollar 73 aus der Halbeinfachheit des Endomorphismus $\varphi(h)$ von M. □

Bemerkung 76 *Sei $\lambda \in K$. Sei $m \in M_\lambda$.*

Dann ist $[e, m] \in M_{\lambda+2}$ und $[f, m] \in M_{\lambda-2}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{array}{rcl} [h,[e,m]] &=& [[h,e],m]+[e,[h,m]] &=& 2[e,m]+\lambda[e,m] &=& (\lambda+2)[e,m] \\ [h,[f,m]] &=& [[h,f],m]+[f,[h,m]] &=& -2[f,m]+\lambda[f,m] &=& (\lambda-2)[f,m]\,. \end{array}$$

□

Die Bemerkungen 75.(2) und 76 zeigen wegen $\gamma(M)$ endlich abermals, daß $\varphi(e)$ und $\varphi(f)$ nilpotent sind.

Definition 77 Ein Gewicht $\mu \in \gamma(M)$ mit $\mu+2 \notin \gamma(M)$ heißt *maximal*. Da $\gamma(M)$ endlich ist, gibt es darin ein maximales Gewicht, falls $M \neq 0$.

Bemerkung 78 Sei $\mu \in \gamma(M)$ ein maximales Gewicht. Sei $m_0 \in M_\mu$. Setze

$$m_k \;:=\; (k!)^{-1}(\varphi(f))^k(m_0) \;\in\; M_{\mu-2k}$$

für $k \geqslant 1$. Setze $m_{-1} := 0$.

Für $k \geqslant 0$ wird

$$\begin{array}{rcl} [h,m_k] &=& (\mu-2k)m_k \\ [e,m_k] &=& (\mu-k+1)m_{k-1} \\ [f,m_k] &=& (k+1)m_{k+1}\,. \end{array}$$

Beweis. Siehe Aufgabe 33.(1). □

Bemerkung 79 *Sei $\ell \geqslant 0$. Sei $V_{\ell+1}$ ein Vektorraum mit einer Basis $(v_0\,,\ldots,\,v_\ell)$, ausgestattet mit $\psi_{\ell+1} : \mathfrak{sl}_2(K) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_{\ell+1})$, gegeben bezüglich dieser Basis durch*

$$\psi_{\ell+1}(h) \;:=\; \begin{pmatrix} \ell & & & \\ & \ell-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\ell \end{pmatrix}, \quad \psi_{\ell+1}(e) \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & \ell & & & \\ & 0 & \ell-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\ell+1}(f) \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $V_{\ell+1} = (V_{\ell+1},\psi_{\ell+1})$ ein einfacher $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul, mit

$$[h,v_k] \;=\; (\ell-2k)v_k\,, \qquad [e,v_k] \;=\; (\ell-k+1)v_{k-1}\,, \qquad [f,v_k] \;=\; (k+1)v_{k+1}$$

für $k \in [0,\ell]$, wobei $v_{-1} := 0$ und $v_{\ell+1} := 0$.

Beweis. Es ist $\psi_{\ell+1}$ eine lineare Abbildung. Da

$$\begin{array}{rcrcl} [\psi_{\ell+1}(e),\psi_{\ell+1}(f)] &=& \psi_{\ell+1}(h) &=& \psi_{\ell+1}([e,f]) \\ [\psi_{\ell+1}(h),\psi_{\ell+1}(e)] &=& 2\psi_{\ell+1}(e) &=& \psi_{\ell+1}([h,e]) \\ [\psi_{\ell+1}(h),\psi_{\ell+1}(f)] &=& -2\psi_{\ell+1}(f) &=& \psi_{\ell+1}([h,f])\,, \end{array}$$

ist $\psi_{\ell+1}$ ein Morphismus von Liealgebren, wie man durch bilineare Fortsetzung erkennt.

Um die Einfachheit zu zeigen, sei ein Teilmodul $0 \neq X \subseteq V_{\ell+1}$ gegeben. Wir haben $X \overset{!}{=} V_{\ell+1}$ zu zeigen. Sei $x \in X \smallsetminus \{0\}$. Anwenden einer Potenz von $\psi_{\ell+1}(f)$ gibt ein nichtverschwindendes Vielfaches von v_ℓ in X. Iteriertes Anwenden von $\psi_{\ell+1}(e)$ zeigt nun, daß alle Vektoren der Basis $(v_0\,,\ldots,\,v_\ell)$ von $V_{\ell+1}$ in X liegen. Also ist $X = V_{\ell+1}$. □

Lemma 80 *Sei der endlichdimensionale $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul M einfach.*
Schreibe $\ell := (\dim M) - 1 \geqslant 0$.

(1) *Es ist* $M \simeq V_{\ell+1}$.

(2) *Es ist* $\gamma(M) = \{\, \ell - 2i \;:\; i \in [0, \ell] \,\}$.

(3) *Es ist* $\dim M_\lambda = 1$ *für alle* $\lambda \in \gamma(M)$.

Beweis. Sei $\mu \in \gamma(M)$ ein maximales Gewicht. Sei $m_0 \in M_\mu \smallsetminus \{0\}$. Wir verwenden die Bezeichnungen von Bemerkung 78. *Wäre* $m_k \neq 0$ für alle $k \geqslant 0$, dann wäre das Tupel $(\, m_k \,:\, k \geqslant 0 \,)$ linear unabhängig, da aus Eigenvektoren von $\varphi(h)$ zu verschiedenen Eigenwerten bestehend, im *Widerspruch* zu M endlichdimensional. Wir können also ein minimales $\ell' \geqslant 0$ wählen mit $m_{\ell'} \neq 0$, aber $m_{\ell'+1} = 0$. Also ist $m_i \neq 0$ für $i \in [0, \ell']$, sowie $m_{-1} = 0$ und $m_{\ell'+1} = 0$. Dank loc. cit. ist $\langle\, m_i \,:\, i \in [0, \ell'] \,\rangle$ ein nichtverschwindender Teilmodul von M, und somit gleich M, da M einfach ist. Da $m_i \in M_{\mu-2i}$ für $i \in [0, \ell']$ und da $M = \bigoplus_{i\in[0,\ell']} \langle m_i \rangle$, folgt $M_{\mu-2i} = \langle m_i \rangle$ für $i \in [0, \ell']$, $\gamma(M) = \{\mu - 2i \;:\; i \in [0, \ell']\}$ sowie $\ell' = (\dim M) - 1 = \ell$.

Es ist $0 = [e, m_{\ell+1}] = (\mu - \ell) m_\ell$ nach loc. cit. Folglich ist $\mu = \ell$.

Nun zeigt loc. cit., daß $V_{\ell+1} \longrightarrow M,\; v_i \longmapsto m_i$ für $i \in [0, \ell]$, ein Isomorphismus von $\mathfrak{sl}_2(K)$-Moduln ist. $\square$

Bemerkung 81

(1) *Es ist* $\gamma(M) \subseteq \mathbf{Z}$.

(2) *Sei* $\lambda \in K$. *Es ist* $\dim M_\lambda = \dim M_{-\lambda}$. *Insbesondere liegt* $\lambda \in \gamma(M)$ *genau dann, wenn* $-\lambda \in \gamma(M)$ *liegt. I.e. es ist* $\gamma(M) = -\gamma(M)$.

(3) *Es zerfällt* M *in eine direkte Summe von* $\dim M_0 + \dim M_1$ *einfachen Moduln.*

(4) *Ist* $M_0 = 0$, *so ist* $\gamma(M) \subseteq 2\mathbf{Z} + 1$.

Beweis. Nach Weyl, Satz 68, ist M direkte Summe einfacher Moduln. Da für endlichdimensionale $\mathfrak{sl}_2(K)$-Moduln M' und M'' und $\lambda \in K$ gilt, daß $(M' \oplus M'')_\lambda = M'_\lambda \oplus M''_\lambda$ und $\gamma(M' \oplus M'') = \gamma(M') \cup \gamma(M'')$ ist, folgen die Aussagen daraus, daß sie für einfache endlichdimensionale $\mathfrak{sl}_2(K)$-Moduln gelten; was wiederum Lemma 80 zu entnehmen ist. $\square$

Kapitel 4

Wurzelsystem einer halbeinfachen Liealgebra

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Wir identifizieren $\mathbf{Z} \subseteq K$.

4.1 Tori

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra.

Definition 82 Eine Teilalgebra $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ heißt ein *Torus* in $\mathfrak{g}$, falls der Endomorphismus $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} t \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ halbeinfach ist für alle $t \in \mathfrak{t}$; cf. Definition 21.(1).

Ein Torus $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ heißt *maximal,* falls aus $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}$ Torus folgt, daß $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$ ist.

Es ist $0 \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus. Also existiert in $\mathfrak{g}$ aus Dimensionsgründen ein maximaler Torus.

> Die Sonderrolle als Zerleger, die in §3.5 vom Element $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ wahrgenommen wurde, soll hier von einem maximalen Torus übernommen werden.

Bemerkung 83 Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, dann ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus genau dann, wenn $t = t_{\mathrm{as}}$ ist für alle $t \in \mathfrak{t}$; cf. Jordan, Satz 70. Ist zudem $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V, dann ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus genau dann, wenn $t = t_{\mathrm{gs}}$ ist für alle $t \in \mathfrak{t}$; cf. Bemerkung 71. Diesenfalls ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ also genau dann ein Torus, wenn alle seine Elemente halbeinfache Endomorphismen von V sind.

So sind e.g. $\mathfrak{t} := \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ und $\mathfrak{t}' := \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ Tori in $\mathfrak{sl}_3(K)$; cf. Aufgabe 3, Bemerkung 31.(2). Aber es ist auch für jede invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(K)$ die Teilalgebra $S^{-1}\mathfrak{t}'S \leqslant \mathfrak{sl}_3(K)$ ein Torus.

Bemerkung 84 *Sei* $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ *ein Torus. Es ist* $\mathfrak{t}$ *abelsch.*

Beweis. Für $t \in \mathfrak{t}$ ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{t}\, t = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, t|_\mathfrak{t}^\mathfrak{t}$ halbeinfach, da $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, t$ halbeinfach ist; cf. Aufgabe 9.(2).

Sei $t \in \mathfrak{t}$ gegeben. Wir haben $\mathrm{ad}_\mathfrak{t}\, t \overset{!}{=} 0$ zu zeigen. Wegen Halbeinfachheit genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{ad}_\mathfrak{t}\, t$ keinen Eigenwert ungleich 0 hat. *Angenommen,* es gibt ein $t' \in \mathfrak{t} \smallsetminus \{0\}$ und ein $\lambda \in K \smallsetminus \{0\}$ mit $(\mathrm{ad}_\mathfrak{t}\, t)(t') = \lambda t'$. Nun ist auch $\mathrm{ad}_\mathfrak{t}\, t'$ halbeinfach. Somit gibt es ein $\ell \geqslant 0$ und eine Basis $(t_1\,, \ldots, t_\ell)$ von $\mathfrak{t}$ mit $(\mathrm{ad}_\mathfrak{t}\, t')(t_i) = \mu_i t_i$ für gewisse $\mu_i \in K$ für $i \in [1, \ell]$. Schreibe $t =: \sum_{i\in[1,\ell]} \nu_i t_i$, wobei $\nu_i \in K$. Es wird

$$(*) \qquad 0 \;\neq\; \lambda t' \;=\; [t,t'] \;=\; -[t',t] \;=\; -\sum_{i\in[1,\ell]} \nu_i [t',t_i] \;=\; -\sum_{i\in[1,\ell]} \nu_i \mu_i t_i \;.$$

Also gibt es ein $j \in [1,\ell]$ mit $\nu_j \neq 0$ und $\mu_j \neq 0$. Mit $(*)$ wird aber

$$0 \;=\; [t', \lambda t'] \;=\; -\sum_{i\in[1,\ell]} \nu_i \mu_i [t', t_i] \;=\; -\sum_{i\in[1,\ell]} \nu_i \mu_i^2 t_i \;,$$

was wegen $\nu_j \mu_j^2 \neq 0$ nicht geht, *Widerspruch.* ▫

In Matrizen: es ist nicht möglich, daß die Diagonalmatrix zu $\mathrm{ad}_\mathfrak{t}\, t'$ den Vektor zu t nicht annulliert, ihr Quadrat aber schon.

Bemerkung 85 *Sei* $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ *ein Torus.*

Es ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$. *Ist* $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$, *dann ist* $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ *ein maximaler Torus.*

Cf. auch Lemma 90.(1) unten. Cf. auch Aufgabe 37.(1).

Beweis. Da $\mathfrak{t}$ abelsch ist, ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$; cf. Definition 18.

Sei sogar $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$. Sei *angenommen,* es gibt einen Torus $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{t} < \mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{t}'$ abelsch; cf. Bemerkung 84. Also ist $\mathfrak{t} < \mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$, und wir haben einen *Widerspruch.* ▫

4.2 Wurzelraumzerlegung

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Schreibe $n := \dim \mathfrak{g}$.

Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus. Schreibe $\ell := \dim \mathfrak{t}$.

Definition 86 Sei $\chi \in \mathfrak{t}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{t}, K)$. Setze

$$\mathfrak{g}_\chi \;=\; \mathfrak{g}_{\mathfrak{t},\chi} \;:=\; \{\, g \in \mathfrak{g} \;:\; [t,g] = \chi(t)\cdot g \text{ für } t \in \mathfrak{t} \,\} \;.$$

Insbesondere ist $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})$.

Falls $\chi \neq 0$ und $\mathfrak{g}_\chi \neq 0$, so heißt χ eine *Wurzel* von $\mathfrak{g}$, und $\mathfrak{g}_\chi$ der *Wurzelraum* von $\mathfrak{g}$ zu χ. Die Menge der Wurzeln von $\mathfrak{g}$ werde

$$\Phi(\mathfrak{g}) \;=\; \Phi_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{g}) \;:=\; \{\, \chi \in \mathfrak{t}^* \smallsetminus \{0\} \;:\; \mathfrak{g}_\chi \neq 0 \,\}$$

geschrieben. Es sind sowohl $\Phi_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{g})$ als auch $\mathfrak{g}_{\mathfrak{t},\chi}$ von der Wahl des Torus $\mathfrak{t}$ abhängig definiert. Bei fixiertem Torus $\mathfrak{t}$ werden wir dennoch in der Regel die Kurzschreibweise verwenden, in der $\mathfrak{t}$ nicht erwähnt wird.

Beispiel 87 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(K)$. Sei $\mathfrak{t} = \langle \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=:\, t_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{=:\, t_2} \rangle$; cf. Bemerkung 83.

Ist $\chi : \mathfrak{t} \longrightarrow K$ durch $\chi(t_1) := 2$ und $\chi(t_2) := -1$ definiert, dann wird $x := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\chi$. Denn in der Tat wird $[t_1\,,\, x] = 2x = \chi(t_1) \cdot x$ und $[t_2\,,\, x] = -x = \chi(t_2) \cdot x$, und also

$$[\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2\,,\, x] \;=\; \alpha_1 [t_1\,,\, x] + \alpha_2 [t_2\,,\, x] \;=\; \alpha_1 \cdot \chi(t_1) \cdot x + \alpha_2 \cdot \chi(t_2) \cdot x \;=\; \chi(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) x\,.$$

für $\alpha_1\,,\, \alpha_2 \,\in\, K$.

Lemma 88 *Wir haben die* Wurzelraumzerlegung

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \oplus \bigoplus_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\chi \;=\; \bigoplus_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}} \mathfrak{g}_\chi\,.$$

Es ist $\Phi(\mathfrak{g})$ *endlich.*

> Cf. auch die bessere Darstellung der Wurzelraumzerlegung im halbeinfachen Fall im untenstehenden Satz 91.

Beweis. Sei $(t_1, \ldots, t_\ell)$ eine Basis von $\mathfrak{t}$. Es ist $[(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_i), (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_j)] \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}[t_i\,, t_j] \;=\; 0$ für $i,\, j \,\in\, [1, \ell]$; cf. Bemerkung 9, Bemerkung 84. In anderen Worten, es ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_i) \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_j) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_j) \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_i)$ für $i,\, j \,\in\, [1, \ell]$. Gemäß Aufgabe 10.(1) gibt also es eine Basis $(g_1\,, \ldots,\, g_n)$ von $\mathfrak{g}$ so, daß g_k Eigenvektor von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_i$ ist für alle $k \,\in\, [1, n]$ und alle $i \,\in\, [1, \ell]$. Sei $[t_i\,, g_k] = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t_i)(g_k) = \lambda_{i,k}\, g_k$ für gewisse $\lambda_{i,k} \in K$ für $k \in [1, n]$ und $i \in [1, \ell]$.

Sei $k \in [1, n]$. Definiere die lineare Abbildung $\chi_k : \mathfrak{t} \longrightarrow K,\; t_i \longmapsto \lambda_{i,k}$. Es ist $g_k \in \mathfrak{g}_{\chi_k}$, da für $t = \sum_i \alpha_i t_i \in \mathfrak{t}$, für gegebene $\alpha_i \in K$, sich $[t, g_k] = \sum_i \alpha_i [t_i\,, g_k] = \sum_i \alpha_i\, \lambda_{i,k}\, g_k = \chi_k(\sum_i \alpha_i\, t_i) \cdot g_k = \chi_k(t) \cdot g_k$ ergibt. Also ist $\chi_k \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$.

Da $(g_1\,, \ldots,\, g_n)$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ ist, folgt, daß $\mathfrak{g}$ die Summe der Teilräume $\mathfrak{g}_\chi$ mit $\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$ ist. Die Direktheit dieser Summe bleibt zu zeigen.

Angenommen, die Summe ist nicht direkt. Seien $x_\chi \in \mathfrak{g}_\chi$ mit $\{\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \,:\, x_\chi \neq 0\}$ endlich so gewählt, daß

$$\sum_{\chi \,\in\, \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}} x_\chi \;=\; 0$$

gilt und daß die Anzahl der nichtverschwindenden Summanden minimal, aber > 0, also $\geqslant 2$ ist. Wähle $\sigma,\ \rho\ \in\ \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$ mit $\sigma \neq \rho$ und $x_\sigma \neq 0$ und $x_\rho \neq 0$. Wähle $t \in \mathfrak{t}$ mit $\sigma(t) \neq \rho(t)$.

Es folgt $0 = \sum_\chi [t, x_\chi] = \sum_\chi \chi(t) x_\chi$. Also ist $\sum_\chi (\chi(t) - \sigma(t)) x_\chi = 0$. Diese Summe hat nun den nichtverschwindenden Summanden $(\rho(t) - \sigma(t)) x_\rho$, aber den verschwindenden Summanden $(\sigma(t) - \sigma(t)) x_\sigma$. Somit haben wir eine kürzere solche Summe gefunden und also einen *Widerspruch.*

Da $\mathfrak{g}$ endlichdimensional ist und $\dim \mathfrak{g}_\chi \geqslant 1$ für $\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$, folgt auch die Endlichkeit von $\Phi(\mathfrak{g})$. ▫

Bemerkung 89

(1) *Es ist* $[\mathfrak{g}_\sigma\,, \mathfrak{g}_\rho] \subseteq \mathfrak{g}_{\sigma+\rho}$ *für* $\sigma,\ \rho\ \in\ \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$.

(2) *Es ist* $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_\sigma\,, \mathfrak{g}_\rho) = 0$ *für* $\sigma,\ \rho\ \in\ \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$ *mit* $\sigma \neq -\rho$.

(3) *Es ist* $\operatorname{rad}(\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \times \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})}) \subseteq \operatorname{rad} \kappa_\mathfrak{g}$.

Beweis.

Zu (1). Sei $g' \in \mathfrak{g}_\sigma$. Sei $g'' \in \mathfrak{g}_\rho$. Sei $t \in \mathfrak{t}$. Es ist

$$[t, [g', g'']] = [[t, g'], g''] + [g', [t, g'']] = [\sigma(t) g', g''] + [g', \rho(t) g''] = (\sigma + \rho)(t) \cdot [g', g''] \ ,$$

mithin $[g', g''] \in \mathfrak{g}_{\sigma+\rho}$.

Zu (2). Sei $g' \in \mathfrak{g}_\sigma$. Sei $g'' \in \mathfrak{g}_\rho$. Wähle $t \in \mathfrak{t}$ so, daß $\sigma(t) + \rho(t) \neq 0$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (\sigma(t) + \rho(t)) \kappa_\mathfrak{g}(g', g'') & = & \kappa_\mathfrak{g}(\sigma(t) g', g'') + \kappa_\mathfrak{g}(g', \rho(t) g'') \\ & = & \kappa_\mathfrak{g}([t, g'], g'') + \kappa_\mathfrak{g}(g', [t, g'']) \\ & = & -\kappa_\mathfrak{g}([g', t], g'') + \kappa_\mathfrak{g}(g', [t, g'']) \\ & \overset{\text{B.47}}{=} & 0 \ , \end{array}$$

und also $\kappa_\mathfrak{g}(g', g'') = 0$.

Zu (3). Sei $x \in \operatorname{rad}(\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \times \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t})})$. Also ist $x \in \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{g}_0$ und $\kappa_\mathfrak{g}(x, \mathfrak{g}_0) = 0$. Nach (2) ist auch $\kappa_\mathfrak{g}(x, \bigoplus_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\chi) = 0$. Mit Lemma 88 folgt $\kappa_\mathfrak{g}(x, \mathfrak{g}) = \kappa_\mathfrak{g}(x, \bigoplus_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}} \mathfrak{g}_\chi) = 0$, mithin $x \in \operatorname{rad} \kappa_\mathfrak{g}$. ▫

4.3 Maximaler Torus ist selbstzentralisierend

Lemma 90 *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra mit* $\mathfrak{g} \neq 0$.

Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ *ein Torus.*

(1) *Es ist* $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ *ein maximaler Torus ist. Insbesondere ist ein maximaler Torus ungleich* 0.

(2) *Ist* $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ *ein maximaler Torus, dann ist* $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ *nichtausgeartet.*

Beweis. Ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, dann ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus; cf. Bemerkung 85.

Sei nun umgekehrt $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ als maximaler Torus vorausgesetzt.

Schreibe $\mathfrak{c} := \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Es ist also $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{g}$.

Für $c \in \mathfrak{c}$ bilden wir c_{as} und c_{an} in $\mathfrak{g}$; cf. Jordan, Satz 70.

Schritt 1. *Ist* $c \in \mathfrak{c}$, *so sind* $c_{\mathrm{as}} \in \mathfrak{t}$ *und* $c_{\mathrm{an}} \in \mathfrak{c}$.

Aus $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c)(\mathfrak{t}) = [c, \mathfrak{t}] = 0$ folgt $[c_{\mathrm{as}}\,, \mathfrak{t}] = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(c_{\mathrm{as}}))(\mathfrak{t}) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c)_{\mathrm{gs}}(\mathfrak{t}) = 0$, da $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c)_{\mathrm{gs}}$ ein Polynom in $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c)$ ohne konstanten Term ist; cf. Jordan, Satz 70, und Lemma 22.(2). Also ist $c_{\mathrm{as}} \in \mathfrak{c}$. Also ist auch $c_{\mathrm{an}} = c - c_{\mathrm{as}} \in \mathfrak{c}$.

Da $c_{\mathrm{as}} \in \mathfrak{c}$ und da $\mathfrak{t}$ nach Bemerkung 84 abelsch ist, ist $\langle c_{\mathrm{as}}\,, \mathfrak{t}\rangle$ eine abelsche Teilalgebra von $\mathfrak{g}$. Folglich ist auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\langle c_{\mathrm{as}}\,, \mathfrak{t}\rangle$ eine abelsche Teilalgebra von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. In anderen Worten, je zwei ihrer Elemente kommutieren bezüglich Komposition. Da das Element $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(c_{\mathrm{as}}) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c)_{\mathrm{gs}}$ und jedes Element von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{t}$ halbeinfach sind, gilt dies wegen dieser Kommutativität auch für jede ihrer Linearkombinationen; cf. Aufgabe 10.(2). Somit ist jedes Element von $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\langle c_{\mathrm{as}}\,, \mathfrak{t}\rangle$ halbeinfach und also $\langle c_{\mathrm{as}}\,, \mathfrak{t}\rangle \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus. Da $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus ist, folgt daraus $c_{\mathrm{as}} \in \mathfrak{t}$.

Schritt 2. *Es ist* $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}}$ *nichtausgeartet.*

Es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}$ nichtausgeartet nach Cartan, Satz 50.(4), da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist.

Da $\mathrm{rad}(\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}}) \overset{\mathrm{B.\,89.(3)}}{\subseteq} \mathrm{rad}\, \kappa_{\mathfrak{g}} = 0$, ist auch $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}}$ nichtausgeartet.

Schritt 3. *Es ist* $\mathfrak{c}$ *nilpotent.*

Sei $c \in \mathfrak{c}$. Nach Engel, Satz 40, genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{ad}_{\mathfrak{c}}(c)$ nilpotent ist.

Nun ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{c}}(c_{\mathrm{as}}) = 0$, da $c_{\mathrm{as}} \in \mathfrak{t}$ nach Schritt 1 und da $[\mathfrak{t}, \mathfrak{c}] = 0$. Also ist

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{c}}(c) \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{c}}(c_{\mathrm{an}}) \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(c_{\mathrm{an}})|_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{c}} \;\overset{\mathrm{S.\,70}}{=}\; (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c)_{\mathrm{gn}}|_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{c}}$$

nilpotent.

Schritt 4. *Für* $c \in \mathfrak{c}$ *ist* $c_{\mathrm{an}} = 0$.

Da $\mathfrak{c}$ nach Schritt 3 nilpotent ist, ist $\mathfrak{c}$ auflösbar. Es ist $\mathfrak{c} \overset{\mathrm{B.\,33}}{\simeq} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Somit ist auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{c}$ auflösbar. Schreibe $n := \dim \mathfrak{g}$. Nach Lemma 42 gibt es eine Basis von $\mathfrak{g}$ so, daß mit dem zugehörigen Isomorphismus $\varphi : \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}_n(K)$ gilt, daß $\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{c}) \leqslant \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$ ist. Nun ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(c_{\mathrm{an}}) \overset{\mathrm{S.\,70}}{=} (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c)_{\mathrm{gn}}$ nilpotent, und daher $\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(c_{\mathrm{an}})) \in \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$.

Für $c' \in \mathfrak{c}$ ist also $\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c') \cdot \varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(c_{\mathrm{an}})) \in \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$, und daher

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(c', c_{\mathrm{an}}) \;=\; \mathrm{tr}\big(\varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, c') \cdot \varphi(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(c_{\mathrm{an}}))\big) \;=\; 0\,.$$

Da $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}}$ dank Schritt 2 nichtausgeartet ist, folgt $c_{\mathrm{an}} = 0$.

Schritt 5. *Es ist* $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$. *Es ist* $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ *nichtausgeartet. Es ist* $\mathfrak{t} \neq 0$.

Sei $c \in \mathfrak{c}$. Es wird $c \overset{\text{S. 70}}{=} c_{\mathrm{as}} + c_{\mathrm{an}} \overset{\text{Schr. 4}}{=} c_{\mathrm{as}} \overset{\text{Schr. 1}}{\in} \mathfrak{t}$.

Also ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}$.

Nach Schritt 2 ist nun $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}}$ nichtausgeartet.

Wäre $\mathfrak{t} = 0$, so wäre $0 = \mathfrak{t} = \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(0) = \mathfrak{g} \neq 0$, was *nicht geht.* ▫

Satz 91 (Wurzelraumzerlegung)

Sei weiterhin K *ein algebraisch abgeschlossener Körper mit* $\operatorname{char} K = 0$.

Sei $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra mit* $\mathfrak{g} \neq 0$.

Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ *ein maximaler Torus.*

Wie in Definition 86 *bezeichnet* $\Phi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{t}^*$ *die Menge der Wurzeln von* $\mathfrak{g}$ *bezüglich* $\mathfrak{t}$.

Wir haben $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_0$ *und die Wurzelraumzerlegung*

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\chi \;=\; \bigoplus_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})\sqcup\{0\}} \mathfrak{g}_\chi\,.$$

Beweis. Nach Lemma 88 ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \oplus \bigoplus_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\chi$. Nach Lemma 90.(1) ist $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. ▫

Beispiel 92 Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ verwenden wir die Bezeichnungen von §3.5. Darin ist $\mathfrak{t} = \langle h \rangle$ ein maximaler Torus, da $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Denn für a, b, $c \in K$ ist $[\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{smallmatrix}\right)$ genau dann null, wenn $b = c = 0$ ist.

Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, geschrieben in der Basis (e, f, h); cf. §3.5. Die Eigenraumzerlegung davon gibt

$$\mathfrak{g} \;=\; \underbrace{\langle h \rangle}_{\mathfrak{t}} \oplus \underbrace{\langle e \rangle}_{\mathfrak{g}_{\chi_2}} \oplus \underbrace{\langle f \rangle}_{\mathfrak{g}_{\chi_{-2}}}\,,$$

und also $\Phi(\mathfrak{g}) = \{\, \chi_2\,,\, \chi_{-2} \,\}$ mit $\chi_2(h) := 2$ und $\chi_{-2}(h) := -2$. Cf. auch Aufgabe 36.

4.4 Wurzeln und ganze Zahlen

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra mit $\mathfrak{g} \neq 0$.

Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus.

Definition 93
Da $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ nach Lemma 90.(2) nichtausgeartet ist, haben wir die bijektive lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{t} & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon} & \mathfrak{t}^* \\ t & \longmapsto & \kappa_{\mathfrak{g}}(t,-)|_{\mathfrak{t}}\,. \end{array}$$

Sei $\chi \in \mathfrak{t}^*$. Schreibe $t_\chi := \varepsilon^{-1}(\chi)$. In anderen Worten, es ist

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\chi\,,\tilde{t}) \;=\; \chi(\tilde{t}) \qquad \text{für } \tilde{t} \in \mathfrak{t}\,.$$

Beispiel 94 Wir setzen Beispiel 92 fort.
Es ist $t_{\chi_2} = \frac{1}{4}h$, da $\kappa_{\mathfrak{g}}(\frac{1}{4}h, h) = \mathrm{tr}\big(\frac{1}{4}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\big) = 2 = \chi_2(h)$.
Entsprechend ist $t_{\chi_{-2}} = -\frac{1}{4}h$.

Bemerkung 95 *Sei $\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$.*

(1) *Es ist $\mathfrak{t}^* = \langle\Phi(\mathfrak{g})\rangle$ und also $\mathfrak{t} = \varepsilon^{-1}(\,\langle\Phi(\mathfrak{g})\rangle\,) = \langle\, t_\sigma \,:\, \sigma \in \Phi(\mathfrak{g})\,\rangle$.*

(2) *Es ist auch $-\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$. Genauer, für $g' \in \mathfrak{g}_\chi \smallsetminus \{0\}$ ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(g', \mathfrak{g}_{-\chi}) = K$.*

(3) *Sind $g' \in \mathfrak{g}_\chi$ und $g'' \in \mathfrak{g}_{-\chi}$, so ist $[g', g''] = \kappa_{\mathfrak{g}}(g', g'')t_\chi$.*
Es ist $[g', \mathfrak{g}_{-\chi}] = \langle t_\chi\rangle$ für $g' \in \mathfrak{g}_\chi \smallsetminus \{0\}$.
Es folgt $[\mathfrak{g}_\chi\,, \mathfrak{g}_{-\chi}] = \langle t_\chi\rangle$.

(4) *Sind $g' \in \mathfrak{g}_\chi$ und $g'' \in \mathfrak{g}_{-\chi}$, so ist $\langle g', g'', t_\chi\rangle \leqslant \mathfrak{g}$.*

(5) *Es ist $\chi(t_\chi) = \kappa_{\mathfrak{g}}(t_\chi\,, t_\chi)$ ungleich 0.*

Beweis.

Zu (1). *Angenommen,* $\langle\Phi(\mathfrak{g})\rangle \subset \mathfrak{t}^*$. Dann gibt es ein $t \in \mathfrak{t} \smallsetminus \{0\}$ mit $\sigma(t) = 0$ für alle $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$, wie man erkennt, wenn man die duale Basis zu einer von $\langle\Phi(\mathfrak{g})\rangle$ nach $\mathfrak{t}^*$ fortgesetzten Basis betrachtet. Für $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$ und $g \in \mathfrak{g}_\sigma$ wird also $[t, g] = \sigma(t)g = 0$. Dank Wurzelraumzerlegung, Satz 91, ist also $[t, \mathfrak{g}] = 0$. Daher ist $t \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \overset{\text{B. 32}}{=} 0$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Zu (2). Sei $g' \in \mathfrak{g}_\chi \smallsetminus \{0\}$.

Angenommen, es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(g', \mathfrak{g}_{-\chi}) = 0$. Es folgt $\kappa_{\mathfrak{g}}(g', \mathfrak{g}) = 0$ aus der Wurzelraumzerlegung, Satz 91, da für $\sigma \in (\Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}) \smallsetminus \{-\chi\}$ ohnehin $\kappa_{\mathfrak{g}}(g', \mathfrak{g}_\sigma) \overset{\text{B. 89.(2)}}{=} 0$ ist. Da wegen $\mathfrak{g}$ halbeinfach $\kappa_{\mathfrak{g}}$ nichtausgeartet ist nach Cartan, Satz 50.(4), zieht dies $g' = 0$ nach sich, und wir haben einen *Widerspruch.*

Also ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(g', \mathfrak{g}_{-\chi}) = K$. Insbesondere ist $\mathfrak{g}_{-\chi} \neq 0$, i.e. $-\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$.

Zu (3). Für $g' \in \mathfrak{g}_\chi$ und $g'' \in \mathfrak{g}_{-\chi}$ ist $[g', g''] \overset{\text{B. 89.(1)}}{\in} \mathfrak{g}_{\chi+(-\chi)} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{t}) \overset{\text{L. 90.(1)}}{=} \mathfrak{t}$. Es wird

$$\kappa_\mathfrak{g}(t, [g', g'']) \overset{\text{B. 47.(1)}}{=} \kappa_\mathfrak{g}([t, g'], g'') = \chi(t)\kappa_\mathfrak{g}(g', g'') \overset{\text{D. 93}}{=} = \kappa_\mathfrak{g}(t, t_\chi)\kappa_\mathfrak{g}(g', g'') = \kappa_\mathfrak{g}(t, \kappa_\mathfrak{g}(g', g'')t_\chi)$$

für $t \in \mathfrak{t}$, wegen $\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ nichtausgeartet also $[g', g''] = \kappa_\mathfrak{g}(g', g'')t_\chi$; cf. Lemma 90.(2).

Ist $g' \neq 0$, so folgt daraus mit (2), daß $[g', \mathfrak{g}_{-\chi}] = \langle t_\chi \rangle$ ist.

Zu (4). Sei $g' \in \mathfrak{g}_\chi$ und $g'' \in \mathfrak{g}_{-\chi}$. Es ist $[g', g''] \overset{(3)}{\in} \langle t_\chi \rangle$. Es ist $[t_\chi\, , g'] = \chi(t_\chi)g'$. Es ist $[t_\chi\, , g''] = -\chi(t_\chi)g''$.

Zu (5). *Angenommen,* es ist $\chi(t_\chi) = 0$. Wähle $g' \in \mathfrak{g}_\chi$ und $g'' \in \mathfrak{g}_{-\chi}$ mit $[g', g''] = t_\chi$; cf. (3). Schreibe $\mathfrak{h} := \langle g', g'', t_\chi \rangle \leqslant \mathfrak{g}$; cf. (4). Wegen $[t_\chi\, , g'] = \chi(t_\chi)g' = 0$ und $[t_\chi\, , g''] = -\chi(t_\chi)g' = 0$ ist $\mathfrak{h}^{(1)} = \langle t_\chi \rangle$, $\mathfrak{h}^{(2)} = 0$ und mithin $\mathfrak{h} \simeq \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ auflösbar; cf. Definition 25, Bemerkung 33.

Schreibe $n := \dim \mathfrak{g}$. Nach Lemma 42 gibt es eine Basis von $\mathfrak{g}$, deren Isomorphismus $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{gl}_n(K)$ die auflösbare Teilalgebra $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ nach $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$ abbildet. Folglich wird $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})^{(1)} \overset{\text{B. 24.(1)}}{=} \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}^{(1)})$ nach $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)^{(1)} = \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$ abgebildet; cf. Lösung zu Aufgabe 13.(2). Insbesondere ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} t_\chi$ ein nilpotenter Endomorphismus. Da $\mathfrak{t}$ ein Torus ist, ist aber $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} t_\chi$ halbeinfach. Also ist $t_\chi = 0$, damit auch $\chi = \kappa_\mathfrak{g}(t_\chi\, , -) = 0$, und wir haben einen *Widerspruch.* ▫

Definition 96 Sei $\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$. Setze

$$t'_\chi := 2\chi(t_\chi)^{-1} t_\chi \; ;$$

cf. Definition 93, Bemerkung 95.(5). Beachte $\chi(t'_\chi) = 2$.

Beispiel 97 Wir setzen Beispiel 94 fort. Da $t_{\chi_2} = \frac{1}{4}h$ ist, wird $t'_{\chi_2} = 2\chi_2(\frac{1}{4}h)^{-1} \cdot \frac{1}{4}h = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}h = h$. Da $t_{\chi_{-2}} = -\frac{1}{4}h$ ist, wird $t'_{\chi_{-2}} = 2\chi_{-2}(-\frac{1}{4}h)^{-1} \cdot (-\frac{1}{4}h) = 2 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{4}h) = -h$.

Lemma 98 *Sei* $\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$. *Wir verwenden die Basis* (e, f, h) *von* $\mathfrak{sl}_2(K)$ *aus* §3.5.

(1) *Es ist* $\dim \mathfrak{g}_\chi = 1$.

(2) *Wähle* $g' \in \mathfrak{g}_\chi \smallsetminus \{0\}$. *Wähle* $g'' \in \mathfrak{g}_{-\chi}$ *mit* $[g', g''] = t'_\chi$ *; cf. Bemerkung* 95.(3).

Schreibe $\mathfrak{s}_\chi := \langle\, g',\, t_\chi\, ,\, g''\, \rangle$.

Es ist $\mathfrak{s}_\chi = \mathfrak{g}_\chi \oplus \langle t_\chi \rangle \oplus \mathfrak{g}_{-\chi} \leqslant \mathfrak{g}$ *; cf.* (1), *Bemerkung* 95.(4), *Satz* 91.

Wir haben den Isomorphismus von Liealgebren

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sl}_2(K) & \xrightarrow[\sim]{\psi_{g',\, g''}} & \mathfrak{s}_\chi \\ e & \longmapsto & g' \\ f & \longmapsto & g'' \\ h & \longmapsto & t'_\chi\, . \end{array}$$

(3) *Es ist* $\langle\chi\rangle \cap \Phi(\mathfrak{g}) = \{-\chi, +\chi\}$. *I.e. für* $\alpha \in K$ *ist* $\alpha\chi$ *genau dann eine Wurzel von* $\mathfrak{g}$, *wenn* $\alpha \in \{-1, +1\}$ *liegt.*

Aussage (2) gibt zusammen mit der Wurzelraumzerlegung, Satz 91, Anlaß zur Sichtweise, $\mathfrak{g}$ sei aus "ein paar Exemplaren von $\mathfrak{sl}_2(K)$ zusammengebaut".

Beweis. Wir wählen g' und g'' wie in (2) angegeben und schreiben $\mathfrak{s}_\chi := \langle\, g',\, t_\chi\,,\, g''\,\rangle$.

Schritt 1. *Konstruktion eines Isomorphismus* $\mathfrak{sl}_2(K) \xrightarrow[\sim]{\psi_{g',g''}} \mathfrak{s}_\chi$.

Betrachte die lineare Bijektion $\mathfrak{sl}_2(K) \xrightarrow{\psi_{g',g''}} \mathfrak{s}_\chi\,,\; e \longmapsto g',\; f \longmapsto g'',\; h \longmapsto t'_\chi$.

Es ist $\mathfrak{s}_\chi \leqslant \mathfrak{g}$; cf. Bemerkung 95.(4). Es ist weiter $[t'_\chi\,, g'] = \chi(t'_\chi)g' = 2g'$ und $[t'_\chi\,, g''] = -\chi(t'_\chi)g'' = -2g''$. Durch bilineare Fortsetzung erkennt man, daß $\psi_{g',g''}$ ein Morphismus von Liealgebren ist.

Schritt 2. *Konstruktion der* $\mathfrak{sl}_2(K)$*-Teilmodulzerlegung*

$$M \;:=\; \langle\, \mathfrak{g}_{\alpha\chi} \,:\, \alpha \in K \,\rangle \;=\; \mathfrak{s}_\chi \oplus \operatorname{Kern}\chi \oplus M'\,.$$

Es ist $\mathfrak{g}$ via $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{s}_\chi} \circ \psi_{g',g''}$ ein endlichdimensionaler $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul; cf. Schritt 1.

Für $\alpha \in K$ und $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\chi}$ ist

$$\begin{array}{rclcll} [e,x] &=& [g',x] & \overset{\text{B. 89.(1)}}{\in} & \mathfrak{g}_{(\alpha+1)\chi} & \subseteq\; M \\ [f,x] &=& [g'',x] & \overset{\text{B. 89.(1)}}{\in} & \mathfrak{g}_{(\alpha-1)\chi} & \subseteq\; M \\ [h,x] &=& [t'_\chi\,,x] & \overset{\text{B. 89.(1)}}{\in} & \mathfrak{g}_{\alpha\chi} & \subseteq\; M\,, \end{array}$$

wobei natürlich genauer gesagt $[t'_\chi\,, x] = \alpha\chi(t'_\chi)x = 2\alpha x$ ist. Jedenfalls ist $M \subseteq \mathfrak{g}$ ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Teilmodul.

Bilde $\operatorname{Kern}\chi \subseteq \mathfrak{t}$. Es ist $\operatorname{Kern}\chi \subseteq M$ ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Teilmodul, denn für $t \in \operatorname{Kern}\chi$ wird sogar $[h,t] = [t'_\chi\,, t] = 0$, $[e,t] = [g',t] = -[t,g'] = -\chi(t)g' = 0$ und $[f,t] = [g'',t] = -[t,g''] = \chi(t)g'' = 0$.

Es ist $\mathfrak{s}_\chi \subseteq M$ ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Teilmodul, da $\mathfrak{s}_\chi \leqslant \mathfrak{g}$; cf. Schritt 1.

Es ist $\mathfrak{t} = \langle t_\chi\rangle \oplus \operatorname{Kern}\chi$, da $\chi(t_\chi) \neq 0$; cf. Bemerkung 95.(5).

Es ist $\mathfrak{s}_\chi \cap \operatorname{Kern}\chi = \mathfrak{s}_\chi \cap \mathfrak{t} \cap \operatorname{Kern}\chi = \langle t_\chi\rangle \cap \operatorname{Kern}\chi = 0$.

Nach Weyl, Satz 68, und nach Bemerkung 60 gibt es einen $\mathfrak{sl}_2(K)$-Teilmodul $M' \subseteq M$ mit

$$M \;=\; \mathfrak{s}_\chi \oplus \operatorname{Kern}\chi \oplus M'\,.$$

Schritt 3. *Es ist* $\{\alpha \in K \,:\, \alpha\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}\} = \frac{1}{2}\gamma(M)$. *I.e. für* $\alpha \in K$ *ist* $\alpha\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$ *genau dann, wenn* $\alpha \in \frac{1}{2}\gamma(M)$ *liegt. Für* $\alpha \in K$ *ist* $\mathfrak{g}_{\alpha\chi} = M_{2\alpha}$.

Es ist

$$M \;=\; \bigoplus_{\alpha\in K,\ \alpha\chi\in\Phi(\mathfrak{g})\sqcup\{0\}} \mathfrak{g}_{\alpha\chi}\ .$$

Beachte, daß auch $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t} \neq 0$ ist; cf. Lemma 90.(1).

Für $\alpha \in K$ und $x \in \mathfrak{g}_{\alpha\chi}$ ist $[h,x] = [t'_\chi\,, x] = \alpha\chi(t'_\chi)x = 2\alpha x$. Daher liegt in dieser Zerlegung von M seine Zerlegung in Gewichtsräume vor. Für $\alpha \in K$ folgt $\mathfrak{g}_{\alpha\chi} = M_{2\alpha}$, sowie daß $\alpha\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$ genau dann gilt, wenn $2\alpha \in \gamma(M)$ ist.

Schritt 4. *Es ist* $\{\alpha \in K \,:\, \alpha\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}\} \cap \mathbf{Z} = \{-1,0,+1\}$. *Es ist* $M'_0 = 0$.

Es ist $\gamma(\operatorname{Kern}\chi) \subseteq \{0\}$, da $[h,t] = [t'_\chi\,, t] = 0$ für $t \in \operatorname{Kern}\chi \subseteq \mathfrak{t}$; cf. Schritt 1.

Es ist $\gamma(\mathfrak{s}_\chi) = \{-2,0,+2\}$, da $[h,g'] = [t'_\chi\,, g'] = \chi(t'_\chi)g' = +2g'$, da $[h,g''] = [t'_\chi\,, g''] = -\chi(t'_\chi)g'' = -2g''$ und da $[h,t_\chi] = [t'_\chi\,, t_\chi] = 0$.

Es ist $M_0 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t} = \langle t_\chi\rangle \oplus \operatorname{Kern}\chi \subseteq \mathfrak{s}_\chi \oplus \operatorname{Kern}\chi$. Also ist $M'_0 = M_0 \cap M' = 0$. Somit ist $\gamma(M') \subseteq 2\mathbf{Z} + 1$; cf. Bemerkung 81.(4).

Insgesamt folgt

$$\gamma(M) \cap 2\mathbf{Z} \;=\; \big(\gamma(\mathfrak{s}_\chi) \cup \gamma(\operatorname{Kern}\chi) \cup \gamma(M')\big) \cap 2\mathbf{Z} \;=\; \{-2,0,+2\}$$

und also $\frac{1}{2}\gamma(M) \cap \mathbf{Z} = \{-1,0,+1\}$. Die erste Behauptung von Schritt 4 ergibt sich nun mit Schritt 3.

Schritt 5. *Es ist* $M' = 0$. *Es ist* $\{\alpha \in K \,:\, \alpha\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}\} = \{-1,0,+1\}$.

Es zerfällt M' nach Bemerkung 81.(3) in eine direkte Summe von $\dim M'_0 + \dim M'_1 \overset{\text{Schr. 4}}{=} \dim M'_1$ einfachen Moduln. Für $M' \overset{!}{=} 0$ genügt es somit, $M_1 \overset{!}{=} 0$ zu zeigen, i.e. $1 \overset{!}{\notin} \gamma(M)$. Nach Schritt 3 ist dafür $\frac{1}{2}\chi \overset{!}{\notin} \Phi(\mathfrak{g})$ zu zeigen.

Aus Schritt 4 folgt, daß allgemein für $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$ gilt, daß $2\sigma \notin \Phi(\mathfrak{g})$ liegt.

Annahme, es ist $\frac{1}{2}\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$. Dann aber ist $2 \cdot \frac{1}{2}\chi = \chi \in \Phi(\mathfrak{g})$, und wir haben einen *Widerspruch*.

Es folgt $M = \mathfrak{s}_\chi \oplus \operatorname{Kern}\chi$, und also $\gamma(M) = \gamma(\mathfrak{s}_\chi) \cup \gamma(\operatorname{Kern}\chi) = \{-2,0,+2\}$. Schritt 3 zeigt nun die zweite Behauptung von Schritt 5.

Schritt 6. *Es ist* $\dim \mathfrak{g}_\chi = 1$. *Es ist* $\mathfrak{s}_\chi = \mathfrak{g}_\chi \oplus \langle t_\chi\rangle \oplus \mathfrak{g}_{-\chi}$.

Nach Schritt 5 ist

$$\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\chi \oplus \mathfrak{g}_{-\chi} \;=\; \bigoplus_{\alpha\in K,\ \alpha\chi\in\Phi(\mathfrak{g})\sqcup\{0\}} \mathfrak{g}_{\alpha\chi} \;=\; M \;=\; \mathfrak{s}_\chi \oplus \operatorname{Kern}\chi \;=\; \mathfrak{t} \oplus \langle g'\rangle \oplus \langle g''\rangle\ .$$

Da $\langle g'\rangle \subseteq \mathfrak{g}_\chi$, $\langle g''\rangle \subseteq \mathfrak{g}_{-\chi}$ und $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_0$, folgt $\mathfrak{g}_\chi = \langle g'\rangle$, $\mathfrak{g}_{-\chi} = \langle g''\rangle$ und

$$\mathfrak{s}_\chi \;=\; \mathfrak{g}_\chi \oplus \langle t_\chi\rangle \oplus \mathfrak{g}_{-\chi}\ .$$

□

Bemerkung 99 *Es ist* $\kappa_{\mathfrak{g}}(t,t') = \sum_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})} \chi(t)\cdot\chi(t')$ *für* $t,\, t' \in \mathfrak{t}$.

Beweis. Für $\chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \sqcup \{0\}$ und $x \in \mathfrak{g}_\chi$ wird

$$((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t'))(x) \;=\; [t,[t',x]] \;=\; [t,\chi(t')\cdot x] \;=\; \chi(t)\cdot\chi(t')\cdot x\;.$$

Insbesondere ist dies gleich 0 für $x \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$.

Wir wählen eine Basis von $\mathfrak{g}$ aus Elementen aus den Summanden der Wurzelraumzerlegung $\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\chi$; cf. Satz 91. Beachte, daß Wurzelräume eindimensional sind; cf. Lemma 98.(1). Bezüglich einer solchen Basis berechnen wir also

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(t,t') \;=\; \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t')\big) \;=\; \textstyle\sum_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})} \chi(t)\cdot\chi(t')\;.$$

□

Beispiel 100 Wir setzen Beispiel 97 fort. Es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(h,h) = 8$, wie aus Beispiel 94 folgt. Zum anderen ist aber auch $\sum_{\chi\in\{\chi_2\,,\,\chi_{-2}\}} \chi(h)\cdot\chi(h) = 2\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) = 8$; cf. Beispiel 92.

Lemma 101 *Seien* $\sigma,\, \rho \in \Phi(\mathfrak{g})$*. Sei an* $t'_\rho = 2\rho(t_\rho)^{-1} t_\rho$ *erinnert; cf. Definition* 96.

(1) *Es liegt* $\sigma(t'_\rho) = \kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,, t'_\rho) = 2\,\dfrac{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,\,t_\rho)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\rho\,,\,t_\rho)}$ *in* $\mathbf{Z}$ *; cf. Bemerkung* 95.(5).

(2) *Es ist* $\sigma - \sigma(t'_\rho)\rho \in \Phi(\mathfrak{g})$.

Beweis.

Fall $\sigma \in \{-\rho, +\rho\}$. Schreibe $\sigma = \pm\rho$.

Es ist $\sigma(t'_\rho) = \pm 2$, und also ist $\sigma - \sigma(t'_\rho)\rho = \sigma - (\pm 2)(\pm\rho) = -\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$; cf. Bemerkung 95.(2).

Fall $\sigma \notin \{-\rho, +\rho\}$.

Es ist $\sigma \notin \mathbf{Z}\rho$, da $i\rho = \sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$ für ein $i \in \mathbf{Z}$ auch $i \in \{-1,+1\}$ nach sich zöge; cf. Lemma 98.(3).

Wähle einen Isomorphismus $\mathfrak{sl}_2(K) \xrightarrow[\sim]{\psi_{g',\,g''}} \mathfrak{s}_\rho = \mathfrak{g}_\rho \oplus \langle t_\rho\rangle \oplus \mathfrak{g}_{-\rho} \leqslant \mathfrak{g}$ wie in Lemma 98.(2), wobei $g' \in \mathfrak{g}_\rho \smallsetminus \{0\}$ beliebig und $g'' \in \mathfrak{g}_{-\rho} \smallsetminus \{0\}$ zu g' passend gewählt sind. Fasse $\mathfrak{g}$ via $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{s}_\rho} \circ \psi_{g',\,g''}$ als $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul auf.

Setze $M := \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathfrak{g}_{\sigma+i\rho} \;\subseteq\; \mathfrak{g}$. Gemäß Bemerkung 89.(1) ist M ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Teilmodul von $\mathfrak{g}$. Es ist $M \neq 0$, da $\mathfrak{g}_{\sigma+0\rho} \neq 0$. Es ist

$$(*) \qquad M \;=\; \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}\,,\;\sigma+i\rho\in\Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_{\sigma+i\rho}\;.$$

Für ein solches i und $x \in \mathfrak{g}_{\sigma+i\rho}$ ist $[h,x] = [t'_\rho\,, x] = (\sigma+i\rho)(t'_\rho)\cdot x \overset{\text{D.96}}{=} (\sigma(t'_\rho)+2i)\cdot x$. Folglich liegt in $(*)$ eine Zerlegung in Gewichtsräume vor, mit

$$M_{\sigma(t'_\rho)+2i} \;=\; \mathfrak{g}_{\sigma+i\rho}$$

für jedes darin auftretende i. Jeder dieser Wurzelräume ist eindimensional; cf. Lemma 98.(1). Ferner kann nicht $M_0 \neq 0$ und $M_1 \neq 0$ sein, da die Differenz zweier Elemente von $\gamma(M)$ in $2\mathbf{Z}$ liegt. Also zerfällt M in $\dim M_0 + \dim M_1 \leqslant 1$ einfache Moduln; cf. Bemerkung 81.(3). Da $M \neq 0$, ist M einfach.

Ferner ist $\gamma(M) = \{\, \sigma(t'_\rho)+2i \,:\, i\in\mathbf{Z},\ \sigma+i\rho\in\Phi(\mathfrak{g})\,\}$. Speziell ist für $i \in \mathbf{Z}$

$$\sigma+i\rho \;\in\; \Phi(\mathfrak{g}) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \sigma(t'_\rho)+2i \;\in\; \gamma(M)\;.$$

Da $\sigma+0\rho\in\Phi(\mathfrak{g})$, ist $\sigma(t'_\rho)\in\gamma(M) \overset{\text{B. 81.(1)}}{\subseteq} \mathbf{Z}$, was (1) zeigt.

Da weiter mit $\sigma(t'_\rho)\in\gamma(M)$ auch $\sigma(t'_\rho)+2(-\sigma(t'_\rho)) = -\sigma(t'_\rho) \overset{\text{B. 81.(2)}}{\in} \gamma(M)$ liegt, folgt $\sigma-\sigma(t'_\rho)\rho\in\Phi(\mathfrak{g})$, was (2) zeigt. ▫

Lemma 102 *Seien $\sigma,\ \rho\ \in\ \Phi(\mathfrak{g})$.*

(1) *Es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\sigma)\in\{\,\frac{4}{z}\,:\,z\in\mathbf{Z}_{>0}\,\}$.*

(2) *Es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\rho)\in\mathbf{Q}$.*

Beweis. Es ist

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\sigma) \overset{\text{B.99}}{=} \textstyle\sum_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})}\chi(t_\sigma)^2 \overset{\text{D.93}}{=} \textstyle\sum_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})}\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\chi\,,t_\sigma)^2\;.$$

Also wird

$$4\,\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\sigma)^{-1} \;=\; \textstyle\sum_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})}\big(2\,\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\chi\,,t_\sigma)\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\sigma)^{-1}\big)^2 \overset{\text{L. 101.(1)}}{\in} \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\;;$$

cf. Bemerkung 95.(5). Es ist $4\,\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\sigma)^{-1}$ ungleich 0 und also in $\mathbf{Z}_{>0}$. Somit ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\sigma)\in\{\,\frac{4}{z}\,:\,z\in\mathbf{Z}_{>0}\,\}$. Es folgt

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\rho) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,,t_\sigma)\,\kappa_{\mathfrak{g}}(t'_\sigma\,,t_\rho) \overset{\text{L. 101.(1)}}{\in} \mathbf{Q}\;.$$

▫

Beispiel 103 Wir setzen Beispiel 100 fort. Da $t_{\chi_2} = \frac{1}{4}h$ gemäß Beispiel 94, ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_{\chi_2}\,,t_{\chi_2}) = \kappa_{\mathfrak{g}}(t_{\chi_2},\frac{1}{4}h) = \chi_2(\frac{1}{4}h) = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{4}{8}$; cf. loc. cit.

4.5 Ein reeller euklidischer Raum

Sei nun $K = \mathbf{C}$ zugrundegelegt. Es wird der Teilkörper $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ eine Rolle spielen. In diesem Abschnitt §4.5 müssen daher wir bei Begriffen aus der Linearen Algebra den zugrundeliegenden Körper erwähnen.

> In §4.5 könnte man $\mathbf{R}$ auch durch einen beliebigen Zwischenkörper $\mathbf{Q} \subseteq F \subseteq \mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ durch einen beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper K mit $\operatorname{char} K = 0$ und Teilkörper $F \subseteq K$ ersetzen.

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra über $\mathbf{C}$ mit $\mathfrak{g} \neq 0$.

Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus.

Definition 104 Sei $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} := {}_{\mathbf{R}}\langle\, t_\chi \,:\, \chi \in \Phi(\mathfrak{g})\,\rangle \subseteq \mathfrak{t}$; cf. Definitionen 86 und 93.

Bemerkung 105 *Jede aus dem* $\mathbf{C}$*-linearen Erzeugendensystem* $(\, t_\chi \,:\, \chi \in \Phi(\mathfrak{g})\,)$ *ausgewählte* $\mathbf{C}$*-lineare Basis von* $\mathfrak{t}$ *ist auch eine* $\mathbf{R}$*-lineare Basis von* $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$*; cf. Bemerkung* 95.(1).

Insbesondere ist $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{t}$.

Beweis. Schreibe $\ell := \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{t}$. Sei $(t_{\chi_1}, \ldots, t_{\chi_\ell})$ eine aus $(\, t_\chi \,:\, \chi \in \Phi(\mathfrak{g})\,)$ ausgewählte $\mathbf{C}$-lineare Basis von $\mathfrak{t}$. Es ist $\underline{t}$ auch $\mathbf{R}$-linear unabhängig und in $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$ enthalten. Es bleibt zu zeigen, daß $\underline{t}$ auch $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$ erzeugt.

Sei $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$. Wir haben $t_\sigma \overset{!}{\in} {}_{\mathbf{R}}\langle\, t_{\chi_1}, \ldots, t_{\chi_\ell} \,\rangle$ zu zeigen. Schreibe $t_\sigma = \sum_{i \in [1,\ell]} \alpha_i \, t_{\chi_i}$ mit $\alpha_i \in \mathbf{C}$. Es genügt, $\alpha_k \overset{!}{\in} \mathbf{Q}$ für $k \in [1,\ell]$ zu zeigen.

Es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ nichtausgeartet; cf. Lemma 90.(2). Also ist $(\kappa_{\mathfrak{g}}(t_{\chi_i}, t_{\chi_j}))_{i,j}$ eine invertierbare Matrix in $\mathbf{Q}^{\ell\times\ell}$; cf. Lemma 102.(2). Sei $(\beta_{j,k})_{j,k} \in \mathbf{Q}^{\ell\times\ell}$ ihr Inverses. Es liegt in der Tat

$$\mathbf{Q} \overset{\text{L. 102.(2)}}{\ni} \sum_j \kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma, t_{\chi_j})\beta_{j,k} \;=\; \sum_{i,j} \alpha_i \, \kappa_{\mathfrak{g}}(t_{\chi_i}, t_{\chi_j})\beta_{j,k} \;=\; \sum_i \alpha_i \, \partial_{i,k} \;=\; \alpha_k \,.$$

□

Lemma 106

Es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\times\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}}$ *eine symmetrische und positiv definite* $\mathbf{R}$*-Bilinearform auf* $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$.

In anderen Worten, es ist $(\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}, \kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\times\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}})$ *ein euklidischer Raum.*

Beweis. Da $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma, t_\rho) \in \mathbf{Q}$ für $\sigma, \rho \in \Phi(\mathfrak{g})$, bildet $\kappa_{\mathfrak{g}}$ die Menge $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \times \mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$ nach $\mathbf{R}$ ab; cf. Lemma 102.(2).

Mit $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ist auch $\kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\times\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}}$ symmetrisch; cf. Definition 46.

Zur positiven Definitheit. Sei $t \in \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \smallsetminus \{0\}$. Sei $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$ so, daß $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,, t) \neq 0$ ist, was wegen $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ nichtausgeartet und wegen $\mathfrak{t} = {}_{\mathbf{C}}\langle\, t_\sigma \,:\, \sigma \in \Phi(\mathfrak{g}) \,\rangle$ möglich ist; cf. Lemma 90.(2), Bemerkung 95.(1). Es wird

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(t,t) \overset{\text{B. 99}}{=} \sum_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})} \chi(t)^2 \overset{\text{D. 93}}{=} \sum_{\chi\in\Phi(\mathfrak{g})} \kappa_{\mathfrak{g}}(t_\chi\,, t)^2 \;>\; 0\;,$$

da alle Summanden $\geqslant 0$ sind und speziell $\kappa_{\mathfrak{g}}(t_\sigma\,, t)^2 > 0$ ist. ▫

4.6 Zusammenfassung

Wir fassen zu folgendem Satz zusammen.

Satz 107 (Wurzelsystem einer halbeinfachen Liealgebra)
Sei $K = \mathbf{C}$. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra mit $\mathfrak{g} \neq 0$.

Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus.

Es bezeichnet $\Phi(\mathfrak{g})$ die Menge der Wurzeln; cf. Definition 86. *Schreibe*

$$t_{\Phi(\mathfrak{g})} \;:=\; \{\, t_\chi \,:\, \chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \,\}$$

Es bezeichnet $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} = {}_{\mathbf{R}}\langle t_{\Phi(\mathfrak{g})}\rangle$; cf. Definitionen 104 *und* 93.

Es ist $\kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\times\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}}$ eine positiv definite symmetrische $\mathbf{R}$-Bilinearform auf $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$; cf. Lemma 106.

Es ist also $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} = (\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\,, \kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\times\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}})$ ein euklidischer Raum.

Es ist $t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \smallsetminus \{0\}$; cf. Lemma 88, *Definition* 93.

(1) *Es ist ${}_{\mathbf{R}}\langle t_{\Phi(\mathfrak{g})}\rangle = \mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$; cf. Definition* 104.

(2) *Für $r \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ ist $\{\, \alpha \in \mathbf{R} \,:\, \alpha r \in t_{\Phi(\mathfrak{g})} \,\} = \{-1, +1\}$;*
cf. Lemma 98.(3), *Definition* 93.

(3) *Für $r,\, s \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ ist $2\,\dfrac{\kappa_{\mathfrak{g}}(r,s)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(s,s)} \in \mathbf{Z}$; cf. Lemma* 101.(1).

(4) *Für $r,\, s \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ ist*

$$r - 2\,\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(r,s)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(s,s)}\,s \;\in\; t_{\Phi(\mathfrak{g})}\;;$$

cf. Lemma 101.(2), *Definition* 93.

Den euklidischen Raum $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$ zusammen mit der Teilmenge $t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ heißt das *Wurzelsystem von* $\mathfrak{g}$; cf. Definition 110 und Beispiel 112 unten.

Das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ soll die Rolle eines Fingerabdrucks, den $\mathfrak{g}$ hinterläßt, spielen. Darin ist es e.g. dem Charakter einer Gruppendarstellung vergleichbar, oder der Signatur einer symmetrischen reellen Bilinearform.

Kapitel 5

Wurzelsysteme allgemein

Sei $\mathbf{R}$ unser Grundkörper.

Ein euklidischer Raum $E = (E, \lfloor -, = \rfloor)$ ist ein endlichdimensionaler Vektorraum, ausgestattet mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform $\lfloor -, = \rfloor : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$. Wir schreiben auch $\|x\| := \lfloor x, x \rfloor^{1/2}$ für $x \in E$.

5.1 Axiome

Definition 108 In einem euklidischen Raum $E = (E, \lfloor -, = \rfloor)$ sei die *normierte Form* definiert durch

$$\lfloor x, y \rfloor\!\rfloor \;:=\; 2\,\frac{\lfloor x, y \rfloor}{\lfloor y, y \rfloor}$$

für $x,\ y \in E$ mit $y \neq 0$. Es ist e.g. $\lfloor y, y \rfloor\!\rfloor = 2$.

Wir schreiben bisweilen auch $\lfloor -, = \rfloor\!\rfloor'$ für die normierte Form zu einem euklidischen Raum $(E', \lfloor -, = \rfloor')$, etc.

Bemerkung 109 Seien $x,\ y \in E$. Da auch $\lfloor -, = \rfloor|_{\langle x,y \rangle \times \langle x,y \rangle}$ positiv definit ist, ist die Determinante der Grammatrix dieser eingeschränkten Bilinearform positiv. Daraus folgt das Lemma von Cauchy-Schwarz; i.e. es ist $\lfloor x, y \rfloor^2 < \lfloor x, x \rfloor \lfloor y, y \rfloor$, falls (x, y) linear unabhängig ist, und natürlich $\lfloor x, y \rfloor^2 = \lfloor x, x \rfloor \lfloor y, y \rfloor$, falls (x, y) linear abhängig ist.

Definition 110 Ein *Wurzelsystem* (E, Φ) besteht aus einem euklidischen Raum E und einer endlichen Teilmenge $\Phi \subseteq E \smallsetminus \{0\}$, welche die folgenden Eigenschaften $(\mathrm{R}\,1, 2, 3, 4)$ erfüllt.

(R 1) Es ist $E = \langle \Phi \rangle$.

(R 2) Für $r \in \Phi$ ist $\{\, \alpha \in \mathbf{R} \,:\, \alpha r \in \Phi \,\} = \{-1, +1\}$.

(R 3) Für $r,\, s \in \Phi$ ist $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor \in \mathbf{Z}$.

(R 4) Für $r,\, s \in \Phi$ ist $r - \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor s \in \Phi$.

Die Elemente von Φ heißen dann *Wurzeln.*

Die Bezeichnung der Axiome stammt von engl. root system.

Bemerkung 111

(1) Es besagt (R 2), daß $\langle r \rangle \cap \Phi = \{-r, +r\}$ ist für $r \in \Phi$. Für $r,\, s \in \Phi$ ist also (r, s) linear unabhängig genau dann, wenn $r \notin \{-s, +s\}$ liegt.

(2) Es besagt (R 4), daß Φ unter Spiegelung an $\langle s \rangle^{\perp}$ stabil ist für $s \in \Phi$; cf. Definition 114 unten.

(3) Sei $\beta \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$. Ist (E, Φ) ein Wurzelsystem, so auch $(E, \beta\Phi)$.

Beispiel 112 Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra über $\mathbf{C}$. Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus; cf. Definition 82.

Es ist der euklidische Raum $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} = (\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\,, \kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{\mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \times \mathfrak{t}_{\mathbf{R}}})$ zusammen mit der endlichen Teilmenge $t_{\Phi(\mathfrak{g})} \subseteq \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \smallsetminus \{0\}$ ein Wurzelsystem; cf. Satz 107, Definition 110.

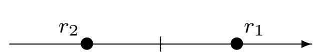
In den obigen Bezeichnungen haben wir also $E = \mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$, sowie $\lfloor r, s \rfloor = \kappa_{\mathfrak{g}}(r, s)$ und also $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor = 2\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(r,s)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(s,s)}$ gesetzt für $r,\, s \in t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ ([4]).

Es ist die endliche Teilmenge $t_{\Phi(\mathfrak{g})} \subseteq \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \smallsetminus \{0\}$ ein Wurzelsystem in $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$; cf. den Satz 107 über das Wurzelsystem einer halbeinfachen Liealgebra.

Vorsicht, in §4 wurden die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g})$ Wurzeln genannt, während hier in §5 die Elemente von $t_{\Phi(\mathfrak{g})}$ Wurzeln genannt werden. Wir verwenden also die Bijektion ε aus Definition 93 zur begrifflichen Identifikation.

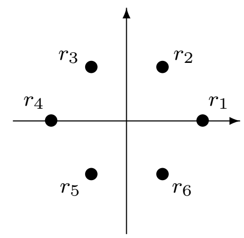
Beispiel 113

(1) Das zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem hat gemäß Beispiel 94 bildlich die Gestalt

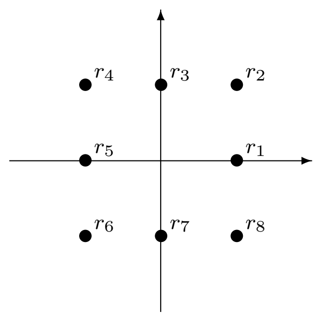


(2) Das zu $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem hat gemäß Aufgabe 39.(1) bildlich die Gestalt

[4]Es ist die Bilinearform $\lfloor r, s \rfloor \in K$ hier nicht zu verwechseln mit der Lieklammer $[r, s]$ $(= 0)$; cf. Bemerkung 84.



(3) Das zu $\mathfrak{o}(\mathbf{C}, b)$ mit b wie in Aufgabe 25 gehörige Wurzelsystem hat gemäß Aufgabe 39.(2) bildlich die Gestalt



Wir werden uns im folgenden kommentarlos dieser Bilder mit diesen Bezeichnungen bedienen. Die Skalierung der Achsen spielt gemäß Bemerkung 111 eine untergeordnete Rolle – wir lassen sie weg.

5.2 Weylgruppe

Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem.

Definition 114 Für $x \in E \smallsetminus \{0\}$ sei die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{w}_x & : & E & \longrightarrow & E \\ & & y & \longmapsto & y - \lfloor y, x \rceil\!\rfloor x \end{array}$$

die *Spiegelung an* $\langle x \rangle^\perp$ (oder *entlang* x).

Bemerkung 115 *Sei* $x \in E \smallsetminus \{0\}$. *Seien* $y,\ z\ \in\ E$.

(1) *Es ist* $E = \langle x \rangle \oplus \langle x \rangle^\perp$. *Es ist* $\mathrm{w}_x|_{\langle x \rangle}^{\langle x \rangle} = -\,\mathrm{id}_{\langle x \rangle}$ *und* $\mathrm{w}_x|_{\langle x \rangle^\perp}^{\langle x \rangle^\perp} = \mathrm{id}_{\langle x \rangle^\perp}$.

(2) *Es ist* $\lfloor \mathrm{w}_x(y), \mathrm{w}_x(z) \rfloor = \lfloor y, z \rfloor$.

(3) *Es ist* $\mathrm{w}_x \circ \mathrm{w}_x = \mathrm{id}_E$. *Insbesondere ist* w_x *bijektiv.*

(4) *Es ist* $\mathrm{w}_s(\Phi) = \Phi$ *für* $s \in \Phi$.

Beweis.

Zu (1). Es ist $E = \langle x\rangle \oplus \langle x\rangle^\perp$, da $\langle x\rangle \cap \langle x\rangle^\perp = 0$ wegen positiver Definitheit und da $u = \frac{1}{2}\lfloor u,x \rfloor\!\rfloor x + (u - \frac{1}{2}\lfloor u,x\rfloor\!\rfloor x)$ für $u \in E$.

Es ist $\mathrm{w}_x(x) = x - \lfloor x,x\rfloor\!\rfloor x = -x$.

Ist $y \in E$ mit $\lfloor y,x\rfloor = 0$, so ist $\mathrm{w}_x(y) = y - \lfloor y,x\rfloor\!\rfloor x = y$.

Zu (2). Schreibe $y = y' + \alpha x$ und $z = z' + \beta x$ mit $y',\, z' \in \langle x\rangle^\perp$ und $\alpha,\, \beta \in \mathbf{R}$; cf. (1). Es ergibt sich

$$\lfloor \mathrm{w}_x(y), \mathrm{w}_x(z)\rfloor \;=\; \lfloor y' - \alpha x\,,\, z' - \beta x\rfloor \;=\; \lfloor y', z'\rfloor + \lfloor \alpha x, \beta x\rfloor \;=\; \lfloor y' + \alpha x\,,\, z' + \beta x\rfloor \;=\; \lfloor y, z\rfloor\ .$$

Alternativ kann man auch die Abbildungsvorschrift von w_x direkt verwenden.

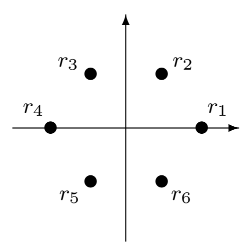
Zu (3). Sei $y \in E$ gegeben. Wir haben $(\mathrm{w}_x \circ \mathrm{w}_x)(y) \overset{!}{=} y$ zu zeigen. Schreibe $y = y' + \alpha x$ mit $y' \in \langle x\rangle^\perp$ und $\alpha \in \mathbf{R}$; cf. (1). Es wird

$$(\mathrm{w}_x \circ \mathrm{w}_x)(y) \;=\; \mathrm{w}_x(\mathrm{w}_x(y' + \alpha x)) \overset{(1)}{=} \mathrm{w}_x(y' - \alpha x) \overset{(1)}{=} y' + \alpha x \;=\; y\ .$$

Zu (4). Nach (R 4) ist $\mathrm{w}_s(\Phi) \subseteq \Phi$. Es folgt $\Phi \overset{(3)}{=} \mathrm{w}_s(\mathrm{w}_s(\Phi)) \subseteq \mathrm{w}_s(\Phi)$.

Insgesamt ist $\mathrm{w}_s(\Phi) = \Phi$. ▫

Beispiel 116 In



schickt w_{r_2} die Elemente $r_1 \mapsto r_6$, $r_6 \mapsto r_1$, $r_2 \mapsto r_5$, $r_5 \mapsto r_2$, $r_3 \mapsto r_4$, $r_4 \mapsto r_3$.

Definition 117 Definiere die *Weylgruppe* von (E, Φ) als Untergruppe

$$\mathrm{W}_{E,\Phi} \;:=\; \langle\!\langle\, \mathrm{w}_r \;:\; r \in \Phi \,\rangle\!\rangle \;=\; \{\, \mathrm{w}_{r_1} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{r_k} \;:\; k \geqslant 0,\, r_i \in \Phi \text{ für } i \in [1,k] \,\}\ .$$

von $\mathrm{GL}(E)$; cf. Bemerkung 115.(3). Sie hat also die Verkettung $(\circ)$ als Multiplikation.

Cf. Aufgabe 42.

Bemerkung 118 *Sei* $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$.

(1) *Es ist* $\lfloor w(y), w(z)\rfloor = \lfloor y, z\rfloor$ *für* $y,\ z \in E$.

(2) *Es ist* $w(\Phi) = \Phi$.

Beweis. Es folgt (1) aus Bemerkung 115.(2). Es folgt (2) aus Bemerkung 115.(4).

Bemerkung 119 *Schreibe* S_Φ *für die symmetrische Gruppe auf der Menge* Φ*, bestehend aus den Bijektionen von* Φ *nach* Φ*, mit der Komposition* $(\circ)$ *als Multiplikation.*

Wir haben einen Gruppenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{W}_{E,\Phi} & \stackrel{\psi}{\to} & \mathrm{S}_\Phi \\ w & \longmapsto & \psi(w) := w|_\Phi^\Phi \,, \end{array}$$

i.e. es ist $\psi(w \circ w') = \psi(w) \circ \psi(w')$ *für* $w,\, w' \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ *.*

Es ist ψ *injektiv. Insbesondere ist* $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ *endlich. Genauer, es ist* $|\mathrm{W}_{E,\Phi}| \leqslant |\Phi|!$ *.*

Beweis. Die Abbildung ψ ist wohldefiniert; cf. Bemerkung 118.(2). Es ist $\psi(w) \circ \psi(w') = w|_\Phi^\Phi \circ w'|_\Phi^\Phi = (w \circ w')|_\Phi^\Phi = \psi(w \circ w')$ für $w,\, w' \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$.

Es ist ψ injektiv, da die Elemente von W lineare Abbildungen von E nach E sind und da $E = \langle \Phi \rangle$; cf. Definitionen 114 und 117, (R 1). Da mit Φ auch S_Φ endlich ist, folgt schließlich $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ endlich, genauer $|\mathrm{W}_{E,\Phi}| \leqslant |\mathrm{S}_\Phi| = |\Phi|!$. ▫

Definition 120

Sei Φ' ein Wurzelsystem in einem euklidischen Raum $E' = (E'\,,\, \lfloor -, = \rfloor')$.

Sei Φ'' ein Wurzelsystem in einem euklidischen Raum $E'' = (E''\,,\, \lfloor -, = \rfloor'')$.

Eine bijektive lineare Abbildung $E' \xrightarrow[\sim]{\varphi} E''$ heißt *Isomorphismus von Wurzelsystemen* von (E', Φ') nach (E'', Φ''), falls $\varphi(\Phi') = \Phi''$ ist und falls

$$\lfloor r', s' \rfloor\!\rfloor' \;=\; \lfloor \varphi(r'), \varphi(s') \rfloor\!\rfloor''$$

ist für alle $r',\, s' \in \Phi'$.

Ist $(E', \Phi') = (E'', \Phi'')$, so heißt ein solches φ auch *Automorphismus* des Wurzelsystems (E', Φ').

Es heißen (E', Φ') und (E'', Φ'') *isomorph,* geschrieben $(E', \Phi') \simeq (E'', \Phi'')$, falls es einen Isomorphismus von Wurzelsystemen $E' \xrightarrow[\sim]{\varphi} E''$ gibt.

Die Relation der Isomorphie von Wurzelsystemen ist reflexiv (via Identität), symmetrisch (via Inverser) und transitiv (via Kompositums) auf der Menge der Wurzelsysteme. Die diesbezüglichen Äquivalenzklassen heißen *Isoklassen.* Schreibe $[E, \Phi]$ für die Isoklasse von (E, Φ).

Beispiel 121

(1) Für $\beta \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$ ist die Multiplikation mit β auf E ein Isomorphismus von (E, Φ) nach $(E, \beta\Phi)$; cf. Bemerkung 111.(3).

(2) Sei $s \in \Phi$. Es ist $\mathrm{w}_s : E \longrightarrow E$ ein Automorphismus des Wurzelsystems (E, Φ), wie aus Bemerkung 115.(2, 3, 4) folgt. Somit ist auch jedes Element von $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ ein Automorphismus des Wurzelsystems (E, Φ).

5.3 Wurzelpaare

Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem.

Seien $r,\ s \in \Phi$ mit $r \notin \{-s, +s\}$ gegeben.

Lemma 122 *Sei $\|r\| \leqslant \|s\|$. Es ist*

$$(\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor\,,\ \lfloor s, r \rfloor\!\rfloor) \ \in\ \{(0,0),\,(1,1),\,(1,2),\,(1,3),\,(-1,-1),\,(-1,-2),\,(-1,-3)\}\ .$$

Beweis. Es sind $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor$, $\lfloor s, r \rfloor\!\rfloor \overset{(\mathrm{R}\,3)}{\in} \mathbf{Z}$.

Da (r, s) linear unabhängig ist, cf. Bemerkung 111.(1), ist $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor \lfloor s, r \rfloor\!\rfloor = 4\,\frac{\lfloor r,s \rfloor^2}{\lfloor s,s \rfloor \lfloor r,r \rfloor} < 4$; cf. §5.1.

Es ist $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor = 0 \Leftrightarrow \lfloor s, r \rfloor\!\rfloor = 0$. Es ist $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor > 0 \Leftrightarrow \lfloor s, r \rfloor\!\rfloor > 0$. Es ist $|\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor| \leqslant |\lfloor s, r \rfloor\!\rfloor|$. ▫

Bemerkung 123 Sei α der Winkel, der von den Vektoren r und s eingeschlossen wird. Da

$$4\cos(\alpha)^2 \ =\ 4\,\frac{\lfloor r,s \rfloor^2}{\lfloor s,s \rfloor \lfloor r,r \rfloor} \ =\ \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor \lfloor s, r \rfloor\!\rfloor \ \overset{\mathrm{L.}\,122}{\in}\ \{0, 1, 2, 3\}\ ,$$

ist

$$\alpha \ \in\ \{\,\tfrac{\pi}{6}\,,\ \tfrac{\pi}{4}\,,\ \tfrac{\pi}{3}\,,\ \tfrac{\pi}{2}\,,\ \tfrac{2\pi}{3}\,,\ \tfrac{3\pi}{4}\,,\ \tfrac{5\pi}{6}\,\}\ .$$

Bemerkung 124

(1) *Ist $\lfloor r, s \rfloor > 0$, dann ist $r - s \in \Phi$.*

(2) *Ist $\lfloor r, s \rfloor < 0$, dann ist $r + s \in \Phi$.*

Beweis. Es folgt (2) aus (1) durch Ersetzung von s durch $-s$; cf. (R 2).

Zu (1). Es ist o.E. $\|r\| \leqslant \|s\|$; cf. (R 2). Also ist $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor \in \{-1, 0, +1\}$; cf. Lemma 122.

Da $\lfloor r, s \rfloor > 0$, ergibt sich hieraus $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor = 1$. Es folgt $r - s = r - \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor s \overset{(\mathrm{R}\,4)}{\in} \Phi$. ▫

Bemerkung 125
Es ist $I := \{\, i \in \mathbf{Z} \,:\, r + is \in \Phi \,\}$ ein endliches Intervall in $\mathbf{Z}$.

Es ist $0 \in I$ und $|I| \leqslant 4$.

Beweis. Sei *angenommen,* es ist $\{\, i \in \mathbf{Z} \,:\, r + is \in \Phi \,\}$ kein Intervall in $\mathbf{Z}$. Seien $m,\ n \in \mathbf{Z}$ gewählt mit $m < n$ und $r + ms \in \Phi$ und $r + (m+1)s \notin \Phi$ und $r + (n-1)s \notin \Phi$ und $r + ns \in \Phi$.

Es ist $\lfloor r + ms,\ s \rfloor \geqslant 0$; cf. Bemerkung 124.(2).

Es ist $\lfloor r + ns,\ s \rfloor \leqslant 0$; cf. Bemerkung 124.(1).

Die Differenz liefert $0 < (n - m)\lfloor s, s \rfloor \leqslant 0$, und das ist ein *Widerspruch.*

Schreibe $I = [a, b]$ mit $a,\ b \in \mathbf{Z}$, wobei $a \leqslant 0 \leqslant b$; beachte hierzu, daß $0 \in I$ liegt und I endlich ist.

Da $\Phi \overset{(\mathrm{R}\,4)}{\ni} (r + bs) - \lfloor r + bs, s \rfloor\!\rfloor s = r + (b - \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor - 2b)s$, ist $-b - \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor \geqslant a$.

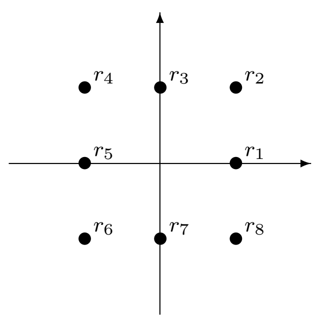
Da $\Phi \overset{(\mathrm{R}\,4)}{\ni} (r + as) - \lfloor r + as, s \rfloor\!\rfloor s = r + (a - \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor - 2a)s$, ist $-a - \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor \leqslant b$.

Zusammen ist $a + b = -\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor$. Also wird

$$b - a \;=\; -\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor - 2a \;=\; -\lfloor r + as, s \rfloor\!\rfloor \overset{\text{L. 122}}{\leqslant} 3\ .$$

$\square$

Beispiel 126 Für



haben wir zunächst $(\lfloor r_3\,, r_2 \rfloor\!\rfloor, \lfloor r_2\,, r_3 \rfloor\!\rfloor) = (1, 2)$. Ferner ist $\{\, i \in \mathbf{Z} \,:\, r_2 + ir_3 \in \Phi \,\} = [-2, 0]$. Bezugnehmend auf den Beweis von Bemerkung 125 wird in der Tat $-2 + 0 = -2 = -\lfloor r_2\,, r_3 \rfloor\!\rfloor$.

5.4 Zwei euklidische Bemerkungen

Definition 127 Für eine Teilmenge $M \subseteq E$ und ein $x \in E \smallsetminus \{0\}$ schreiben wir

$$M_{x,>} \;:=\; \{\, y \in M \;:\; \lfloor x, y \rfloor > 0 \,\}\ .$$

Bemerkung 128 *Sei* $(x_1\,,\ \ldots,\ x_\ell)$ *eine* **R**-*lineare Basis von* E. *Es ist* $\bigcap_{i \in [1,\ell]} E_{x_i\,,>} \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $Y_i := \langle x_1\,, \ldots,\ x_{i-1}\,,\ x_{i+1}\,,\ \ldots, x_\ell \rangle$ und $Z_i := Y_i^\perp$ für $i \in [1, \ell]$. Da $E = Y_i \oplus Z_i$, können wir $x_i = y_i + z_i$ mit $y_i \in Y_i$ und $z_i \in Z_i$ schreiben für $i \in [1, \ell]$. Es ist $z_i \neq 0$, da $(x_1\,,\ \ldots,\ x_\ell)$ linear unabhängig ist.

Sei $z := \sum_{j\in[1,\ell]} z_j$. Für $i \in [1,\ell]$ wird

$$\lfloor x_i\,,z\rfloor \;=\; \sum_{j\in[1,\ell]} \lfloor x_i\,,z_j\rfloor \;=\; \lfloor x_i\,,z_i\rfloor \;=\; \lfloor y_i+z_i\,,\,z_i\rfloor \;=\; \lfloor z_i\,,z_i\rfloor \;>\; 0\,.$$

Also ist $z \in \bigcap_{i\in[1,\ell]} E_{x_i\,,>}$. ▫

Bemerkung 129 *Sei $x \in E \smallsetminus \{0\}$. Sei $M \subseteq E_{x,>}$ so gegeben, daß $\lfloor m,n\rfloor \leqslant 0$ ist für alle $m,\, n \in M$ mit $m \neq n$. Dann ist M linear unabhängig.*

Beweis. Sei $\sum_{m\in M} \alpha_m\, m = 0$ für gewisse $\alpha_m \in \mathbf{R}$, mit $\alpha_m \neq 0$ für nur endlich viele $m \in M$. Sei $M_> := \{\, m \in M \,:\, \alpha_m > 0\,\}$. Sei $M_< := \{\, n \in M \,:\, \alpha_n < 0\,\}$. Wir haben $M_> \overset{!}{=} \emptyset$ und $M_< \overset{!}{=} \emptyset$ zu zeigen.

Sei $y := \sum_{m\in M_>} \alpha_m\, m = \sum_{n\in M_<} (-\alpha_n)\, n$. Es ist

$$\lfloor y,y\rfloor \;=\; \sum_{m\in M_>\,,\;n\in M_<} \underbrace{\alpha_m(-\alpha_n)}_{>\,0}\;\underbrace{\lfloor m,n\rfloor}_{\leqslant\,0} \;\leqslant\; 0\,,$$

und also $y = 0$. Daher ist

$$0 \;=\; \lfloor x,y\rfloor \;=\; \sum_{m\in M_>} \underbrace{\alpha_m}_{>\,0}\;\underbrace{\lfloor x,m\rfloor}_{>\,0} \;=\; \sum_{m\in M_<} \underbrace{(-\alpha_n)}_{>\,0}\;\underbrace{\lfloor x,n\rfloor}_{>\,0}\,,$$

woraus wir $M_> = \emptyset$ und $M_< = \emptyset$ folgern. ▫

5.5 Basen

Sei (E,Φ) ein Wurzelsystem.

Definition 130

(1) Ist Ξ eine Teilmenge von Φ, so schreiben wir

$$\begin{array}{rcl}\Phi^+_\Xi & := & \{\,\sum_{x\in\Xi} \zeta_x\, x \,:\, \zeta_x \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}\,\} \cap \Phi \\ \Phi^-_\Xi & := & \{\,\sum_{x\in\Xi} \zeta_x\, x \,:\, \zeta_x \in \mathbf{Z}_{\leqslant 0}\,\} \cap \Phi\,.\end{array}$$

Beachte, daß wegen $0 \notin \Phi$ für ein Element $\sum_{x\in\Xi} \zeta_x x \in \Phi^+_\Xi$ wenigstens ein Koeffizient ζ_x in $\mathbf{Z}_{>0}$ zu liegen hat.

(2) Eine $\mathbf{R}$-lineare Basis $\Delta \subseteq \Phi$ von E heißt *Basis* von (E,Φ), wenn $\Phi = \Phi^+_\Delta \sqcup \Phi^-_\Delta$ ist.

Disjunktheit ist hierbei eine Konsequenz aus $\Phi \subseteq E \smallsetminus \{0\}$ und aus Δ linear unabhängig.

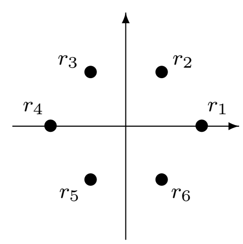
(3) Es heißt $x \in E$ *regulär* (für Φ), falls $\lfloor x, r \rfloor \neq 0$ für alle $r \in \Phi$, i.e. falls x in keiner Hyperebene orthogonal zu einer Wurzel liegt.

(4) Sei $x \in E \smallsetminus \{0\}$. Wir erinnern an $\Phi_{x,>} = \{ r \in \Phi \,:\, \lfloor x, r \rfloor > 0 \}$; cf. Definition 127.

Es heißt $r \in \Phi_{x,>}$ *zerlegbar,* falls $s,\ t \in \Phi_{x,>}$ mit $r = s + t$ existieren. Andernfalls heißt r *unzerlegbar.* Schreibe

$$\Phi_{x,>}^{\text{unz}} \;:=\; \{ r \in \Phi_{x,>} \,:\, r \text{ ist unzerlegbar} \} \,.$$

Beispiel 131 Für



ist $\Delta := \{r_1, r_3\}$ eine Basis, da $\Phi_\Delta^+ = \{ r_1 \,,\, r_3 \,,\, r_1 + r_3\}$ und $\Phi_\Delta^- = \{ -r_1 \,,\, -r_3 \,,\, -r_1 - r_3\}$ dann $\Phi = \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-$ ergeben.

Dahingegen ist $\Xi := \{r_1, r_2\}$ keine Basis, da e.g. $r_2 - r_1 = r_3 \in \Phi \smallsetminus (\Phi_\Xi^+ \sqcup \Phi_\Xi^-)$ liegt.

Bemerkung 132 *Sei* Δ *eine Basis von* (E, Φ)*. Für* $d,\ e \in \Delta$ *mit* $d \neq e$ *ist* $\lfloor d, e \rfloor \leqslant 0$ *.*

Beweis. Es ist (d, e) linear unabhängig.

Wäre nun $\lfloor d, e \rfloor > 0$, dann wäre auch $d - e \overset{\text{B. 124.(1)}}{\in} \Phi \smallsetminus (\Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-)$, im *Widerspruch* zu $\Phi = \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-$.

Bemerkung 133 *Es gibt ein für* Φ *reguläres* $x \in E$*.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $E \smallsetminus (\bigcup_{r \in \Phi} \langle r \rangle^\perp) \neq \emptyset$. Da Φ endlich ist, folgt dies aus Aufgabe 44. $\square$

Lemma 134 *Sei* $x \in E$ *regulär für* Φ*. Schreibe* $\Gamma := \Phi_{x,>}^{\text{unz}}$ *.*

Es ist $\Gamma = \Phi_{x,>}^{\text{unz}}$ *eine Basis von* (E, Φ)*.*

Zudem ist $\Phi_{x,>} = \Phi_\Gamma^+$ *.*

Beweis.

Schritt 1. *Es ist* $\Phi_{x,>} \subseteq \Phi_\Gamma^+$ *.*

Angenommen, es ist $\Phi_{x,>} \smallsetminus \Phi_\Gamma^+ \neq \emptyset$. Wähle ein $r \in \Phi_{x,>} \smallsetminus \Phi_\Gamma^+$ mit $\lfloor x, r \rfloor$ minimal.

Wegen $\Gamma \subseteq \Phi_\Gamma^+$ ist $r \notin \Gamma$, i.e. $r \in \Phi_{x,>}$ ist zerlegbar. Schreibe $r = s + t$ mit $s,\, t \in \Phi_{x,>}$. Es ist $\lfloor x, r\rfloor = \lfloor x, s\rfloor + \lfloor x, t\rfloor$, wobei auch $\lfloor x, s\rfloor > 0$ und $\lfloor x, t\rfloor > 0$.

Da $\lfloor x, s\rfloor < \lfloor x, r\rfloor$ und $\lfloor x, t\rfloor < \lfloor x, r\rfloor$, gibt die Minimalität von $\lfloor x, r\rfloor$, daß $s,\, t \in \Phi_\Gamma^+$. Dann ist aber auch $r = s + t \in \Phi_\Gamma^+$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Schritt 2. *Für* $r,\, s \in \Gamma$ *mit* $r \neq s$ *ist* $\lfloor r, s\rfloor \leqslant 0$. *Insbesondere ist* Γ *linear unabhängig; cf. Bemerkung* 129.

Es ist $r \neq -s$, da $r,\, s \in \Phi_{x,>}$ und also $\lfloor x, r\rfloor > 0$ und $\lfloor x, s\rfloor > 0$.

Angenommen, es ist $\lfloor r, s\rfloor > 0$. Dann sind $r - s$ und $s - r$ in Φ; cf. Bemerkung 124.(1). Da x regulär ist, ist $r - s$ oder $s - r$ in $\Phi_{x,>}$. Sei o.E. $r - s \in \Phi_{x,>}$. Da $r = s + (r - s)$ und $s,\, (r - s) \in \Phi_{x,>}$, ist r zerlegbar. Wir haben einen *Widerspruch.*

Schritt 3. *Es ist* $\Phi = \Phi_{x,>} \sqcup (-\Phi_{x,>})$.

Es ist $-\Phi_{x,>} = \Phi_{-x,>}$ dank (R 2). Daraus folgt die Disjunktheit und, wegen x regulär, die Inklusion $\subseteq$.

Schritt 4. *Es ist* Γ *eine Basis von* (E, Φ). *Es ist* $\Phi_{x,>} = \Phi_\Gamma^+$.

Mit Schritt 2 ist Γ linear unabhängig. Insbesondere ist $\Phi_\Gamma^+ \cap \Phi_\Gamma^- = \emptyset$. Beachte noch, daß $-\Phi_\Gamma^+ = \Phi_\Gamma^-$ ist dank (R 2). Es folgt

$$(*) \qquad \Phi \overset{\text{Schr. 3}}{=} \Phi_{x,>} \sqcup (-\Phi_{x,>}) \overset{\text{Schr. 1}}{\subseteq} \Phi_\Gamma^+ \sqcup (-\Phi_\Gamma^+) \;=\; \Phi_\Gamma^+ \sqcup \Phi_\Gamma^- \;\subseteq\; \Phi\,.$$

Insbesondere ist $\Phi = \Phi_\Gamma^+ \sqcup \Phi_\Gamma^-$ und $E \overset{\text{(R 1)}}{=} \langle\Phi\rangle = \langle\Phi_\Gamma^+ \sqcup \Phi_\Gamma^-\rangle \subseteq \langle\Gamma\rangle \subseteq E$.

Insgesamt ist somit Γ linear unabhängig, $\langle\Gamma\rangle = E$ und $\Phi = \Phi_\Gamma^+ \sqcup \Phi_\Gamma^-$ gezeigt. Damit ist Γ eine Basis von (E, Φ).

Ferner ist $\Phi_{x,>} = \Phi_\Gamma^+$, da sonst die erste Inklusion in $(*)$ echt wäre. ▫

Korollar 135 *Es gibt eine Basis des Wurzelsystems* (E, Φ).

Beweis. Es gibt ein für Φ reguläres $x \in E$; cf. Bemerkung 133.

Es ist $\Phi_{x,>}^{\text{unz}}$ eine Basis von (E, Φ); cf. Lemma 134. ▫

Bemerkung 136 *Sei* Δ *eine Basis von* (E, Φ). *Sei* $x \in E$ *regulär für* Φ.

Es ist $\Delta \subseteq \Phi_{x,>}$ *genau dann, wenn* $\Delta = \Phi_{x,>}^{\text{unz}}$ *ist.*

Beweis. Sei $\Delta \subseteq \Phi_{x,>}$. Zu zeigen ist $\Delta \overset{!}{=} \Phi_{x,>}^{\text{unz}}$.

Es ist $\Phi_\Delta^+ \subseteq \Phi_{x,>}$ und $\Phi_\Delta^- \subseteq \Phi_{-x,>}$. Es folgt

$$\Phi \;=\; \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^- \;\subseteq\; \Phi_{x,>} \sqcup \Phi_{-x,>} \;\subseteq\; \Phi\,,$$

und also $\Phi_\Delta^+ = \Phi_{x,>}$.

Wir wollen $\Delta \overset{!}{\subseteq} \Phi_{x,>}^{\mathrm{unz}}$ zeigen. *Annahme,* nicht. Dann gibt es $e \in \Delta \subseteq \Phi_{x,>}$ mit $e = s + t$ mit $s,\, t \in \Phi_{x,>} = \Phi_\Delta^+$. Es ist $s = \sum_{d\in\Delta} \xi_d\, d$ mit $\xi_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $\sum_{d\in\Delta} \xi_d \geqslant 1$. Es ist $t = \sum_{d\in\Delta} \eta_d\, d$ mit $\eta_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ und $\sum_{d\in\Delta} \eta_d \geqslant 1$. Zusammen ist also $e = \sum_{d\in\Delta} (\xi_d + \eta_d) d$ mit $\sum_{d\in\Delta}(\xi_d + \eta_d) \geqslant 2$, was aber wegen Δ linear unabhängig und $e \in \Delta$ ein *Widerspruch* ist.

Da $|\Delta| = \ell \overset{\text{L.134}}{=} |\Phi_{x,>}^{\mathrm{unz}}|$, folgt $\Delta = \Phi_{x,>}^{\mathrm{unz}}$. ▫

Lemma 137 *Sei Δ eine Basis von (E, Φ).*

Es gibt ein für Φ reguläres $x \in E$ mit $\Delta = \Phi_{x,>}^{\mathrm{unz}}$.

Beweis. Sei $x \in \bigcap_{d\in\Delta} E_{d\,,>}$; cf. Bemerkung 128. Es ist x regulär für Φ, da wir $r \in \Phi = \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-$ als $r = \pm \sum_{d\in\Delta} \zeta_d\, d$ schreiben können mit $\zeta_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, wobei für wenigstens ein $d \in \Delta$ auch $\zeta_d > 0$ ist, und somit $\lfloor x, r\rfloor = \pm \sum_{d\in\Delta} \zeta_d \underbrace{\lfloor x, d\rfloor}_{>0} \neq 0$ folgt.

Nun ist $\Delta \subseteq \Phi_{x,>}$, dank Bemerkung 136 also auch $\Delta = \Phi_{x,>}^{\mathrm{unz}}$. ▫

5.6 Weylgruppe und Basen

Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem; cf. Definition 110.

Es bezeichnet $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ die Weylgruppe von (E, Φ); cf. Definition 117.

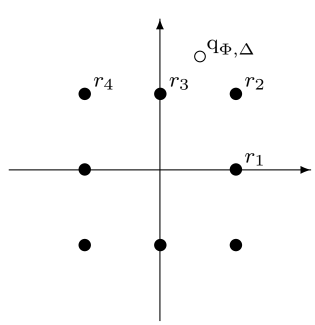
Sei $\Delta \subseteq \Phi$ eine Basis von (E, Φ); cf. Definition 130.(1), Korollar 135.

Wir erinnern an $\Phi_\Delta^+ = \{\, \sum_{d\in\Delta} \zeta_d\, d \,:\, \zeta_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \,\} \cap \Phi$ und an $\Phi = \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-$.

Wir setzen

$$\mathrm{q}_{\Phi,\Delta} \;:=\; \tfrac{1}{2} \sum_{r\in\Phi_\Delta^+} r \;\in\; E\,.$$

Beispiel 138



Für $\Delta = \{\, r_1\,,\, r_4 \,\}$ wird $\Phi_\Delta^+ = \{\, r_1\,,\, r_2\,,\, r_3\,,\, r_4 \,\}$. Wir erhalten vorstehendes Bild.

Bemerkung 139 *Sei $e \in \Delta$. Es ist* $\mathrm{w}_e(\Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{e\}) = \Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{e\}$.

Beweis. Sei $r \in \Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{e\}$ gegeben. Wir haben $\mathrm{w}_e(r) \overset{!}{\in} \Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{e\}$ zu zeigen; cf. Bemerkung 115.(3).

Wäre $\mathrm{w}_e(r) = e$, so wäre $r = \mathrm{w}_e(e) = -e \notin \Phi_\Delta^+$, was *nicht* der Fall ist.

Es ist $\mathrm{w}_e(r) \overset{\text{B. 115.(4)}}{\in} \Phi$. Da $\Phi = \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-$, bleibt $\mathrm{w}_e(r) \overset{!}{\notin} \Phi_\Delta^-$ zu zeigen.

Schreibe $r = \sum_{d \in \Delta} \zeta_d \, d$ mit $\zeta_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es gibt ein $f \in \Delta \smallsetminus \{e\}$ mit $\zeta_f \geqslant 1$, da aus $r = \zeta_e \, e$ dank (R 2) und $r \in \Phi_\Delta^+$ bereits $r = e$ folgte. Es ist

$$\mathrm{w}_e(r) \;=\; r - \lfloor r, e \rfloor\!\rfloor e \;=\; (\zeta_e - \lfloor r, e \rfloor\!\rfloor) e + \textstyle\sum_{d \in \Delta \smallsetminus \{e\}} \zeta_d \, d \;.$$

Also ist der Koeffizient bei f von $\mathrm{w}_e(r)$ ebenfalls gleich $\zeta_f \geqslant 1$, was in der Tat $\mathrm{w}_e(r) \notin \Phi_\Delta^-$ nach sich zieht. $\square$

Lemma 140 *Es ist* $\mathrm{w}_d(\mathrm{q}_{\Phi,\Delta}) = \mathrm{q}_{\Phi,\Delta} - d$ *für $d \in \Delta$.*

In Beispiel 138 sahen wir, daß dies schon für $d \in \Delta$, i.a. aber nicht für $d \in \Phi \smallsetminus \Delta$ gilt.

Beweis. Nach Bemerkung 139 haben wir die Bijektion $\mathrm{w}_d|_{\Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{d\}}^{\Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{d\}}$. Also wird

$$\mathrm{w}_d(\mathrm{q}_{\Phi,\Delta}) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{w}_d(d) + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{r \in \Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{d\}} \mathrm{w}_d(r) \;=\; -\tfrac{1}{2}\, d + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{r \in \Phi_\Delta^+ \smallsetminus \{d\}} r \;=\; \mathrm{q}_{\Phi,\Delta} - d \;.$$

$\square$

Bemerkung 141 *Sei $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$. Sei $x \in E \smallsetminus \{0\}$. Es ist* $\mathrm{w}_{w(x)} = w \circ \mathrm{w}_x \circ w^{-1}$.

Beweis. Sei $y \in E$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{w}_{w(x)}(y) & = & y - \lfloor y, w(x) \rfloor\!\rfloor w(x) \\ & \overset{\text{B. 118.(1)}}{=} & y - \lfloor w^{-1}(y), x \rfloor\!\rfloor w(x) \\ & = & w(w^{-1}(y) - \lfloor w^{-1}(y), x \rfloor\!\rfloor x) \\ & = & (w \circ \mathrm{w}_x \circ w^{-1})(y) \;. \end{array}$$

$\square$

Bemerkung 142 *Ist $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$, so ist $w(\Delta)$ eine Basis von (E, Φ).*

Beweis. Es ist $w(\Delta)$ eine $\mathbf{R}$-lineare Basis von E; cf. Bemerkung 115.(3).

Wir erinnern an $w(\Phi) = \Phi$; cf. Bemerkung 118.(2).

Daraus folgt erstens $w(\Delta) \subseteq \Phi$.

Daraus folgt zweitens

$$\begin{array}{rcl} \Phi^+_{w(\Delta)} & = & \{ \sum_{d\in\Delta} \zeta_d \, w(d) \, : \, \zeta_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \} \cap \Phi \\ & = & w(\{ \sum_{d\in\Delta} \zeta_d \, d \, : \, \zeta_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \}) \cap w(\Phi) \\ & = & w(\{ \sum_{d\in\Delta} \zeta_d \, d \, : \, \zeta_d \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \} \cap \Phi) \\ & = & w(\Phi^+_\Delta) \end{array}$$

und, analog, $\Phi^-_{w(\Delta)} = w(\Phi^-_\Delta)$. Somit ist

$$\Phi \;=\; w(\Phi) \;=\; w(\Phi^+_\Delta) \sqcup w(\Phi^-_\Delta) \;=\; \Phi^+_{w(\Delta)} \sqcup \Phi^-_{w(\Delta)} \; .$$

□

Wir schreiben provisorisch

$$W_\Delta \;:=\; \langle\!\langle\, \mathrm{w}_d \,:\, d \in \Delta \,\rangle\!\rangle \;\subseteq\; \mathrm{W}_{E,\Phi} \;;$$

cf. Definition 117; cf. auch Basensymmetrie, Satz 145.(3) unten.

Mit $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ ist auch W_Δ endlich; cf. Bemerkung 119.

Lemma 143 *Sei* $w \in W_\Delta \smallsetminus \{\mathrm{id}_E\}$.

Sei $m \geqslant 1$ *minimal so, daß es* $d_i \in \Delta$ *gibt für* $i \in [1,m]$ *mit* $w = \mathrm{w}_{d_1} \circ \mathrm{w}_{d_2} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_m}$.

Seien solche Elemente d_i *für* $i \in [1,m]$ *gegeben. Dann ist* $w(d_m) \in \Phi^-_\Delta$.

Beweis. Es ist $(\mathrm{w}_{d_1} \circ \mathrm{w}_{d_2} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{m-1}})(d_m) \overset{!}{\in} \Phi^+_\Delta$ zu zeigen.

Es ist $(\mathrm{w}_{d_1} \circ \mathrm{w}_{d_2} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{m-1}})(d_m) \overset{\text{B. 118.(2)}}{\in} \Phi \;=\; \Phi^+_\Delta \sqcup \Phi^-_\Delta$.

Annahme, es ist $(\mathrm{w}_{d_1} \circ \mathrm{w}_{d_2} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{m-1}})(d_m) \in \Phi^-_\Delta$. Es ist $d_m \in \Delta \subseteq \Phi^+_\Delta$.

Fall $m = 1$. Es ist d_1 zugleich in Φ^-_Δ und in Φ^+_Δ , was einen *Widerspruch* darstellt.

Fall $m \geqslant 2$. Sei $j \in [2,m]$ minimal mit $x := (\mathrm{w}_{d_j} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{m-1}})(d_m) \in \Phi^+_\Delta$. Folglich ist $\mathrm{w}_{d_{j-1}}(x) \in \Phi^-_\Delta$. Daher muß $x = d_{j-1}$ sein; cf. Bemerkung 139.

Schreibe $v := \mathrm{w}_{d_j} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{m-1}} \in \mathrm{W}_\Delta$. Es ist $d_{j-1} = x = v(d_m)$ und also

$$\mathrm{w}_{d_{j-1}} \;=\; \mathrm{w}_{v(d_m)} \;\overset{\text{B. 141}}{=}\; v \circ \mathrm{w}_{d_m} \circ v^{-1} \; .$$

Damit wird

$$\begin{array}{rcl} w & = & \mathrm{w}_{d_1} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{j-2}} \circ \mathrm{w}_{d_{j-1}} \circ \mathrm{w}_{d_j} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_m} \\ & = & \mathrm{w}_{d_1} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{j-2}} \circ v \circ \mathrm{w}_{d_m} \circ v^{-1} \circ v \circ \mathrm{w}_{d_m} \\ & \overset{\text{B. 115.(3)}}{=} & \mathrm{w}_{d_1} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{j-2}} \circ \mathrm{w}_{d_j} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_{m-1}} \; . \end{array}$$

Dies ist ein *Widerspruch* zur Minimalität von m. □

Bemerkung 144 *Sei $x \in E$ regulär für Φ. Es gibt ein $w \in W_\Delta$ mit $w(\Delta) = \Phi^{\mathrm{unz}}_{x,>}$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß es ein $w \in W_\Delta$ so gibt, daß $w(\Delta) \overset{!}{\subseteq} \Phi_{x,>}$ ist; cf. Bemerkungen 142 und 136.

Wähle $w \in W_\Delta$ mit $\lfloor x, w(\mathrm{q}_{\Phi,\Delta})\rfloor$ maximal. Sei $d \in \Delta$ gegeben. Es ist $w(d) \in \Phi$; cf. Bemerkung 118.(2).

Wir wollen $w(d) \overset{!}{\in} \Phi_{x,>}$ zeigen, i.e. $\lfloor x, w(d)\rfloor \overset{!}{>} 0$; cf. Definition 127. Da $w \circ \mathrm{w}_d \in W_\Delta$, ist

$$\lfloor x, w(\mathrm{q}_{\Phi,\Delta})\rfloor \;\geqslant\; \lfloor x, (w \circ \mathrm{w}_d)(\mathrm{q}_{\Phi,\Delta})\rfloor \;\overset{\text{L. 140}}{=}\; \lfloor x, w(\mathrm{q}_{\Phi,\Delta} - d)\rfloor \;,$$

i.e. $\lfloor x, w(d)\rfloor \geqslant 0$.

Wegen x regulär und wegen $w(d) \in \Phi$ ist $\lfloor x, w(d)\rfloor \neq 0$.

Insgesamt ist somit in der Tat $\lfloor x, w(d)\rfloor > 0$. ▫

Satz 145 (Basensymmetrie) *Weiterhin sei Δ unsere Basis von (E, Φ).*

Wir erinnern an $W_\Delta = \langle\!\langle\, \mathrm{w}_d \,:\, d \in \Delta \,\rangle\!\rangle \subseteq \mathrm{W}_{E,\Phi}$; cf. Definition 117.

(1) *Sei Δ' eine Basis von (E, Φ). Es gibt ein $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ mit $w(\Delta) = \Delta'$.*

(2) *Sei $r \in \Phi$. Es gibt eine Basis Δ' von (E, Φ) mit $r \in \Delta'$.*
Es gibt ein $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ mit $w(r) \in \Delta$.

(3) *Es ist $\mathrm{W}_{E,\Phi} = W_\Delta$.*

(4) *Sei $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$. Genau dann ist $w(\Delta) = \Delta$, wenn $w = \mathrm{id}_E$ ist.*

Beweis. Wir wollen die folgenden Aussagen $(1', 2')$ zeigen.

(1′) Sei Δ' eine Basis von (E, Φ). Es gibt ein $w \in \mathrm{W}_\Delta$ mit $w(\Delta) = \Delta'$.

(2′) Sei $r \in \Phi$. Es gibt eine Basis Δ' von (E, Φ) mit $r \in \Delta'$.
Es gibt ein $w \in \mathrm{W}_\Delta$ mit $w(r) \in \Delta$.

Es gilt $(1') \Rightarrow (1)$. Es gilt $(2') \Rightarrow (2)$.

Zu (1′). Es gibt ein für Φ reguläres $x' \in E$ mit $\Delta' = \Phi^{\mathrm{unz}}_{x',>}$; cf. Lemma 137. Nun gibt es ein $w \in W_\Delta$ mit $w(\Delta) = \Phi^{\mathrm{unz}}_{x',>} = \Delta'$; cf. Bemerkung 144.

Zu (2′). Für $s \in \Phi \smallsetminus \{-r, +r\}$ ist $\langle s\rangle \neq \langle r\rangle$, also $\langle s\rangle^\perp \neq \langle r\rangle^\perp$, also $\langle s\rangle^\perp \cap \langle r\rangle^\perp$ von Codimension 1 in $\langle r\rangle^\perp$; cf. Bemerkung 111.(1). Also gibt es ein

$$x \;\in\; \langle r\rangle^\perp \smallsetminus \bigcup_{s \in \Phi \smallsetminus \{-r,+r\}} (\langle s\rangle^\perp \cap \langle r\rangle^\perp) \;;$$

cf. Aufgabe 44. Es ist also $\lfloor x, r \rfloor = 0$, aber $\lfloor x, s \rfloor \neq 0$ für alle $s \in \Phi \smallsetminus \{-r, +r\}$.

Sei $y \in E$ mit $\lfloor y, r \rfloor > 0$. Wähle $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$ mit $\lambda(\lfloor y, r \rfloor + |\lfloor y, s \rfloor|) < |\lfloor x, s \rfloor|$ für alle $s \in \Phi \smallsetminus \{-r, +r\}$, was wegen Φ endlich möglich ist. Setze $z := x + \lambda y$ und $\varepsilon := \lfloor z, r \rfloor = \lambda \lfloor y, r \rfloor \in \mathbf{R}_{>0}$. Für $s \in \Phi \smallsetminus \{-r, +r\}$ folgt

$$\begin{array}{rcl} |\lfloor z, s \rfloor| & = & |\lfloor x, s \rfloor + \lambda \lfloor y, s \rfloor| \\ & \geqslant & |\lfloor x, s \rfloor| - \lambda |\lfloor y, s \rfloor| \\ & > & \lambda \lfloor y, r \rfloor \\ & = & \varepsilon \ . \end{array}$$

Insbesondere ist z regulär für Φ.

Es ist $r \in \Phi_{z,>}$. *Wäre* r darin zerlegbar, so gäbe es $t,\, u \in \Phi_{z,>}$ mit $r = t + u$, also $t,\, u \notin \{-r, +r\}$ nach (R 2), daher $\lfloor z, t \rfloor$, $\lfloor z, u \rfloor > \varepsilon$, und somit

$$\varepsilon \;=\; \lfloor z, r \rfloor \;=\; \lfloor z, t \rfloor + \lfloor z, u \rfloor \;>\; 2\varepsilon \ ,$$

was *nicht der Fall ist.* Somit ist $r \in \Phi^{\mathrm{unz}}_{z,>} =: \Delta'$, und Δ' ist eine Basis von (E, Φ) ; cf. Lemma 134.

Insbesondere gibt es ein $v \in W_\Delta$ mit $v(\Delta) = \Delta'$, und also auch $v^{-1}(r) \in v^{-1}(\Delta') = \Delta$; cf. (1′). Nehme $w := v^{-1}$.

Zu (3). Es ist $W_\Delta \subseteq \mathrm{W}_{E,\Phi}$; cf. Definition 117.

Sei $r \in \Phi$. Wir haben $\mathrm{w}_r \overset{!}{\in} W_\Delta$ zu zeigen.

Wähle $w \in W_\Delta$ mit $w(r) \in \Delta$; cf. (2′). Also ist $w \circ \mathrm{w}_r \circ w^{-1} \overset{\text{B.141}}{=} \mathrm{w}_{w(r)} \in W_\Delta$, und somit $\mathrm{w}_r = w^{-1} \circ \mathrm{w}_{w(r)} \circ w \in W_\Delta$.

Zu (4). Sei $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ mit $w(\Delta) = \Delta$ gegeben. Wir haben $w \overset{!}{=} \mathrm{id}_E$ zu zeigen.

Es ist $w \in W_\Delta$; cf. (3).

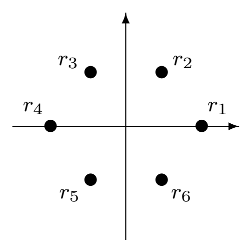
Angenommen, es ist $w \neq \mathrm{id}_E$. Sei $m \geqslant 1$ minimal so, daß es $d_i \in \Delta$ gibt für $i \in [1, m]$ mit $w = \mathrm{w}_{d_1} \circ \mathrm{w}_{d_2} \circ \cdots \circ \mathrm{w}_{d_m}$; wähle solche d_i . Es ist $w(d_m) \in \Phi^-_\Delta$; cf. Lemma 143. Aber $w(d_m) \in w(\Delta) = \Delta \subseteq \Phi^+_\Delta$. Wir haben einen *Widerspruch.* ▫

Korollar 146 *Wir haben die Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{W}_{E,\Phi} & \xrightarrow{\sim} & \{\, \Delta' \subseteq \Phi \,:\, \Delta' \text{ ist Basis von } (E, \Phi) \,\} \\ w & \longmapsto & w(\Delta) \ . \end{array}$$

Beweis. Wohldefiniertheit folgt aus Bemerkung 142. Surjektivität folgt aus Satz 145.(1). Injektivität folgt mit Satz 145.(4), denn für $w,\, w' \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ mit $w(\Delta) = w'(\Delta)$ ist $\Delta = w^{-1}w'(\Delta)$ und also $w^{-1}w' = \mathrm{id}_E$. ▫

Beispiel 147 In



haben wir die Basen $\Delta_1 = \{ r_1 , r_3 \}$, $\Delta_2 = \{ r_1 , r_5 \}$, $\Delta_3 = \{ r_2 , r_4 \}$, $\Delta_4 = \{ r_2 , r_6 \}$, $\Delta_5 = \{ r_3 , r_5 \}$, $\Delta_6 = \{ r_4 , r_6 \}$, jedes Element von Φ liegt also in 2 Basen. Es wird e.g. $\mathrm{w}_{r_3}(\Delta_3) = \Delta_2$.

Von Aufgabe 42.(1) wissen wir $|\mathrm{W}_{E,\Phi}| = 6$. Mit Korollar 146 bestätigt dies, daß es 6 Basen gibt.

5.7 Cartanmatrix und Dynkingraph

Seien (E, Φ) und (E', Φ') Wurzelsysteme; cf. Definition 110. Schreibe $\ell := \dim E$ und $\ell' := \dim E'$.

Es bezeichnet $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ die Weylgruppe von (E, Φ) ; cf. Definition 117.

Sei $\Delta = \{d_1 , \ldots , d_\ell\} \subseteq \Phi$ eine Basis von (E, Φ) ; cf. Definition 130.(1), Korollar 135.

Sei $\Delta' = \{d'_1 , \ldots , d'_{\ell'}\} \subseteq \Phi'$ eine Basis von (E', Φ')

Definition 148 Die Matrix $(\lfloor d_i , d_j \rfloor\!\rfloor)_{i,\, j \,\in\, [1,\ell]} \overset{\text{(R 3)}}{\in} \mathbf{Z}^{\ell\times\ell}$ heißt *Cartanmatrix* von (E, Φ) bezüglich Δ in der angegebenen Numerierung.

> Wir werden häufig direkt von den Einträgen der Cartanmatrix reden statt von dieser Matrix als ganzer.

Bemerkung 149

(1) *Seien (E, Φ) und (E', Φ') isomorph; cf. Definition* 120. *Insbesondere ist $\ell = \ell'$.*
Es gibt ein $\sigma \in \mathrm{S}_\ell$ mit $\lfloor d_i , d_j \rfloor\!\rfloor = \lfloor d'_{\sigma(i)} , d'_{\sigma(j)} \rfloor\!\rfloor'$ für $i,\ j \in [1, \ell]$.

(2) *Es ist $\lfloor d_i , d_j \rfloor\!\rfloor \in [-3, +3]$ für $i,\ j \in [1, \ell]$.*

(3) *Es ist $(\lfloor d_i , d_j \rfloor\!\rfloor)_{i,j} \in \mathrm{GL}_\ell(\mathbf{Q})$.*

Beachte, daß sich (1) *auch im Falle $(E, \Phi) = (E', \Phi')$ anwenden läßt.*

Beweis.

Zu (1). Wähle einen Isomorphismus $E \xrightarrow[\sim]{\varphi} E'$ von Wurzelsystemen von (E,Φ) nach (E',Φ') ; cf. Definition 120.

Es ist $\varphi(\Delta)$ eine Basis von (E',Φ'). Denn $\varphi(\Delta)$ ist eine $\mathbf{R}$-lineare Basis von E'. Ferner haben wir $\Phi = \Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-$. Es ist $\varphi(\Phi_\Delta^+) \subseteq \Phi'^+_{\varphi(\Delta)}$ und $\varphi(\Phi_\Delta^-) \subseteq \Phi'^-_{\varphi(\Delta)}$. Also können wir auf

$$\Phi' \;=\; \varphi(\Phi) \;=\; \varphi(\Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-) \;=\; \varphi(\Phi_\Delta^+) \sqcup \varphi(\Phi_\Delta^-) \;\subseteq\; \Phi'^+_{\varphi(\Delta)} \sqcup \Phi'^-_{\varphi(\Delta')} \;\subseteq\; \Phi'$$

schließen, mithin auf $\Phi' = \Phi'^+_{\varphi(\Delta)} \sqcup \Phi'^-_{\varphi(\Delta')}$.

Wähle $w' \in \mathrm{W}_{E',\Phi'}$ mit $w'(\Delta') = \varphi(\Delta)$; cf. Basensymmetrie, Satz 145.(1). Somit gibt es ein $\sigma \in \mathrm{S}_\ell$ mit $w'(d'_{\sigma(i)}) = \varphi(d_i)$ für $i \in [1,\ell]$. Es wird

$$\lfloor d'_{\sigma(i)}\,, d'_{\sigma(j)} \rfloor\!\rfloor' \;\overset{\text{B. 118.(1)}}{=}\; \lfloor w'(d'_{\sigma(i)}), w'(d'_{\sigma(j)}) \rfloor\!\rfloor' \;=\; \lfloor \varphi(d_i), \varphi(d_j) \rfloor\!\rfloor' \;\overset{\text{D. 120}}{=}\; \lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor$$

für $i,\, j \,\in\, [1,\ell]$.

Zu (2). Dies folgt bereits aus $d_i\,,\, d_j \,\in\, \Phi$; cf. Lemma 122.

Zu (3). Es ist $\lfloor -, = \rfloor$ positiv definit. Als Produkt zweier in $\mathbf{R}^{\ell\times\ell}$ invertierbarer Matrizen ist also

$$(\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor)_{i,j} \;=\; 2\,(\lfloor d_i\,, d_j \rfloor)_{i,j} \cdot \mathrm{diag}(\lfloor d_1\,, d_1 \rfloor, \ldots, \lfloor d_\ell\,, d_\ell \rfloor)^{-1} \;\in\; \mathrm{GL}_\ell(\mathbf{R}) \cap \mathbf{Z}^{\ell\times\ell} \;\subseteq\; \mathrm{GL}_\ell(\mathbf{Q})\;.$$

□

Lemma 150 *Sei $\ell = \ell'$. Sei $\sigma \in \mathrm{S}_\ell$ mit*

$$\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor \;=\; \lfloor d'_{\sigma(i)}\,, d'_{\sigma(j)} \rfloor\!\rfloor' \qquad \text{für } i,\, j \,\in\, [1,\ell]$$

gegeben.

Sei $E \xrightarrow{\varphi} E'$ die durch $\varphi(d_i) = d'_{\sigma(i)}$ für $i \in [1,\ell]$ definierte bijektive lineare Abbildung.

Es ist φ ein Isomorphismus von Wurzelsystemen; cf. Definition 120.

Die Cartanmatrix bestimmt ein Wurzelsystem also bis auf Isomorphie.

Beweis. Nach Umnumerieren der Basis von (E',Φ') können wir $\sigma = \mathrm{id}_{[1,\ell]}$ annehmen. Es ist also

$$\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor \;=\; \lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor' \qquad \text{für } i,\, j \,\in\, [1,\ell]$$

und

$$\varphi(d_i) = d'_i \qquad \text{für } i \in [1,\ell]\;.$$

Bemerken wir zunächst, daß die entsprechenden Voraussetzungen für φ^{-1} genauso gelten.

Schritt 1. *Das Viereck*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{w}_{d_i}"'] & E' \arrow[d, "\mathrm{w}_{d'_i}"] \\ E \arrow[r, "\varphi"] & E' \end{tikzcd}$$

kommutiert für $i \in [1, \ell]$.

Für $x \in E$ wird $\lfloor x, d_i \rfloor\!\rfloor = \lfloor \varphi(x), d'_i \rfloor\!\rfloor'$, da die Gleichheit für $x \in \Delta$ richtig ist, da Δ eine $\mathbf{R}$-lineare Basis von E ist und da $\lfloor -, d_i \rfloor\!\rfloor$ und $\lfloor -, d'_i \rfloor\!\rfloor'$ linear sind. Für $x \in E$ wird damit

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \circ \mathrm{w}_{d_i})(x) & = & \varphi(x - \lfloor x, d_i \rfloor\!\rfloor d_i) \\ & = & \varphi(x) - \lfloor x, d_i \rfloor\!\rfloor d'_i \\ & = & \varphi(x) - \lfloor \varphi(x), d'_i \rfloor\!\rfloor' d'_i \\ & = & (\mathrm{w}_{d'_i} \circ \varphi)(x) \; . \end{array}$$

Schritt 2. *Es ist* $\varphi \circ \mathrm{W}_{E,\Phi} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{W}_{E',\Phi'}$.

Es genügt, $\overset{!}{\subseteq}$ zu zeigen, da dasselbe Argument für φ^{-1} dann $\overset{!}{\supseteq}$ zeigt.

Es ist $\varphi \circ \mathrm{w}_{d_i} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{w}_{d'_i} \in \mathrm{W}_{E',\Phi'}$ für $i \in [1, \ell]$; cf. Schritt 1. Dies genügt dank Basensymmetrie, Satz 145.(3).

Schritt 3. *Es ist* $\varphi(\Phi) = \Phi'$.

Es genügt, $\overset{!}{\subseteq}$ zu zeigen, da dasselbe Argument für φ^{-1} dann $\overset{!}{\supseteq}$ zeigt.

Sei $r \in \Phi$. Wähle $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ mit $w(r) \in \Delta$; cf. Basensymmetrie, Satz 145.(2). Es ist also $w(r) = d_i$ für ein $i \in [1, \ell]$.

Es ist $\varphi \circ w \circ \varphi^{-1} =: w' \in \mathrm{W}_{E',\Phi'}$; cf. Schritt 2. Somit wird $\varphi \circ w = w' \circ \varphi$, also $w'^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ w^{-1}$, mithin

$$\varphi(r) \;=\; (\varphi \circ w^{-1})(d_i) \;=\; (w'^{-1} \circ \varphi)(d_i) \;=\; w'^{-1}(d'_i) \;\in\; w'^{-1}(\Phi') \;\overset{\text{B. 118.(2)}}{=}\; \Phi'.$$

Schritt 4. *Es ist* $\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor = \lfloor \varphi(r), \varphi(s) \rfloor\!\rfloor'$ *für* $r,\, s \,\in\, \Phi$.

Wegen Linearität in erster Variablen ist die Gleichung richtig, falls $s \in \Delta$ liegt.

Sei $v \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ so gewählt, daß $v(s) = d_j$ ist für ein $j \in [1, \ell]$; cf. Basensymmetrie, Satz 145.(2). Es ist $\varphi \circ v \circ \varphi^{-1} =: v' \in \mathrm{W}_{E',\Phi'}$; cf. Schritt 2. Es folgt

$$\begin{array}{rcl} \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor & = & \lfloor r, v^{-1}(d_j) \rfloor\!\rfloor \\ & \overset{\text{B. 118.(1)}}{=} & \lfloor v(r), d_j \rfloor\!\rfloor \\ & = & \lfloor (\varphi \circ v)(r), \varphi(d_j) \rfloor\!\rfloor' \\ & = & \lfloor (v' \circ \varphi)(r), \varphi(d_j) \rfloor\!\rfloor' \\ & \overset{\text{B. 118.(1)}}{=} & \lfloor \varphi(r), (v'^{-1} \circ \varphi)(d_j) \rfloor\!\rfloor' \\ & = & \lfloor \varphi(r), (\varphi \circ v^{-1})(d_j) \rfloor\!\rfloor' \\ & = & \lfloor \varphi(r), \varphi(s) \rfloor\!\rfloor' \; . \end{array}$$

$\square$

Nun wollen wir die Cartanmatrix graphisch umsetzen.

Definition 151

(1) Ein *(ungerichteter, gewichteter) Graph* ist eine endliche Menge von *Knoten* D, zusammen mit einer Abbildung $\rho : D \times D \longrightarrow \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$, genannt *Gewichtung,* mit $\rho(d, d') = \rho(d', d)$ und $\rho(d, d) = 0$ für $d,\, d' \in D$. Wir sagen, zwischen d und d' *verlaufen* $\rho(d, d')$ *Kanten.*

(2) Ein Graph (D, ρ) zusammen mit einer Teilmenge $T \subseteq D \times D$ so, daß für $d,\, d' \in D$ zum einen genau dann $\rho(d, d') \geqslant 2$ ist, wenn $((d, d') \in T$ oder $(d', d) \in T)$ ist und zum anderen nicht $((d, d') \in T$ und $(d', d) \in T)$ ist, heißt *teilgerichteter Graph.* Ist $(d, d') \in T$, so sagen wir auch, d ist *kürzer* als d'.

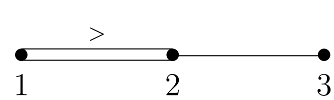
(3) Seien (D, ρ) und (D', ρ') Graphen. Ein *Isomorphismus* von (D, ρ) nach (D', ρ') ist eine bijektive Abbildung $f : D \longrightarrow D'$ mit $\rho' \circ (f \times f) = \rho$. Es heißen (D, ρ) und (D', ρ') *isomorph,* falls es einen Isomorphismus von (D, ρ) nach (D', ρ') gibt. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Schreibe $[D, \rho]$ für die Äquivalenzklasse von (D, ρ), genannt *Isoklasse.*

(4) Seien (D, ρ, T) und (D', ρ', T') teilgerichtete Graphen. Ein *Isomorphismus* von (D, ρ, T) nach (D', ρ', T') ist ein Isomorphismus f von (D, ρ) nach (D', ρ') mit $(f \times f)(T) = T'$. Es heißen (D, ρ, T) und (D', ρ', T') *isomorph,* falls es einen Isomorphismus von (D, ρ, T) nach (D', ρ', T') gibt. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Schreibe $[D, \rho, T]$ für die für die Äquivalenzklasse von (D, ρ, T), genannt *Isoklasse.*

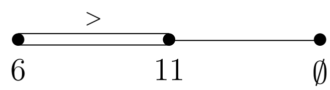
(5) Sei (D, ρ) ein Graph mit $D \neq \emptyset$. Es heißt (D, ρ) *unzusammenhängend,* falls es nichtleere Teilmengen $D',\, D'' \subseteq D$ mit $D = D' \sqcup D''$ derart gibt, daß für $d' \in D'$ und $d'' \in D''$ stets $\rho(d', d'') = 0$ ist. Ansonsten heißt (D, ρ) *zusammenhängend.* Ein teilgerichteter Graph (D, ρ, T) heißt *zusammenhängend,* falls (D, ρ) zusammenhängend ist. Diese Eigenschaft ist stabil unter Isomorphie, sodaß wir ferner festlegen können, es heiße die Isoklasse $[D, \rho, T]$ *zusammenhängend,* falls (D, ρ) zusammenhängend ist.

Beispiel 152 In Definition 151.(3, 4) läuft ein Isomorphismus auf eine Umbezeichnung der Knoten hinaus.

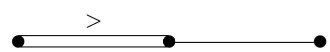
Ist etwa $D = \{1, 2, 3\}$, $\rho(1, 2) = 2$, $\rho(2, 3) = 1$, $\rho(1, 3) = 0$ sowie $T = \{(2, 1)\}$, so können wir den zusammenhängenden teilgerichteten Graphen (D, ρ, T) wie folgt graphisch darstellen.



Er ist isomorph e.g. zu folgendem teilgerichteten Graphen.



Man kann die Isomorphieklasse eines teilgerichteten Graphen als "teilgerichteten Graphen mit vergessener Knotenbezeichnung" verstehen. Die Isoklasse der ebengenannten teilgerichteten Graphen kann graphisch wie folgt dargestellt werden.



Definition 153 Wir erinnern an das Wurzelsystem (E, Φ).

(1) Sei

$$\begin{array}{ccccl} \Delta & \times & \Delta & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{Z}_{\geqslant 0} \\ (d & , & e) & \longmapsto & \begin{cases} \lfloor d, e \rfloor\!\rfloor \lfloor e, d \rfloor\!\rfloor = 4 \, \frac{\lfloor d, e \rfloor^2}{\lfloor d, d \rfloor \lfloor e, e \rfloor} & \text{falls } d \neq e \\ 0 & \text{falls } d = e \end{cases} \end{array}$$

Der Graph (Δ, ρ) heißt der *Coxetergraph* von (E, Φ) bezüglich Δ.

Die Zahl der Kanten, die zwischen je zwei Knoten verlaufen, ist in $[0, 3]$; cf. Lemma 122. Dementsprechend reden wir auch von Einfach-, Doppel- und Dreifachkanten.

(2) Sei $T := \{ (d, e) \in \Delta \times \Delta \, : \, \rho(d, e) \geqslant 1 \text{ und } \|d\| < \|e\| \}$.

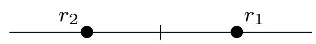
Falls $\rho(d, e) = 1$ ist, so beachte man, daß hieraus $\|d\| = \|e\|$ folgt. Cf. Lemma 122.

Der teilgerichtete Graph (Δ, ρ, T) heißt *Dynkingraph* von (E, Φ) bezüglich Δ.

Seine Isoklasse $[\Delta, \rho, T]$ wird *Dynkinklasse* von (E, Φ) bezüglich Δ genannt.

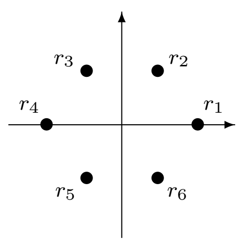
Beispiel 154 Folgende Wurzelsysteme entstammen Beispiel 113.

(1) Zu



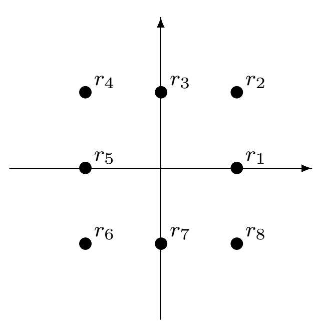
gehört bezüglich $\Delta = \{r_1\}$ die Cartanmatrix $\left(\lfloor r_1 , r_1 \rfloor\!\rfloor\right) = (2)$ und also folgende Dynkinklasse.

(2) Zu

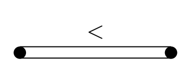


gehört bezüglich $\Delta = \{r_1 , r_3\}$ die Cartanmatrix $\begin{pmatrix} \lfloor r_1 , r_1 \rfloor\!\rfloor & \lfloor r_1 , r_3 \rfloor\!\rfloor \\ \lfloor r_3 , r_1 \rfloor\!\rfloor & \lfloor r_3 , r_3 \rfloor\!\rfloor \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, insbesondere $\lfloor r_1 , r_3 \rfloor\!\rfloor \lfloor r_3 , r_1 \rfloor\!\rfloor = 1$ und somit folgende Dynkinklasse.

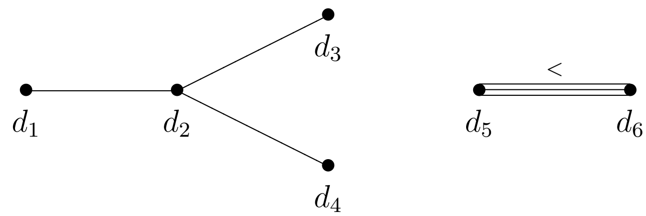
(3) Zu



gehört bezüglich $\Delta = \{r_1 , r_4\}$ die Cartanmatrix $\begin{pmatrix} \lfloor r_1 , r_1 \rfloor\!\rfloor & \lfloor r_1 , r_4 \rfloor\!\rfloor \\ \lfloor r_4 , r_1 \rfloor\!\rfloor & \lfloor r_4 , r_4 \rfloor\!\rfloor \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, insbesondere $\lfloor r_1 , r_4 \rfloor\!\rfloor \lfloor r_4 , r_1 \rfloor\!\rfloor = 2$ und somit folgende Dynkinklasse.



(4) Die Cartanmatrix zum Dynkingraphen



ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Das Vorzeichen der Einträge nicht auf der Hauptdiagonalen ergibt sich aus Bemerkung 132.

Lemma 155

Wir erinnern an das Wurzelsystem (E, Φ). *Sei* Δ *eine Basis von* (E, Φ). *Sei* $[\Delta, \rho, T]$ *die Dynkinklasse von* (E, Φ) *bezüglich* Δ.

Wir erinnern an das Wurzelsystem (E', Φ'). *Sei* Δ' *eine Basis von* (E', Φ'). *Sei* $[\Delta', \rho', T']$ *die Dynkinklasse von* (E', Φ') *bezüglich* Δ'.

Genau dann ist $[\Delta, \rho, T] = [\Delta', \rho', T']$, *wenn* $[E, \Phi] = [E', \Phi']$ *ist.*

Sei IKWS *die Menge der Isoklassen von Wurzelsystemen. Sei* IKTG *die Menge der Isoklassen von teilgerichteten Graphen. Wir erhalten so eine wohldefinierte injektive Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IKWS} & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{IKTG} \\ [E, \Phi] & \longmapsto & [\Delta, \rho, T] \, , \end{array} \qquad \textit{wobei } [\Delta, \rho, T] \textit{ eine Dynkinklasse von } (E, \Phi) \textit{ ist.}$$

Cf. Definition 153.(2).

Beweis.

Sei $[\Delta, \rho, T] = [\Delta', \rho', T']$. Vermöge Isomorphismus können wir so durchnumerieren, $\Delta = \{ d_i \, : \, i \in [1, \ell] \}$ und $\Delta' = \{ d'_i \, : \, i \in [1, \ell] \}$, daß (i) und (ii) gelten.

(i) Es ist $\lfloor d_i \, , d_j \rfloor\!\rfloor \lfloor d_j \, , d_i \rfloor\!\rfloor = \lfloor d'_i \, , d'_j \rfloor\!\rfloor' \lfloor d'_j \, , d'_i \rfloor\!\rfloor'$ für $i, \, j \in [1, \ell]$.

(ii) Es ist $(\|d_i\| < \|d_j\|$ und $\lfloor d_i \, , d_j \rfloor \neq 0) \iff (\|d'_i\|' < \|d'_j\|'$ und $\lfloor d'_i \, , d'_j \rfloor' \neq 0)$ für $i, \, j \in [1, \ell]$.

Gemäß Lemma 150 genügt es für $[E, \Phi] \stackrel{!}{=} [E', \Phi']$ zu zeigen, daß $\lfloor d_i \, , d_j \rfloor\!\rfloor \stackrel{!}{=} \lfloor d'_i \, , d'_j \rfloor\!\rfloor'$ ist für $i, \, j \in [1, \ell]$.

Ist $i = j$, so ist $\lfloor d_i\,, d_i \rfloor\!\rfloor = 2 = \lfloor d'_i\,, d'_i \rfloor\!\rfloor'$.

Sei nun $i \neq j$.

Es ist $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor = 0$ genau dann, wenn $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor \lfloor d_j\,, d_i \rfloor\!\rfloor = 0$ ist, also mit (i) genau dann, wenn $\lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor' \lfloor d'_j\,, d'_i \rfloor\!\rfloor' = 0$ ist, also genau dann, wenn $\lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor' = 0$ ist.

Sei nun $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor \neq 0$, i.e. $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor \neq 0$. Dann ist auch $\lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor' \neq 0$, i.e. $\lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor' \neq 0$.

Sei $\|d_i\| \leqslant \|d_j\|$ angenommen. Mit (ii) ist dann auch $\|d'_i\|' \leqslant \|d'_j\|'$. Zu zeigen sind nun $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor \overset{!}{=} \lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor'$ und $\lfloor d_j\,, d_i \rfloor\!\rfloor \overset{!}{=} \lfloor d'_j\,, d'_i \rfloor\!\rfloor'$.

Es ist $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor \overset{\text{B. 132}}{<} 0$. Folglich ist

$$(\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor\,,\ \lfloor d_j\,, d_i \rfloor\!\rfloor) \overset{\text{L. 122}}{\in} \{(-1,-1),\ (-1,-2),\ (-1,-3)\}\ .$$

Dito folgt

$$(\lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor'\,,\ \lfloor d'_j\,, d'_i \rfloor\!\rfloor') \overset{\text{L. 122}}{\in} \{(-1,-1),\ (-1,-2),\ (-1,-3)\}\ .$$

Dank (i) ist also $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor = \lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor'$ und $\lfloor d_j\,, d_i \rfloor\!\rfloor = \lfloor d'_j\,, d'_i \rfloor\!\rfloor'$.

Sei $[E, \Phi] = [E', \Phi']$. Gemäß Bemerkung 149.(1) können wir so durchnumerieren, $\Delta = \{\, d_i\ :\ i \in [1, \ell]\,\}$ und $\Delta' = \{\, d'_i\ :\ i \in [1, \ell]\,\}$, daß $\lfloor d_i\,, d_j \rfloor\!\rfloor = \lfloor d'_i\,, d'_j \rfloor\!\rfloor'$ ist für $i,\ j\ \in\ [1, \ell]$.

Setze $f : \Delta \longrightarrow \Delta'$, $d_i \longmapsto d'_i$ für $i \in [1, \ell]$.

Da ρ via $\lfloor -, = \rfloor\!\rfloor$ und ρ' via $\lfloor -, = \rfloor\!\rfloor'$ definiert sind, ist $\rho' \circ (f \times f) = \rho$.

Für $d,\ e\ \in\ \Delta$ mit $\rho(d, e) \geqslant 1$ gilt genau dann $\|d\| < \|e\|$, wenn $|\lfloor d, e \rfloor\!\rfloor| < |\lfloor e, d \rfloor\!\rfloor|$ ist. Folglich ist auch $T \subseteq \Delta \times \Delta$ via $\lfloor -, = \rfloor\!\rfloor$ festgelegt, sowie $T' \subseteq \Delta' \times \Delta'$ via $\lfloor -, = \rfloor\!\rfloor'$. Also wird auch $(f \times f)(T) = T'$.

Also ist f ein Isomorphismus von teilgerichteten Graphen von (Δ, ρ, T) nach (Δ', ρ', T').▫

5.8 Komponentenzerlegung

Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem; cf. Definition 110.

Es bezeichnet $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ die Weylgruppe von (E, Φ) ; cf. Definition 117.

Sei $\Delta \subseteq \Phi$ eine Basis von (E, Φ) ; cf. Definition 130.(1), Korollar 135.

Definition 156 Es heißt $[E, \Phi]$ *einfach,* falls die zugehörige Dynkinklasse $[\Delta, \rho, T]$ zusammenhängend ist; cf. Lemma 155, Definition 151.

Wir nennen auch das Wurzelsystem (E, Φ) einfach, falls seine Isoklasse $[E, \Phi]$ einfach ist.

Explizit ist (E, Φ) also einfach, falls $\ell \geqslant 1$ ist und falls aus $\Delta = \Delta' \sqcup \Delta''$ mit $\Delta' \perp \Delta''$ bereits $\Delta' = \emptyset$ oder $\Delta'' = \emptyset$ folgt; cf. Definition 153.(1).

Beispiel 157 In Beispiel 154 sind die Coxetergraphen in (1), (2) und (3) nichtleer und zusammenhängend, die Wurzelsysteme also einfach.

In loc. cit. (4) ist der Coxetergraph hingegen nicht zusammenhängend, das Wurzelsystem also nicht einfach.

Lemma 158

Sei $\Delta = \Delta_1 \sqcup \ldots \sqcup \Delta_m$ *für ein* $m \geqslant 0$*, mit* $\Delta_i \perp \Delta_j$ *für* $i,\, j \in [1,m]$ *mit* $i \neq j$*.*

Setze $\Phi_i := \bigcup_{w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}} w(\Delta_i)$ *für* $i \in [1,m]$*.*

(1) *Es ist* $\Delta_i \subseteq \Phi_i \subseteq \langle \Delta_i \rangle$ *und also* $\langle \Delta_i \rangle = \langle \Phi_i \rangle$ *für* $i \in [1,m]$*.*

(2) *Es ist* $\Phi = \Phi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m$ *.*

(3) *Es ist* $\Phi_i \perp \Phi_j$ *für* $i,\, j \in [1,m]$ *mit* $i \neq j$*.*

(4) *Es ist* $\Phi_i = \Phi \cap \langle \Delta_i \rangle$ *für* $i \in [1,m]$*.*

(5) *Es ist* $\Delta_i = \Delta \cap \langle \Delta_i \rangle$ *für* $i \in [1,m]$*.*

Beweis. Es ist $\Delta_i \subseteq \Phi_i$.

Da Δ eine $\mathbf{R}$-lineare Basis von E ist, ist $\Delta_i = \Delta \cap \langle \Delta_i \rangle$ für $i \in [1,m]$.

Für $i \in [1,m]$ schreiben wir

$$W_i \;:=\; \langle\!\langle\, \mathrm{w}_{e_i} \;:\; e_i \in \Delta_i \,\rangle\!\rangle \;=\; \{\, \mathrm{w}_{e_{i,1}} \circ \ldots \circ \mathrm{w}_{e_{i,\beta}} \;:\; \beta \geqslant 0,\, e_{i,\alpha} \in \Delta_i \text{ für } \alpha \in [1,\beta] \,\}\ .$$

Schritt 1. *Es ist* $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_m$ *.*

Denn es ist $\Phi \overset{\text{S. 145.(2)}}{=} \bigcup_{w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}} w(\Delta) \subseteq \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_m \subseteq \Phi$.

Schritt 2. *Sei* $i \in [1,m]$*. Es ist* $w_i(x_i) \in \langle \Delta_i \rangle$ *für* $x_i \in \langle \Delta_i \rangle$ *und* $w_i \in W_i$ *.*

Ist $e_i \in \Delta_i$, so ist $\mathrm{w}_{e_i}(x_i) = x_i - \lfloor x_i\,, e_i \rfloor\!\rfloor e_i \in \langle \Delta_i \rangle$.

Schritt 3. *Seien* $i,\, j \in [1,m]$ *mit* $i \neq j$*. Es ist* $w_i(x_j) = x_j$ *für* $x_j \in \langle \Delta_j \rangle$ *und* $w_i \in W_i$ *.*

Ist $e_i \in \Delta_i$, so ist $\mathrm{w}_{e_i}(x_j) = x_j - \lfloor x_j\,, e_i \rfloor\!\rfloor e_i = x_j$.

Schritt 4. *Sind* $i,\, j \in [1,m]$ *mit* $i \neq j$*, so ist* $w_i \circ w_j = w_j \circ w_i$ *für* $w_i \in W_i$ *und* $w_j \in W_j$ *. Jedes Element* $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ *kann als* $w = w_1 \circ \ldots \circ w_m$ *mit* $w_k \in W_k$ *für* $k \in [1,m]$ *geschrieben werden.*

Sind $e_i \in \Delta_i$ und $e_j \in \Delta_j$, so ist $\mathrm{w}_{e_i} \circ \mathrm{w}_{e_j} \circ \mathrm{w}_{e_i}^{-1} \overset{\text{B. 141}}{=} \mathrm{w}_{\mathrm{w}_{e_i}(e_j)} \overset{\text{Schr. 3}}{=} \mathrm{w}_{e_j}$, und somit $\mathrm{w}_{e_i} \circ \mathrm{w}_{e_j} = \mathrm{w}_{e_j} \circ \mathrm{w}_{e_i}$. Also kommutiert allgemein jedes Element von W_i mit jedem Element von W_j .

Die behauptete Faktorisierung eines Elements $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ folgt nun mit Basensymmetrie, Satz 145.(3).

Schritt 5. *Sei* $i \in [1,m]$. *Es ist* $\Phi_i \subseteq \langle \Delta_i \rangle$.

Sei $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$. Wir haben $w(x_i) \overset{!}{\in} \langle \Delta_i \rangle$ zu zeigen.

Schreibe $w = w_1 \circ \ldots \circ w_m$ mit $w_k \in W_k$ für $k \in [1,m]$; cf. Schritt 4. Es wird

$$w(x_i) \;=\; (w_1 \circ \ldots \circ w_m)(x_i) \overset{\text{Schr. }2,3}{=} w_i(x_i) \overset{\text{Schr. }2}{\in} \langle \Delta_i \rangle \; .$$

Schritt 6. *Es ist* $\Phi = \Phi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m$. *Es ist* $\Phi_i \perp \Phi_j$ *für* i, $j \in [1,m]$ *mit* $i \neq j$.

Sind i, $j \in [1,m]$ mit $i \neq j$, so ist $\langle \Delta_i \rangle \perp \langle \Delta_j \rangle$, also $\langle \Delta_i \rangle \cap \langle \Delta_j \rangle = 0$, und somit $\Phi_i \perp \Phi_j$ und $\Phi_i \cap \Phi_j = \emptyset$; cf. Schritt 5. Dies genügt dank Schritt 1.

Schritt 7. *Es ist* $\Phi_i = \Phi \cap \langle \Delta_i \rangle$ *für* $i \in [1,m]$.

Es ist $\Phi_i \subseteq \Phi \cap \langle \Delta_i \rangle$; cf. Schritt 5.

Sei umgekehrt $r \in \Phi \cap \langle \Delta_i \rangle$. *Annahme,* $r \in \Phi_j$ für ein $j \in [1,m] \smallsetminus \{i\}$. Dann ist

$$r \;\in\; \langle \Delta_i \rangle \cap \Phi_j \overset{\text{Schr. }5}{\subseteq} \langle \Delta_i \rangle \cap \langle \Delta_j \rangle \;=\; 0 \; ,$$

im *Widerspruch* zu $0 \notin \Phi$. Es folgt $r \in \Phi_i$; cf. Schritt 6.

Es folgt (1) mit Schritt 5. Es folgen $(2,3)$ mit Schritt 6. Es folgt (4) mit Schritt 7. Es wurde (5) eingangs angemerkt. ▫

Bemerkung 159 *Sei* $\ell \geqslant 1$. *Es ist* (E,Φ) *genau dann einfach, wenn aus* $\Phi = \Phi' \sqcup \Phi''$ *mit* $\Phi' \perp \Phi''$ *bereits* $\Phi' = \emptyset$ *oder* $\Phi'' = \emptyset$ *folgt.*

Beweis.

Sei zum einen (E,Φ) *einfach.*

Sei $\Phi = \Phi' \sqcup \Phi''$ mit $\Phi' \perp \Phi''$ gegeben.

Sei $\Delta' := \Delta \cap \Phi'$. Sei $\Delta'' := \Delta \cap \Phi''$. Es ist $\Delta = \Delta' \sqcup \Delta''$ und $\Delta' \perp \Delta''$. Da der Coxetergraph (Δ,ρ) zusammenhängend ist, folgt $\Delta' = \Delta$ oder $\Delta'' = \Delta$; cf. Definition 153.(1). Sei o.E. $\Delta' = \Delta$. Aus $\Phi' \perp \Phi''$ folgt $\Delta = \Delta' \perp \Phi''$, und somit $E = \langle \Delta \rangle \perp \Phi''$. Da $0 \notin \Phi''$, liefert dies $\Phi'' = \emptyset$.

Folge zum anderen aus $\Phi = \Phi' \sqcup \Phi''$ *mit* $\Phi' \perp \Phi''$ *bereits* $\Phi' = \emptyset$ *oder* $\Phi'' = \emptyset$.

Wir haben zu zeigen, daß der Coxetergraph (Δ,ρ) zusammenhängend ist.

Annahme, nicht. Dann gibt es eine Zerlegung $\Delta = \Delta' \sqcup \Delta''$ mit $\Delta' \perp \Delta''$ und $\Delta' \neq \emptyset$ und $\Delta'' \neq \emptyset$; cf. Definition 153.(1).

Setze $\Phi' := \bigcup_{w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}} w(\Delta')$ und $\Phi'' := \bigcup_{w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}} w(\Delta'')$.

Es ist $\Phi = \Phi' \sqcup \Phi''$ und $\Phi' \perp \Phi''$; cf. Lemma 158.$(2,3)$.

Nach Voraussetzung ist also $\Phi' = \emptyset$ oder $\Phi'' = \emptyset$. Da $\Delta' \subseteq \Phi'$ und $\Delta'' \subseteq \Phi''$, ist auch $\Delta' = \emptyset$ oder $\Delta'' = \emptyset$. Wir haben einen *Widerspruch*. ▫

Lemma 160 *Es gibt bis auf Permutation genau eine disjunkte Zerlegung*

$$\Phi \;=\; \Phi_1 \sqcup \Phi_2 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m\;,$$

wobei $m \geqslant 0$ *ist, wobei* $\Phi_i \perp \Phi_j$ *ist für* $i,\, j\, \in\, [1,m]$ *mit* $i \neq j$ *und wobei* $(\langle\Phi_i\rangle, \Phi_i)$ *ein einfaches Wurzelsystem ist für* $i \in [1,m]$.

Eine solche Zerlegung heißt Komponentenzerlegung.

Schreibe $E_i := \langle\Phi_i\rangle$ *für* $i \in [1,m]$. *Es ist also* $(E_i\,,\, \Phi_i)$ *ein einfaches Wurzelsystem für* $i \in [1,m]$. *Ferner ist*

$$E \;=\; E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_m\;.$$

Desweiteren ist $\Delta_i := \Delta \cap \Phi_i$ *eine Basis des Wurzelsystems* $(E_i\,,\, \Phi_i)$ *für* $i \in [1,m]$, *und folglich auch*

$$\Delta \;=\; \Delta_1 \sqcup \Delta_2 \sqcup \ldots \sqcup \Delta_m$$

mit $\Delta_i \perp \Delta_j$ *für* $i,\, j\, \in\, [1,m]$ *mit* $i \neq j$.

Beweis.

Existenz einer Zerlegung und Aussage über Basen. Die von der Relation "es gibt eine Kante von d_i nach d_j im Coxetergraphen (Δ,ρ)", i.e. von "es ist $\lfloor d_i\,, d_j\rfloor \neq 0$", erzeugte Äquivalenzrelation auf Δ habe als Äquivalenzklassen die *Zusammenhangskomponenten* $\tilde{\Delta}_1\,,\, \ldots,\, \tilde{\Delta}_m$, wobei $m \geqslant 0$. Nach Konstruktion ist $\Delta = \tilde{\Delta}_1 \sqcup \tilde{\Delta}_2 \sqcup \ldots \sqcup \tilde{\Delta}_m$ und $\tilde{\Delta}_i \perp \tilde{\Delta}_j$ für $i,\, j\, \in\, [1,m]$ mit $i \neq j$.

Setze $\Phi_i := \bigcup_{w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}} w(\tilde{\Delta}_i)$ für $i \in [1,m]$.

Gemäß Lemma 158 wird nun $\langle\tilde{\Delta}_i\rangle = \langle\Phi_i\rangle = E_i$ und $\Phi_i = \Phi \cap E_i$ und $\tilde{\Delta}_i = \Delta \cap E_i$ für $i \in [1,m]$; es wird $\Phi = \Phi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m$; es wird $\Phi_i \perp \Phi_j$ für $i,\, j\, \in\, [1,m]$ mit $i \neq j$.

Insbesondere folgt aus $\Delta = \tilde{\Delta}_1 \sqcup \tilde{\Delta}_2 \sqcup \ldots \sqcup \tilde{\Delta}_m$ auch $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_m$.

Für $i \in [1,m]$ folgt $\tilde{\Delta}_i \subseteq \Delta \cap \Phi_i \subseteq \Delta \cap E_i = \tilde{\Delta}_i$ und also $\tilde{\Delta}_i = \Delta \cap \Phi_i = \Delta_i$.

Sei $i \in [1,m]$.

Es ist mit der endlichen Teilmenge Φ_i von $E_i \smallsetminus \{0\}$ dann $(E_i\,,\Phi_i)$ ein Wurzelsystem. In der Tat gilt (R 1) nach obiger Anmerkung. Ferner vererben sich (R 2) und (R 3) vom Wurzelsystem (E,Φ) dank $\Phi_i = \Phi \cap E_i$. Schließlich gilt (R 4), denn für $r_i\,,\; s_i\, \in\, \Phi_i$ können wir wegen $\Phi_i = \bigcup_{w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}} w(\Delta_i)$ zunächst $r_i = v(d_i)$ schreiben mit $v \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ und $d_i \in \Delta_i$, was sodann $\mathrm{w}_{s_i}(r_i) = (\mathrm{w}_{s_i} \circ v)(d_i) \in \bigcup_{w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}} w(\Delta_i) = \Phi_i$ liefert.

Es ist Δ_i eine Basis von $(E_i\,,\Phi_i)$, da $\Delta_i \subseteq \Phi_i$ eine $\mathbf{R}$-lineare Basis von E_i ist und da

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= \Phi_i \cap \Phi \\
&= \Phi_i \cap (\Phi_\Delta^+ \sqcup \Phi_\Delta^-) \\
&= (\Phi_i \cap \Phi_\Delta^+) \sqcup (\Phi_i \cap \Phi_\Delta^-) \\
&= (\Phi_i)_{\Delta_i}^+ \sqcup (\Phi_i)_{\Delta_i}^-
\end{aligned}$$

ist, letzteres, da $\Phi_i \subseteq E_i = \langle \Delta_i \rangle$; cf. Definition 130.(1).

Wir behaupten, daß Δ_i nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer und zueinander orthogonaler Teilmengen geschrieben werden kann. *Annahme,* doch. Sei $\Delta_i = \Delta_i' \sqcup \Delta_i''$ mit $\Delta_i' \perp \Delta_i''$ und mit $\Delta_i' \neq \emptyset$ und $\Delta_i'' \neq \emptyset$. Wähle $d_i' \in \Delta_i'$ und $d_i'' \in \Delta_i''$. Da Δ_i eine Äquivalenzklasse ist, gibt es ein $\ell \geqslant 1$ und Elemente $x_j \in \Delta_i$ für $j \in [1, \ell]$ mit $d_i' = x_1$, mit $\lfloor x_j, x_{j+1} \rfloor \neq 0$ für $j \in [1, \ell - 1]$ und mit $x_\ell = d_i''$. Da $d_i' \neq d_i''$, ist $\ell \geqslant 2$.

Sei $k \in [1, \ell]$ maximal mit $x_k \in \Delta_i'$. Dann ist $k \leqslant \ell - 1$, $x_k \in \Delta_i'$ und $x_{k+1} \in \Delta_i''$. Aus $\Delta_i' \perp \Delta_i''$ folgt $x_k \perp x_{k+1}$. Aber $\lfloor x_k, x_{k+1} \rfloor \neq 0$. Wir haben einen *Widerspruch.* Somit ist das Wurzelsystem $(E_i\, , \Phi_i)$ einfach.

Eindeutigkeit der Zerlegung bis auf Permutation. Wir führen eine Induktion nach $\dim E$. Im Fall $\dim E = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $\dim E \geqslant 1$. Insbesondere ist $\Phi \neq \emptyset$.

Seien Komponentenzerlegungen

$$\begin{array}{rcl} \Phi & = & \Phi_1 \sqcup \Phi_2 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m \\ \Phi & = & \tilde{\Phi}_1 \sqcup \tilde{\Phi}_2 \sqcup \ldots \sqcup \tilde{\Phi}_{\tilde{m}} \end{array}$$

gegeben, mit $m, \tilde{m} \geqslant 1$, mit $\Phi_i \perp \Phi_j$ für $i, j \in [1, m]$ mit $i \neq j$, mit $\tilde{\Phi}_i \perp \tilde{\Phi}_j$ für $i, j \in [1, \tilde{m}]$ mit $i \neq j$, mit $(\langle \Phi_i \rangle, \Phi_i)$ einfaches Wurzelsystem für $i \in [1, m]$ und mit $(\langle \tilde{\Phi}_i \rangle, \tilde{\Phi}_i)$ einfaches Wurzelsystem für $i \in [1, \tilde{m}]$.

Durch Umnumerieren können wir $\Phi_1' := \Phi_1 \cap \tilde{\Phi}_1 \neq \emptyset$ erreichen. Sei $\Phi_1'' := \Phi_1 \smallsetminus \tilde{\Phi}_1$. Es ist $\Phi_1 = \Phi_1' \sqcup \Phi_1''$. Es ist $\Phi_1' \perp \Phi_1''$, da $\Phi_1' \subseteq \tilde{\Phi}_1$ und $\Phi_1'' \subseteq \tilde{\Phi}_2 \sqcup \ldots \sqcup \tilde{\Phi}_{\tilde{m}}$ und $\tilde{\Phi}_1 \perp (\tilde{\Phi}_2 \sqcup \ldots \sqcup \tilde{\Phi}_{\tilde{m}})$. Da $(\langle \Phi_1 \rangle, \Phi_1)$ einfach ist, folgt $\Phi_1'' = \emptyset$ und also $\Phi_1 \subseteq \tilde{\Phi}_1$; cf. Bemerkung 159. Genauso folgt auch $\Phi_1 \supseteq \tilde{\Phi}_1$. Insgesamt ist $\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1$.

Nun ist $\check{\Phi} := \Phi_2 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m = \tilde{\Phi}_2 \sqcup \ldots \sqcup \tilde{\Phi}_{\tilde{m}}$ ein Wurzelsystem in $\check{E} := \langle \check{\Phi} \rangle$. In der Tat vererben sich dank $\Phi_i \perp \Phi_j$ für $i, j \in [2, m]$ mit $i \neq j$ die Eigenschaften (R 3, 4) auf $(\check{E}, \check{\Phi})$. Ad (R 2). Seien $i \in [2, m]$ und $r_i \in \Phi_i$ gegeben. Dann ist auch $-r_i \in \Phi_i$. Sei umgekehrt $\alpha \in \mathbf{R}$ mit $\alpha r_i \in \check{\Phi}$ gegeben. Insbesondere ist $\alpha r_i \neq 0$. Da $\alpha r_i \perp \Phi_j$ für $j \in [2, m] \smallsetminus \{i\}$, kann αr_i nicht in Φ_j liegen. Folglich liegt $\alpha r_i \in \Phi_i$. Also ist $\alpha \in \{-1, +1\}$.

Es ist $\dim \check{E} < \dim E$. Nach Induktionsvoraussetzung stimmen die beiden Komponentenzerlegungen $\check{\Phi} = \Phi_2 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m = \tilde{\Phi}_2 \sqcup \ldots \sqcup \tilde{\Phi}_{\tilde{m}}$ von $(\check{E}, \check{\Phi})$ daher bis auf Permutation überein.

Daher stimmen auch die gegebenen beiden Komponentenzerlegungen von (E, Φ) bis auf Permutation überein. ▫

Bemerkung 161 (und Definition)

Sei $m \geqslant 0$. Seien $(E_1\, , \Phi_1)$, ..., $(E_m\, , \Phi_m)$ Wurzelsysteme.

Wir definieren das Wurzelsystem

$$(E_1\, , \Phi_1) \oplus \ldots \oplus (E_m\, , \Phi_m)\ ,$$

genannt die direkte Summe *der $(E_i\, , \Phi_i)$ über $i \in [1, m]$, wie folgt.*

Der euklidische Vektorraum sei $E^{\oplus} := E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$ *, ausgestattet mit der symmetrischen positiv definiten Bilinearform*

$$\lfloor (x_1\,, \,\ldots\,, \,x_m), (x'_1\,, \,\ldots\,, \,x'_m) \rfloor \;:=\; \lfloor x_1\,, x'_1 \rfloor + \ldots + \lfloor x_m\,, x'_m \rfloor$$

für $x_i\,,\, x'_i \,\in\, E_i$ *für* $i \in [1,m]$.

Die endliche Teilmenge von $E^{\oplus} \smallsetminus \{(0,\ldots,0)\}$ *der Wurzeln sei*

$$\Phi^{\oplus} \;:=\; (\Phi_1\,, 0, 0, \ldots, 0) \sqcup (0, \Phi_2\,, 0, \ldots, 0) \sqcup \ldots \sqcup (0, 0, \ldots, 0, \Phi_m)\;.$$

Wir setzen also

$$(E_1\,, \Phi_1) \oplus \ldots \oplus (E_m\,, \Phi_m) \;:=\; (E^{\oplus}\,,\, \Phi^{\oplus})\;.$$

Dies ist ein Wurzelsystem.

Beweis.

Zu (R 1). Es ist $\langle \Phi^{\oplus} \rangle = (E_1\,, 0, 0, \ldots, 0) + (0, E_2\,, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, 0, E_m) = E^{\oplus}$.

Zu (R 2). Sei $i \in [1,m]$. Sei $r_i \in \Phi_i$. Sei $\alpha \in \mathbf{R}$. Es ist $\alpha(0,\ldots,0,\overbrace{r_i}^{\text{Pos.}\, i},0,\ldots,0) \in \Phi^{\oplus}$ genau dann, wenn $\alpha r_i \in \Phi_i$ liegt, was wiederum nach (R 2) für $(E_i\,, \Phi_i)$ genau dann gilt, wenn $\alpha \in \{-1,+1\}$ liegt.

Zu (R 3) und (R 4). Seien $i,\, j \,\in\, [1,m]$. Sei $r_i \in \Phi_i$. Sei $s_j \in \Phi_j$. Schreibe

$$\begin{array}{rcl} r & := & (0,\ldots,0,\overbrace{r_i}^{\text{Pos.}\, i},0,\ldots,0) \\ s & := & (0,\ldots,0,\overbrace{s_j}^{\text{Pos.}\, j},0,\ldots,0)\;. \end{array}$$

Es wird

$$\lfloor r, s \rfloor\!\rfloor \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} \lfloor r_i\,, s_i \rfloor\!\rfloor & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{array} \right\} \;\in\; \mathbf{Z}\;.$$

Ferner ist nach (R 4) für $(E_i\,, \Phi_i)$

$$r - \lfloor r, s \rfloor\!\rfloor s \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} (0,\ldots,0,\overbrace{\underbrace{r_i - \lfloor r_i\,, s_i \rfloor\!\rfloor s_i}_{\in\, \Phi_i}}^{\text{Pos.}\, i},0,\ldots,0) & \text{falls } i = j \\ r & \text{falls } i \neq j \end{array} \right\} \;\in\; \Phi^{\oplus}\;.$$

□

Bemerkung 162 *Sei* $\Phi = \Phi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Phi_m$ *die Komponentenzerlegung; cf. Lemma* 160.

Sei $E_i := \langle \Phi_i \rangle$ *für* $i \in [1,m]$. *Es ist* (E_i, Φ_i) *ein einfaches Wurzelsystem für* $i \in [1,m]$ *; cf. Lemma* 160.

Wir verwenden die Notation von Bemerkung 161*, was* $E^{\oplus} := E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$ *und*

$$\Phi^{\oplus} \;:=\; (\Phi_1\,, 0, 0, \ldots, 0) \sqcup (0, \Phi_2\,, 0, \ldots, 0) \sqcup \ldots \sqcup (0, 0, \ldots, 0, \Phi_m)$$

angeht; gemäß loc. cit. ist $(E^{\oplus}, \Phi^{\oplus}) = (E_1\,, \Phi_1) \oplus \ldots \oplus (E_m\,, \Phi_m)$ *ein Wurzelsystem.*

Es ist die bijektive lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} E^{\oplus} & \xrightarrow{\varphi} & E \\ (x_1\,,\ldots,x_m) & \longmapsto & x_1+\ldots+x_m \end{array}$$

ein Isomorphismus von Wurzelsystemen von $(E^{\oplus},\Phi^{\oplus})\oplus\ldots\oplus(E_m\,,\Phi_m)$ *nach* (E,Φ) *; cf. Definition* 120, *Bemerkung* 161.

Beweis. Seien $i,\ j\ \in\ [1,m]$, $r_i\in\Phi_i$ und $s_j\in\Phi_j$. Wir kürzen wie folgt ab.

$$\begin{array}{rcl} r & := & (0,\ldots,0,\overbrace{r_i}^{\text{Pos.}\,i},0,\ldots,0) \\ s & := & (0,\ldots,0,\overbrace{s_j}^{\text{Pos.}\,j},0,\ldots,0)\ . \end{array}$$

Es ist also $\varphi(r)=r_i$ und $\varphi(s)=s_j$.

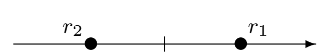
Somit ist $\varphi(\Phi^{\oplus})=\Phi$.

Fall $i=j$. Es wird $\lfloor r,s\rfloor\!\rfloor=\lfloor r_i\,,s_i\rfloor\!\rfloor=\lfloor\varphi(r),\varphi(s)\rfloor\!\rfloor$.

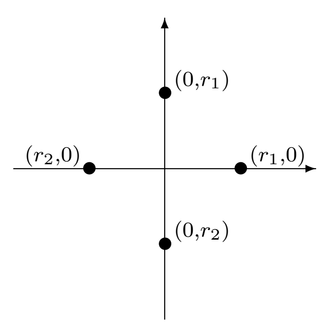
Fall $i\neq j$. Es wird $\lfloor r,s\rfloor\!\rfloor=0$. Es wird aber auch $\lfloor r_i\,,s_j\rfloor\!\rfloor=0$, da $\Phi_i\perp\Phi_j$. Folglich ist $\lfloor r,s\rfloor\!\rfloor=\lfloor\varphi(r),\varphi(s)\rfloor\!\rfloor$. ▫

Um alle Wurzelsysteme zu kennen, genügt es nach Lemma 160 und Bemerkung 162 also, alle einfachen zu kennen; beliebige setzen sich aus den einfachen als direkte Summen im Sinne von Bemerkung 161 zusammen.

Beispiel 163 Sei (E,Φ) das Wurzelsystem aus Beispiel 113, bildlich wie folgt dargestellt.



Dann wird $(E,\Phi)\oplus(E,\Phi)$ das Wurzelsystem, das wir bildlich wie folgt darstellen können.



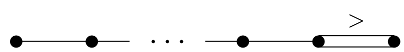
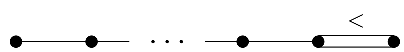
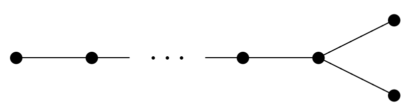
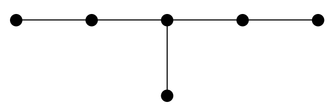
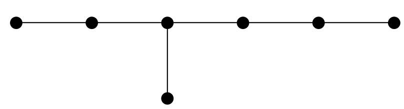
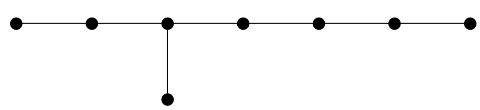
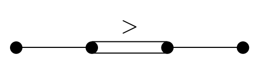
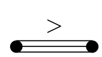
Dieses Wurzelsystem ist nicht einfach.

5.9 Klassifikation einfacher Wurzelsysteme

Satz 164 (Klassifikation)

Jede Dynkinklasse eines einfachen Wurzelsystems tritt genau einmal in der folgenden Liste auf.

Jede in der folgenden Liste vorkommende Isoklasse teilgerichteter Graphen ist die Dynkinklasse eines einfachen Wurzelsystems.

Name	Knotenzahl	Isoklasse teilgerichter Graphen
A_ℓ	$\ell \geqslant 1$	
B_ℓ	$\ell \geqslant 2$	
C_ℓ	$\ell \geqslant 3$	
D_ℓ	$\ell \geqslant 4$	
E_6	$\ell = 6$	
E_7	$\ell = 7$	
E_8	$\ell = 8$	
F_4	$\ell = 4$	
G_2	$\ell = 2$	

Cf. Definitionen 110, 156 *und* 153.

Die Dynkinklasse aus Beispiel 154.(1) ist A_1, die aus (2) ist A_2, die aus (3) ist B_2. Die aus (4) hat die Zusammenhangskomponenten D_4 und G_2; cf. Beweis zu Lemma 160. Die Dynkinklasse des Wurzelsystems aus Aufgabe 40.(2) ist A_3, da, in der Bezeichnung der Lösung, $\Delta = \{ r_1 , r_2 , r_3 \}$, da $r_1 \perp r_3$, da $\lfloor r_1 , r_2 \rfloor\!\rfloor = \lfloor r_2 , r_1 \rfloor\!\rfloor = -1$ und da $\lfloor r_2 , r_3 \rfloor\!\rfloor = \lfloor r_3 , r_2 \rfloor\!\rfloor = -1$; cf. Aufgabe 46.(2).

Beweis.

Zum einen ist jeder aufgelistete Isoklasse teilgerichteter Graphen die Dynkinklasse eines einfachen Wurzelsystems; cf. Aufgabe 49.

Sei zum anderen (E, Φ) ein einfaches Wurzelsystem. Sei Δ eine Basis von (E, Φ) ; cf. Definition 130.(1).

Es genügt zu zeigen, daß der Coxetergraph von (E, Φ) bezüglich Δ in der Liste auftaucht, i.e. unterliegender Graph eines teilgerichteten Graphen ist, dessen Isoklasse in der Liste auftritt. Denn für die Orientierung des Symbols $>$ bei Doppel- und Dreifachkanten sind dann alle Möglichkeiten abgedeckt.

Eine linear unabhängige Teilmenge $Z \subseteq E$ heiße *zulässig,* falls $\|z\| = 1$ für $z \in Z$ und $\lfloor z, z' \rfloor \leqslant 0$ und $4\lfloor z, z' \rfloor^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ für $z,\, z' \in Z$ mit $z \neq z'$.

Beachte $\lfloor x, y \rfloor\!\rfloor \lfloor y, x \rfloor\!\rfloor = 4\lfloor \|x\|^{-1}x, \|y\|^{-1}y \rfloor^2$ für $x,\, y \in E \smallsetminus \{0\}$.

Es ist e.g. $\Delta_1 := \{\, \|d\|^{-1}d \,:\, d \in \Delta \,\}$ zulässig; cf. Lemma 122, Bemerkung 132.

Ist $Z \subseteq E$ zulässig, so habe der Graph Γ_Z die Knotenmenge Z, und zwischen Knoten $z,\, z' \in Z$ mit $z \neq z'$ genau $4\lfloor z, z' \rfloor^2$ Kanten.

Es ist e.g. Γ_{Δ_1} isomorph zum Coxetergraphen von (E, Φ) via $d \longmapsto \|d\|^{-1}d$; cf. Definition 153.(1).

Sei $Z \subseteq E$ zulässig.

Es genügt zu zeigen, daß der Graph Γ_Z in der Liste auftaucht, falls er zusammenhängend ist; cf. Definition 156.

Schritt 1. *Sei $\tilde{Z} \subseteq Z$. Es ist $\tilde{Z}$ zulässig. Es entsteht $\Gamma_{\tilde{Z}}$ aus Γ_Z durch Weglassen aller Knoten in $Z \smallsetminus \tilde{Z}$ und aller Kanten mit wenigstens einem Knoten in $Z \smallsetminus \tilde{Z}$.*

Schritt 1 wird kommentarlos verwandt.

Schritt 2. *Es ist $|\{\, (z, z') \in Z \times Z \,:\, z \neq z',\ 4\lfloor z, z' \rfloor^2 \geqslant 1 \,\}| \leqslant 2|Z| - 2$, falls $Z \neq \emptyset$.*

Da Z linear unabhängig und nichtleer ist, ist $x := \sum_{z \in Z} z \neq 0$. Also ist

$$0 \;<\; \lfloor x, x \rfloor \;=\; |Z| + \textstyle\sum_{(z,z') \in Z \times Z,\ z \neq z'} \lfloor z, z' \rfloor \;.$$

Für $(z, z') \in Z \times Z$ mit $\lfloor z, z' \rfloor \neq 0$ ist $4\lfloor z, z' \rfloor^2 \geqslant 1$ und also $\lfloor z, z' \rfloor \leqslant -\frac{1}{2}$. Die Anzahl der nichtverschwindenden Summanden in $\sum_{(z,z') \in Z \times Z,\ z \neq z'} \lfloor z, z' \rfloor$ ist also kleiner als $2|Z|$.

Schritt 3. *Es gibt keine Teilmenge $\tilde{Z} \subseteq Z$ so, daß $m := |\tilde{Z}| \geqslant 3$ ist und wir*

$$\tilde{Z} \;=\; \{\tilde{z}_1\,,\, \ldots\,,\, \tilde{z}_m\}$$

schreiben können mit $4\lfloor \tilde{z}_i\,, \tilde{z}_{i+1} \rfloor^2 \geqslant 1$ für $i \in [1, m-1]$ und $4\lfloor \tilde{z}_m\,, \tilde{z}_1 \rfloor^2 \geqslant 1$ (Schleife).

Schritt 3 wird oft kommentarlos verwandt.

Schritt 3 besagt, daß es in Γ_Δ keine Schleife gibt, die $\geqslant 3$ Knoten enthält.

Annahme, es gibt doch so eine Teilmenge $\tilde{Z}$. Es wird

$$2m - 2 \;\overset{\text{Schr. 2}}{\geqslant}\; |\{\, (\tilde{z}, \tilde{z}') \in \tilde{Z} \times \tilde{Z} \,:\, \tilde{z} \neq \tilde{z}',\ 4\lfloor \tilde{z}, \tilde{z}' \rfloor^2 \geqslant 1 \,\}| \;\geqslant\; 2m\;,$$

und wir haben einen *Widerspruch.*

Schritt 4. *In* Γ_Z *gehen von jedem Knoten höchstens drei Kanten aus.*

Ein Knoten, von dem genau drei Einfachkanten ausgehen, heiße auch *Dreifachknoten.*

Sei $\tilde{Z} \subseteq Z$ so, daß es ein $\dot{z} \in \tilde{Z}$ gibt mit $\lfloor \dot{z}, \tilde{z} \rfloor < 0$ für $\tilde{z} \in \tilde{Z} \smallsetminus \{\dot{z}\}$. Wir müssen zeigen, daß es in $\Gamma_{\tilde{Z}}$ höchstens drei von $\dot{z}$ ausgehende Kanten gibt.

Es ist $\lfloor \tilde{z}, \tilde{z}' \rfloor = 0$ für alle $\tilde{z},\, \tilde{z}' \in \tilde{Z} \smallsetminus \{\dot{z}\}$ mit $\tilde{z} \neq \tilde{z}'$ dank Schritt 3, angewandt auf $\{\dot{z}, \tilde{z}, \tilde{z}'\}$.

Wähle $y \in \langle \tilde{Z} \rangle$ mit $\|y\| = 1$ und $y \perp (\tilde{Z} \smallsetminus \{\dot{z}\})$. Es ist $\lfloor \dot{z}, y \rfloor \neq 0$, da $y \not\perp \tilde{Z}$.

Schreibe $B := (\tilde{Z} \smallsetminus \{\dot{z}\}) \sqcup \{y\}$. Es ist B eine Orthonormalbasis von $\langle \tilde{Z} \rangle$.

Es ist $\dot{z} = \sum_{b \in B} \lfloor \dot{z}, b \rfloor b$. Also ist $1 = \lfloor \dot{z}, \dot{z} \rfloor = \sum_{b \in B} \lfloor \dot{z}, b \rfloor^2 = \lfloor \dot{z}, y \rfloor^2 + \sum_{\tilde{z} \in \tilde{Z} \smallsetminus \{\dot{z}\}} \lfloor \dot{z}, \tilde{z} \rfloor^2$.

Es folgt $1 > \sum_{\tilde{z} \in \tilde{Z} \smallsetminus \{\dot{z}\}} \lfloor \dot{z}, \tilde{z} \rfloor^2$, also $4 > \sum_{\tilde{z} \in \tilde{Z} \smallsetminus \{\dot{z}\}} 4 \lfloor \dot{z}, \tilde{z} \rfloor^2$, und letzteres ist die Anzahl der von $\dot{z}$ ausgehenden Kanten.

Schritt 5. *Ist* Γ_Z *zusammenhängend und existiert eine Dreifachkante in* Γ_Z *, i.e. existieren* $z,\, z' \in Z$ *mit* $4\lfloor z, z' \rfloor^2 = 3$*, so gehört* Γ_Z *zu* G_2 *.*

Andernfalls gingen von einem der beiden Knoten an der Dreifachkante mehr als 3 Kanten aus, im *Widerspruch* zu Schritt 4.

Schritt 6. *Sei* $m \geqslant 1$ *und* $\tilde{Z} \subseteq Z$ *mit* $|\tilde{Z}| = m$*, durchnumeriert als* $\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_m\}$*, wobei*

$$\Gamma_{\tilde{Z}} \;=\; \overset{\tilde{z}_1}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{\tilde{z}_2}{\bullet}\!\!-\!\!-\; \cdots \;-\!\!-\!\!\overset{\tilde{z}_{m-2}}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{\tilde{z}_{m-1}}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{\tilde{z}_m}{\bullet} \quad .$$

Sei $\tilde{z} := \sum_{i \in [1,m]} \tilde{z}_i$ *.*

Es ist $\check{Z} := (Z \smallsetminus \tilde{Z}) \sqcup \{\tilde{z}\}$ *zulässig.*

Für $z,\, z' \in \check{Z} \smallsetminus \{\tilde{z}\}$ *mit* $z \neq z'$ *ist die Anzahl der Kanten zwischen* z *und* z' *in* $\Gamma_{\check{Z}}$ *dieselbe wie die in* Γ_Z *.*

Sei $z \in \check{Z} \smallsetminus \{\tilde{z}\}$*. Dank Schritt* 3 *gibt es höchstens ein* $i \in [1, m]$ *so, daß zwischen* z *und* $\tilde{z}_i$ *in* Γ_Z *eine Kante verläuft. Es verläuft zwischen* z *und* $\tilde{z}$ *in* $\Gamma_{\check{Z}}$ *keine Kante, falls zwischen* z *und keinem der* $\tilde{z}_i$ *in* Γ_Z *eine Kante verläuft. Gibt es hingegen ein* $i \in [1, m]$ *so, daß zwischen* z *und* $\tilde{z}_i$ *eine Kante verläuft, so ist die Anzahl der Kanten zwischen* z *und* $\tilde{z}$ *in* $\Gamma_{\check{Z}}$ *gleich der Anzahl der Kanten zwischen* z *und* $\tilde{z}_i$ *in* Γ_Z *.*

> Schritt 6 besagt, daß man einen Kantenzug aus Einfachkanten in Γ_Z zu einem Knoten fusionieren kann und dabei wieder einen Graphen $\Gamma_{\check{Z}}$ zu einer zulässigen Teilmenge $\check{Z}$ erhält.

Es ist $\check{Z}$ linear unabhängig.

Es ist

$$\|\tilde{z}\|^2 \;=\; \lfloor \tilde{z}_1 + \cdots + \tilde{z}_m \,, \tilde{z}_1 + \cdots + \tilde{z}_m \rfloor \;=\; m + 2\sum_{i \in [1, m-1]} \lfloor \tilde{z}_i \,, \tilde{z}_{i+1} \rfloor \;=\; m - 2(m-1) \cdot \tfrac{1}{2} \;=\; 1 \,.$$

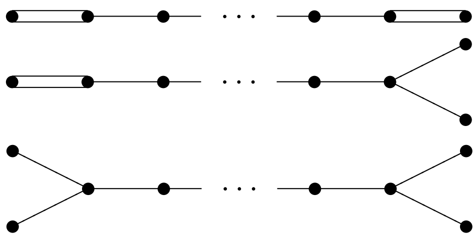
Für $z \in \check{Z} \smallsetminus \{\tilde{z}\}$ gibt es dank Schritt 3 höchstens ein $i \in [1, m]$ so, daß $\lfloor z, \tilde{z}_i \rfloor \neq 0$ ist.

Ist $\lfloor z, \tilde{z}_i \rfloor = 0$ für alle $i \in [1, m]$, so ist $\lfloor z, \tilde{z} \rfloor = 0 \leqslant 0$. Daher ist auch $4\lfloor z, \tilde{z} \rfloor^2 = 0$.

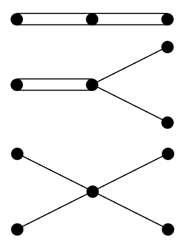
Gibt es ein $i \in [1, m]$ mit $\lfloor z, \tilde{z}_i \rfloor \neq 0$, so ist $\lfloor z, \tilde{z} \rfloor = \lfloor z, \tilde{z}_i \rfloor \leqslant 0$. Daher ist auch $4\lfloor z, \tilde{z} \rfloor^2 = 4\lfloor z, \tilde{z}_i \rfloor^2 \in \{1, 2, 3\}$.

Insgesamt haben wir die Zulässigkeit von $\check{Z}$ und die weiteren Aussagen gesehen.

Schritt 7. *Sei $\tilde{Z} \subseteq Z$. Es tritt $\Gamma_{\tilde{Z}}$ nicht in folgender Liste auf.*



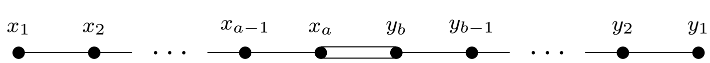
Denn *würde* $\Gamma_{\tilde{Z}}$ in dieser Liste auftauchen, so gäbe es nach Schritt 6 auch eine zulässige Teilmenge von E, deren Graphen in folgender Liste auftritt.



Das ist aber wegen mehr als drei Kanten am jeweils mittleren Knoten *nicht möglich;* cf. Schritt 4.

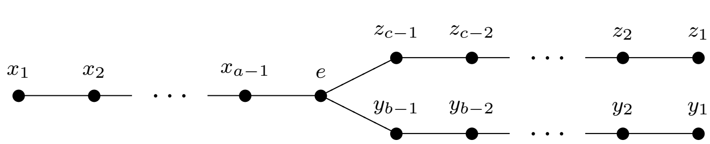
Schritt 8. *Sei Γ_Z zusammenhängend. Dann tritt Γ_Z in folgender Liste auf.*

(1)

(2) 

— *wobei $a \geqslant b \geqslant 1$*

(3)

(4) 

— *wobei $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$*

Wir haben für spätere Verwendung Bezeichnungen für die den Knoten entsprechenden Elemente von E hinzugefügt.

Gibt es eine Dreifachkante in Γ_Z, so ist Γ_Z ein Graph wie in (3); cf. Schritt 5.

Es gibt höchstens eine Doppelkante in Γ_Z . Denn *gäbe* es zwei Doppelkanten in Γ_Z , dann gäbe es auch zwei Doppelkanten, die durch einen Kantenzug aus Einfachkanten verbunden sind, was aber nach Schritt 7 *nicht zutrifft.*

Fall : es gibt genau eine Doppelkante in Γ_Z . Es gibt keinen Dreifachknoten in Z, da dieser *sonst* durch einen Kantenzug aus Einfachkanten mit unserer Doppelkante verbunden wäre, was aber nach Schritt 7 *nicht geht.* Also ist Γ_Z ein Graph wie in (2), da an den beiden von den Knoten der Doppelkante nach außen verlaufenden Pfaden keine Dreifachknoten auftreten dürfen.

Fall : es gibt keine Doppelkante in Γ_Z . Es gibt keine zwei verschiedenen Dreifachknoten, da diese *sonst* durch einen Kantenzug aus Einfachkanten miteinander verbunden wären, was aber nach Schritt 7 *nicht geht.* Falls kein Dreifachknoten existiert, ist Γ_Z von der Form (1). Falls ein Dreifachknoten existiert, ist Γ_Z von der Form (4), da an den drei vom Dreifachknoten nach außen verlaufenden Pfaden keine weiteren Dreifachknoten auftreten dürfen.

Schritt 9. *Sei* Γ_Z *wie in* (2) *von Schritt* 8. *Dann gehört* Γ_Z *zu* B_ℓ *für ein* $\ell \geqslant 2$ *(oder zu* C_ℓ *für ein* $\ell \geqslant 3$*) oder zu* F_4 .

Setze $x := \sum_{i\in[1,a]} i\cdot x_i$ und $y := \sum_{i\in[1,b]} i\cdot y_i$, in der Bezeichnung von Schritt 8.

Es wird

$$\begin{array}{rcl} \lfloor x,x\rfloor & = & (\sum_{i\in[1,a]} i^2) + 2\sum_{i\in[1,a-1]} i(i+1)\lfloor x_i\,, x_{i+1}\rfloor \\ & = & (\sum_{i\in[1,a]} i^2) - (\sum_{i\in[1,a-1]} i(i+1)) \\ & = & a^2 - (\sum_{i\in[1,a-1]} i) \\ & = & a(a+1)/2\ . \end{array}$$

Genauso wird $\lfloor y,y\rfloor = b(b+1)/2$. Ferner ist $\lfloor x,y\rfloor^2 = a^2b^2\cdot\lfloor x_a\,, y_b\rfloor^2 = a^2b^2/2$.

Da (x,y) linear unabhängig ist, ist

$$a^2b^2/2 \;=\; \lfloor x,y\rfloor^2 \;<\; \lfloor x,x\rfloor\lfloor y,y\rfloor \;=\; a(a+1)b(b+1)/4\ ;$$

cf. §5.1. Umgeformt ergibt dies $2ab < (a+1)(b+1) = ab+a+b+1$, mithin $(a-1)(b-1) = ab-a-b+1 < 2$.

Also ist $(a,b) = (2,2)$, was F_4 liefert, oder aber $a \geqslant 1$ beliebig und $b = 1$, was B_{a+1} liefert.

Schritt 10. *Sei* Γ_Z *wie in* (4) *von Schritt* 8. *Dann gehört* Γ_Z *zu* D_ℓ *für ein* $\ell \geqslant 4$ *oder zu* E_6 *,* E_7 *oder* E_8 *.*

Sei $x := \sum_{i\in[1,a-1]} i\cdot x_i$ und $y := \sum_{i\in[1,b-1]} i\cdot y_i$ und $z := \sum_{i\in[1,c-1]} i\cdot z_i$, in der Bezeichnung von Schritt 8.

Es ist (x,y,z) linear unabhängig. Es ist $\lfloor x,y\rfloor = \lfloor x,z\rfloor = \lfloor y,z\rfloor = 0$. Es ist $e \notin \langle x,y,z\rangle$.

Wähle $f \in \langle x,y,z,e\rangle$ mit $f \perp \{x,y,z\}$ und $\|f\| = 1$. Also ist $(f, \frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|y\|}y, \frac{1}{\|z\|}z)$ eine

Orthonormalbasis von $\langle x, y, z, e\rangle$. Somit wird

$$\begin{aligned} e &= \lfloor e, f\rfloor f + \lfloor e, \tfrac{1}{\|x\|}x\rfloor \tfrac{1}{\|x\|}x + \lfloor e, \tfrac{1}{\|y\|}y\rfloor \tfrac{1}{\|y\|}y + \lfloor e, \tfrac{1}{\|z\|}z\rfloor \tfrac{1}{\|z\|}z \\ &= \lfloor e, f\rfloor f + \tfrac{\lfloor e,x\rfloor}{\lfloor x,x\rfloor}\, x + \tfrac{\lfloor e,y\rfloor}{\lfloor y,y\rfloor}\, y + \tfrac{\lfloor e,z\rfloor}{\lfloor z,z\rfloor}\, z\ . \end{aligned}$$

Es ist $\lfloor e, f\rfloor \neq 0$, da $f \not\perp \{x, y, z, e\}$.

Also wird

$$1 \;=\; \lfloor e, e\rfloor \;>\; \lfloor e, e\rfloor - \lfloor e, f\rfloor^2 \;=\; \tfrac{\lfloor e,x\rfloor^2}{\lfloor x,x\rfloor} + \tfrac{\lfloor e,y\rfloor^2}{\lfloor y,y\rfloor} + \tfrac{\lfloor e,z\rfloor^2}{\lfloor z,z\rfloor}\ .$$

Nun ist $\lfloor x, x\rfloor = a(a-1)/2$ und $\lfloor y, y\rfloor = b(b-1)/2$ und $\lfloor z, z\rfloor = c(c-1)/2$; cf. Beweis zu Schritt 9.

Ferner ist $\lfloor e, x\rfloor^2 = \frac{(a-1)^2}{4}$ und $\lfloor e, y\rfloor^2 = \frac{(b-1)^2}{4}$ und $\lfloor e, z\rfloor^2 = \frac{(c-1)^2}{4}$.

Wir erhalten

$$1 \;>\; \tfrac{a-1}{2a} + \tfrac{b-1}{2b} + \tfrac{c-1}{2c}\ ,$$

i.e.

$$1 \;<\; \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}\ .$$

Mit $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$ folgt $c = 2$. Also

$$\tfrac{1}{2} \;<\; \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b}\ .$$

Mit $a \geqslant b \geqslant 2$ folgt $b \in \{2, 3\}$.

Ist $b = 2$, so ist $a \geqslant 2$ beliebig, was D_{a+2} liefert.

Ist $b = 3$, so ist $a \in \{3, 4, 5\}$, was E_{a+3} liefert. □

5.10 Übersicht bis hier

Sei HELT die Menge der Paare $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ aus einer halbeinfachen endlichdimensionalen Liealgebra $\mathfrak{g}$ über $\mathbf{C}$, zusammen mit einem maximalen Torus $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$; cf. §4.1 ([5]).

Sei ELT := $\{\, (\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \in \text{HELT} \,:\, \mathfrak{g} \text{ ist einfach} \,\} \subseteq$ HELT.

Dank Lemma 53.(1) kennen wir mit den einfachen auch die halbeinfachen endlichdimensionalen Liealgebren über $\mathbf{C}$.

Es ist IKWS die Menge der Isoklassen von Wurzelsystemen. Es ist IKTG die Menge der Isoklassen teilgerichteter Graphen. Wir haben die injektive Abbildung IKWS $\xrightarrow{\delta}$ IKTG aus Lemma 155.

[5]Die Frage, ob die Gesamtheit dieser Paare eine Menge bildet, ignorieren wir. Wer dabei Skrupel hat, fixiere ein Universum $\mathfrak{U}$ und bilde die Menge solcher Paare aus $\mathfrak{U}$ in einem Universum $\mathfrak{V} \ni \mathfrak{U}$; cf. SGA 4, exp. 1, §0.

Sei $\mathrm{IKWS}^{\mathrm{einf}}$ die Menge der Isoklassen von einfachen Wurzelsystemen. Sei $\mathrm{IKTG}^{\mathrm{zh}}$ die Menge der Isoklassen von zusammenhängenden teilgeordneten Graphen. Nach Definition 156 schränkt δ ein zu einer Abbildung von $\mathrm{IKWS}^{\mathrm{einf}}$ nach $\mathrm{IKTG}^{\mathrm{zh}}$.

Sei $\mathrm{IKTG}^{\mathrm{Liste}}$ die Menge der Isoklassen von teilgeordneten Graphen, die in der Klassifikation, Satz 164, aufgelistet sind. Gemäß loc. cit. schränkt δ im Zielbereich weiter zu einer bijektiven Abbildung von $\mathrm{IKWS}^{\mathrm{einf}}$ nach $\mathrm{IKTG}^{\mathrm{Liste}}$ ein – dort wurde ja gerade ausgerechnet, daß $\delta(\mathrm{IKWS}^{\mathrm{einf}}) = \mathrm{IKTG}^{\mathrm{Liste}}$ ist.

Dank Komponentenzerlegung aus §5.8, genauer, dank Lemma 160 und Bemerkung 162, kennen wir damit auch das Bild $\delta(\mathrm{IKWS})$: dazu gehört, nach Bilden der Isoklasse, jede disjunkte Vereinigung von teilgerichteten Graphen, die zur Liste aus Satz 164 gehören.

Wir haben aus Satz 107 folgende Abbildung; cf. Definition 110.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{HELT} & \xrightarrow{\Omega} & \mathrm{IKWS} \\
(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) & \longmapsto & (\, \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} \, , \, t_{\Phi(\mathfrak{g})} \,)
\end{array}
$$

Gemäß Aufgabe 48.(3) schränkt Ω zu einer Abbildung von ELT nach $\mathrm{IKWS}^{\mathrm{einf}}$ ein.

Sei IKEL die Menge der Isoklassen einfacher endlichdimensionaler Liealgebren über $\mathbf{C}$. Wir haben folgende surjektive Abbildung.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{ELT} & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{IKEL} \\
(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) & \longmapsto & [\mathfrak{g}]
\end{array}
$$

Betrachte folgendes kommutative Diagramm von Mengen.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{IKEL} \arrow[dr, dotted, "\omega", "\sim"'] & & \mathrm{IKTG}^{\mathrm{Liste}} \arrow[dr, hook] & \\
\mathrm{ELT} \arrow[ur, "\rho"] \arrow[rr] \arrow[d, hook] & & \mathrm{IKWS}^{\mathrm{einf}} \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr, "\mathrm{injektiv}"'] \arrow[d, hook] & & \mathrm{IKTG}^{\mathrm{zh}} \arrow[d, hook] \\
\mathrm{HELT} \arrow[rr, "\Omega"] & & \mathrm{IKWS} \arrow[rr, "\delta", "\mathrm{injektiv}"'] & & \mathrm{IKTG}
\end{tikzcd}
$$

Die Existenz und die Bijektivität der gestrichelt dargestellten Abbildung ω darin fehlen uns noch.

Anhang A

Aufgaben und Lösungen

A.1 Aufgaben

Aufgabe 1 (§1.1) Sei K ein Körper.

(1) Sei $\mathfrak{g} = K^{3\times 1}$, ausgestattet mit $\left[\, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \,\right] := \begin{pmatrix} \beta\gamma' - \gamma\beta' \\ \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \\ \alpha\beta' - \beta\alpha' \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \in K^{3\times 1}$.
Zeige, daß $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra ist.

(2) Sei $n \geqslant 0$. Sei $a \in K^{n\times n}$. Sei $\mathfrak{o}(K,a) := \{\, g \in \mathfrak{gl}_n(K) \;:\; g^{\mathrm{t}}\, a = -ag \,\}$.
Zeige $\mathfrak{o}(K,a) \leqslant \mathfrak{gl}_n(K)$.

(3) Sei $\mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{k}$ ein Isomorphismus von Liealgebren.
Zeige, daß auch $\mathfrak{k} \xrightarrow{f^{-1}} \mathfrak{h}$ ein Isomorphismus ist.

(4) Sei $\mathfrak{g}$ wie in (1). Sei $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Zeige $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{o}(K, \mathrm{E}_3)$.

Aufgabe 2 (§1.1) Sei K ein Körper.

(1) Sei A eine Algebra. Sei

$$\mathfrak{der}(A) \;:=\; \{\, d \in \mathfrak{gl}(A) \;:\; d(a\cdot b) = d(a)\cdot b + a\cdot d(b) \text{ für } a,\, b \,\in\, A \,\} \;\subseteq\; \mathfrak{gl}(A)$$

der Teilraum der *Derivationen.* Zeige $\mathfrak{der}(A) \leqslant \mathfrak{gl}(A)$.

(2) Sei $K^{2\times 2}$ mit der Matrixmultiplikation ausgestattet. Bestimme eine Basis von $\mathfrak{der}(K^{2\times 2})$. Falls $\operatorname{char} K \neq 2$, für welches $n \geqslant 0$ ist $\mathfrak{der}(K^{2\times 2}) \simeq \mathfrak{sl}_n(K)$?

Aufgabe 3 (§1.2.1) Sei K ein Körper. Sei $n \geqslant 0$.
Wann ist $\mathfrak{sl}_n(K)$ einfach ?

Aufgabe 4 (§1.2.1, §1.2.2) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

(1) Zeige.

Ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, so ist der Faktorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ vermöge $[g+\mathfrak{a}, h+\mathfrak{a}] := [g,h]+\mathfrak{a}$ eine Liealgebra.

Die Restklassenabbildung $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho = \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}} \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $g \longmapsto g + \mathfrak{a}$ ist ein Morphismus.

(2) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren. Sei $\tilde{\mathfrak{g}} \leqslant \mathfrak{g}$. Sei $\tilde{\mathfrak{a}} \trianglelefteq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Sei $\tilde{\mathfrak{h}} \leqslant \mathfrak{h}$.

(i) Es ist $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \leqslant \mathfrak{g}$. Ist $\tilde{\mathfrak{h}} \trianglelefteq \mathfrak{h}$, dann ist $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

(ii) Es ist $\varphi(\tilde{\mathfrak{g}}) \leqslant \mathfrak{h}$ und $\varphi(\mathfrak{a}) \trianglelefteq \mathfrak{h}$.

(iii) Es ist $\tilde{\mathfrak{a}} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

(iv) Es ist $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Kern}\varphi$ genau dann, wenn es einen Morphismus $\bar{\varphi}$ mit $\bar{\varphi} \circ \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} = \varphi$ gibt.

(v) Es ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq (\tilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{a}) \leqslant \mathfrak{g}$, es ist $(\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a}) \trianglelefteq \tilde{\mathfrak{g}}$ und es ist $\;(\tilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a} \;\simeq\; \tilde{\mathfrak{g}}/(\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a})\;$.

(vi) Es ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

(3) Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren.
Zeige den Isomorphismus $\mathfrak{g}/\operatorname{Kern}\varphi \xrightarrow[\sim]{\bar{\varphi}} \varphi(\mathfrak{g})$, $g + \operatorname{Kern}\varphi \longmapsto \varphi(g)$.

(4) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Sei $T_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} := \{\, \mathfrak{h} \;:\; \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g} \,\}$. Sei $T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} := \{\, \mathfrak{k} \;:\; \mathfrak{k} \leqslant \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \,\}$. Zeige die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} T_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} & \longrightarrow & T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \rho(\mathfrak{h}) \\ \rho^{-1}(\mathfrak{k}) & \longleftarrow\!\! | & \mathfrak{k} \end{array}$$

Zeige, daß diese Bijektion auf die Teilmenge der jeweiligen Ideale einschränkt.

Aufgabe 5 (§1.2.3) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

Sei $V \subseteq \mathfrak{g}$ ein Teilraum. Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Zeige.

(1) Es ist $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V) \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{g}$.

(2) Es ist $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(V) \leqslant \mathfrak{g}$.

Aufgabe 6 (§1.2.1, Aufgabe 2.(1)) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

Sei $d \in \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Zeige $[d, \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} g] = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} d(g)$. Folgere $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \trianglelefteq \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$.

Aufgabe 7 (§1.2.1) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{h}$ eine Liealgebra. Sei $\mathfrak{n}$ eine Liealgebra.

Was $\mathfrak{der}(\mathfrak{n})$ anbelangt, cf. Aufgabe 2.(1).

(1) Sei $\varphi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{der}(\mathfrak{n})$ ein Morphismus von Liealgebren.
Schreibe $[h, n] := (\varphi(h))(n) \in \mathfrak{n}$ für $h \in \mathfrak{h}$ und $n \in \mathfrak{n}$.
Setze für (n, h), $(n', h') \in \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$
$$[(n, h), (n', h')] \;:=\; (\,[n, n'] + [h, n'] - [h', n]\,,\; [h, h']\,)\;.$$
Zeige, daß dies auf $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ eine Liealgebra definiert, genannt $\mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h}$, oder kurz $\mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{h}$, das *semidirekte Produkt* von $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{h}$ vermöge φ.
Zeige $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h}$. Zeige $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h}$.

(2) Sei $\mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{r} \mathfrak{h}$ eine *kurz exakte Sequenz* von Liealgebren, i.e. sei auch $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, sei i ein injektiver Morphismus von Liealgebren, sei r ein surjektiver Morphismus von Liealgebren und sei $i(\mathfrak{n}) = \mathrm{Kern}(r)$. Sei ferner ein Morphismus $\mathfrak{h} \xrightarrow{s} \mathfrak{g}$ von Liealgebren mit $r \circ s = \mathrm{id}_\mathfrak{h}$ gegeben. Definiere $\varphi_s : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{der}(\mathfrak{n})$ wie folgt. Für $h \in \mathfrak{h}$ sei $\varphi_s(h) : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}$ festgelegt durch
$$i((\varphi_s(h))(n)) \;:=\; [s(h), i(n)]\;.$$
Zeige $\mathfrak{n} \rtimes_{\varphi_s} \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}$.

(3) Sei φ wie in (1). Sei $i : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h}$, $n \longmapsto (n, 0)$. Sei $r : \mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$, $(n, h) \longmapsto h$. Sei $s : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h}$, $h \longmapsto (0, h)$. Dank (1) sind i, r und s Morphismen von Liealgebren. Es ist $r \circ s = \mathrm{id}_\mathfrak{h}$.
Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $\mathfrak{n} \xrightarrow{i} \mathfrak{n} \rtimes_\varphi \mathfrak{h} \xrightarrow{r} \mathfrak{h}$; cf. $(1, 2)$.
Zeige $\varphi = \varphi_s$.

Aufgabe 8 (§1.3) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Seien $f_1(T), \ldots, f_n(T) \in K[T]$ paarweise ohne gemeinsame Nullstelle, wobei $n \geqslant 0$.

Seien $r_1(T), \ldots, r_n(T) \in K[T]$.

Zeige, daß ein $r(T) \in K[T]$ existiert mit $r(T) \equiv_{f_i(T)} r_i(T)$ für alle $i \in [1, n]$.

Aufgabe 9 (§1.3) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Sei $V \xrightarrow{f} W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen.

Seien $x \in \mathrm{End}\, V$ und $y \in \mathrm{End}\, W$ mit $f \circ x = y \circ f$. Zeige.

(1) Sei f surjektiv. Ist x halbeinfach, so auch y.

(2) Sei f injektiv. Ist y halbeinfach, so auch x.

(3) Es ist $f \circ x_{\mathrm{gs}} = y_{\mathrm{gs}} \circ f$ und $f \circ x_{\mathrm{gn}} = y_{\mathrm{gn}} \circ f$.

Aufgabe 10 (§1.3) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Schreibe $n := \dim V$.

Sei $m \geqslant 0$. Seien $x_1\,,\,\dots\,,\,x_m \in \operatorname{End} V$ halbeinfach mit $x_i \circ x_j = x_j \circ x_i$ für $i,\, j \in [1,m]$. Zeige.

(1) Es gibt eine Basis $(v_1\,,\,\dots\,,\,v_n)$ von V so, daß v_k Eigenvektor von x_i ist für alle $k \in [1,n]$ und alle $i \in [1,m]$.

(2) Jedes Element von $\langle x_1\,,\,\dots\,,\,x_m\rangle$ ist halbeinfach.

(3) Es gibt K, V wie oben und halbeinfache Elemente $y,\, z \in \operatorname{End} V$ so, daß $y+z$ nicht halbeinfach ist.

Aufgabe 11 (§1.2.1) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

Seien $\mathfrak{a},\, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Zeige $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Ist stets $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} = [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$?

Aufgabe 12 (§1.2.1) Sei K ein unendlicher Körper von Charakteristik 0. Sei $n \geqslant 1$. Schreibe $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(K)$. Zeige.

(1) Seien $g,\, h \in \mathfrak{g}$. Es gibt $\tilde{g},\, \tilde{h} \in \mathfrak{g}$ mit $\det\tilde{g} \neq 0$ und $\det\tilde{h} \neq 0$ und $[g,h] = [\tilde{g},\tilde{h}]$.

(2) Sei $z \in \mathfrak{g}$ von der Form $z = \left(\begin{smallmatrix} 0 & u \\ v & \tilde{z} \end{smallmatrix}\right)$ mit einem Kommutator $\tilde{z} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$. Dann ist auch z ein Kommutator.

(3) Sei $z \in \mathfrak{g} \smallsetminus \langle \mathrm{E}_n\rangle$. Dann gibt es ein $s \in \mathrm{GL}_n(K)$ so, daß $s^{-1}zs$ an Position $(1,1)$ den Eintrag 0 hat.

(4) Es ist $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \{\,[g,h] \,:\, g,\, h \in \mathfrak{g}\,\}$.

Aufgabe 13 (§2.1) Sei K ein Körper.

Untersuche die Liealgebra $\mathfrak{g}$ auf Auflösbarkeit und Nilpotenz.

(1) Sei $n \geqslant 2$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n^{>}(K)$; cf. Definition 38.

(2) Sei $n \geqslant 2$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K)$; cf. Definition 38.

(3) Sei $\operatorname{char} K = 2$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(K)$.

(4) Sei $\operatorname{char} K = 3$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_3(K)$. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach? (Hinweis: Lösung zu Aufgabe 3.)

(5) Sei $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_2(K)$. Bestimme auch alle Ideale von $\mathfrak{g}$, sowie $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$.

Aufgabe 14 (§2.2)
Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale nilpotente Liealgebra. Sei $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.
Zeige $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. (Hinweis: Lemma 37 auf Bild von $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$.)

Aufgabe 15 (§2.1.2) Sei K ein Körper.
Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ endlichdimensionale Liealgebren.
Sei $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ mit der Lieklammer wie in Bemerkung 15 ausgestattet. Zeige.

(1) Sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ halbeinfach, so auch $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.

(2) Es ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$.

Aufgabe 16 (§2.2, §2.1.2) Zeige oder widerlege.
Sei K ein Körper. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$.

(1) Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so besteht $\mathfrak{g}$ aus nilpotenten Endomorphismen.

(2) Besteht $\mathfrak{g}$ aus nilpotenten Endomorphismen, so ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.

(3) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $\mathfrak{h}$ halbeinfach.

(4) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Dann ist g halbeinfach.

(5) Sei jedes Element von $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

(6) Ist $g \in \mathfrak{g}$, so ist auch $g_{\mathrm{gs}} \in \mathfrak{g}$.

Aufgabe 17 (§2.4) Zeige oder widerlege.
Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra.

(1) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Es ist $\kappa_{\mathfrak{a}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$.

(2) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\kappa_{\mathfrak{h}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

Aufgabe 18 (§2.4) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_2^{\geqslant}(K)$.

(1) Bestimme eine Grammatrix von $\kappa_{\mathfrak{g}}$ bezüglich einer Basis von $\mathfrak{g}$.

(2) Bestimme $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g})$.

(3) Bestimme $\operatorname{rad} \kappa_{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$.

Aufgabe 19 (§2.4, §2.5) Zeige oder widerlege.

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Es werde $(-)^\perp$ bezüglich $\kappa_\mathfrak{g}$ gebildet.

(1) Ist $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, so ist $\mathfrak{g}$ nilpotent. (Hinweis: $[g, h] = h$, $[g, k] = \mathrm{i}k$, $[h, k] = 0$.)

(2) Ist $\mathfrak{a}$ ein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{g}$, dann ist $\mathfrak{a} \leqslant \operatorname{rad} \kappa_\mathfrak{g}$.

(3) Es ist $\operatorname{rad} \kappa_\mathfrak{g} = \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$. (Hinweis: $[g, h] = h$.)

(4) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{h}$ auflösbar genau dann, wenn $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{(1)}) = 0$ ist.

(5) Sei $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{h}^\perp \leqslant \mathfrak{g}$.

Aufgabe 20 (§2.5) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$.

Ist $\operatorname{tr}(x \circ w) = 0$ für alle $w \in \mathfrak{gl}(V)$, so zeige mit Lemma 48, daß x nilpotent ist, und zeige ohne Lemma 48, daß $x = 0$ ist.

Aufgabe 21 (§2.6) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra.

Zeige $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$. (Hinweis: Lemma 53.(1).)

Aufgabe 22 (Aufgabe 23) Sei K ein Körper. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $W \subseteq V$ ein Teilraum. Sei $b : V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $b|_{W \times W}$ nichtausgeartet.

Zeige $V = W \oplus W^\perp$.

Aufgabe 23 (§2.5, §2.6) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Sei $\mathfrak{b} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.

Zeige ohne Verwendung von Lemma 53.

(1) Sei $\mathfrak{b}$ halbeinfach. Es ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^\perp$. (Hinweis: Satz 50, Aufgabe 22.)

(2) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Es ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^\perp$.

(3) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{b} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. (Hinweis: (2).)

Aufgabe 24 (§2.1.2, §2.6)
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{gl}(V)$ ein Morphismus von Liealgebren. Zeige $\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$.
(Hinweis: tr Morphismus.)

Aufgabe 25 (§3.1) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

(1) Gegeben sei ein $\mathfrak{g}$-Modul M sowie ein Teilmodul $M' \subseteq M$. Zeige, daß M/M' zu einem $\mathfrak{g}$-Modul wird via $[g, m + M'] := [g, m] + M'$ für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$.

(2) Sei $M \xrightarrow{f} N$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln. Zeige, daß auch $M \xleftarrow{f^{-1}} N$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln ist.

(3) Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung zwischen $\mathfrak{g}$-Moduln. Zeige.
Es sind $\operatorname{Kern} f \subseteq M$ und $\operatorname{Im} f \subseteq N$ Teilmoduln. Es gibt den Isomorphismus $M/\operatorname{Kern} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$, $m + \operatorname{Kern} f \longmapsto f(m)$ von $\mathfrak{g}$-Moduln.

(4) Sei $\mathfrak{g}$ nichtabelsch. Zeige.
Genau dann ist der reguläre $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{g}$ einfach, wenn $\mathfrak{g}$ einfach als Liealgebra ist.

(5) Sei M ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Zeige, daß M genau dann halbeinfach ist, wenn zu jedem Teilmodul $M' \subseteq M$ ein Teilmodul $M'' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus M''$ existiert.

(6) Sei K algebraisch abgeschlossen. Sei M ein endlichdimensionaler einfacher $\mathfrak{g}$-Modul. Sei $M \xrightarrow{f} M$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung. Zeige, daß $f = \lambda \operatorname{id}_M$ ist für ein $\lambda \in K$. (Hinweis: f hat Eigenwert.)

(7) Seien $\mathfrak{g}$-Moduln M und N gegeben. Definiere auf dem Raum der K-linearen Abbildungen $\operatorname{Hom}(M, N)$ wie folgt eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur. Gegeben $g \in \mathfrak{g}$ und $f \in \operatorname{Hom}(M, N)$, so bilde $[g, f] \in \operatorname{Hom}(M, N)$ ein Element $m \in M$ ab nach $[g, f](m) := [g, f(m)] - f([g, m])$. Zeige, daß $\operatorname{Hom}(M, N)$, zusammen mit $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\operatorname{Hom}(M, N))$, $g \longmapsto [g, -]$, ein $\mathfrak{g}$-Modul ist.

(8) Sei M ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Zeige, daß M isomorph ist zu M^{**} vermöge $e : M \to M^{**}$, $m \mapsto (f \mapsto f(m))$.

Aufgabe 26 (§3.1) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Sei $M = (M, \varphi)$ ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Zeige.

(1) Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Es ist $[\mathfrak{a}, M]$ ein $\mathfrak{g}$-Teilmodul von M.

(2) Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Sei $M \neq 0$. Es ist $[\mathfrak{g}^{(1)}, M] \subset M$.

(3) Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Sei M einfach. Es ist $\dim M = 1$.

Aufgabe 27 (§2.4, §3.1) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra.

Sei $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ bilinear mit $\kappa(g, [h, k]) = \kappa([g, h], k)$ für $g,\ h,\ k \in \mathfrak{g}$.

Zeige.

(1) Es ist $f_\kappa : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, $g \longmapsto (x \mapsto \kappa(g,x))$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung.

(2) Sei $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V. Sei $\mathfrak{g}$ einfach. Sei $\mathrm{tr}(g^2) \neq 0$ für ein $g \in \mathfrak{g}$.

Dann gibt es ein $\lambda \in K$ mit $\kappa(g,h) = \lambda\,\mathrm{tr}(g \circ h)$ für $g,\ h \in \mathfrak{g}$.

Aufgabe 28 (§3.2) Zeige, daß die Definition des Casimirelementes in Lemma 63 nicht von der Wahl einer Basis der Liealgebra abhängt.

Aufgabe 29 (§3.2) Berechne das Casimir-Element c_φ des $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$-Moduls $\mathbf{C}^{3\times 1}$, ausgestattet mit dem Morphismus $\varphi : \mathfrak{sl}_3(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_3(\mathbf{C}) = \mathfrak{gl}(\mathbf{C}^{3\times 1})$, einmal direkt und einmal mittels Bemerkung 67.(3).

Aufgabe 30 (§3.4) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}\, K = 0$. Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ endlichdimensionale halbeinfache Liealgebren. Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren. Sei $g \in \mathfrak{g}$.

Zeige $\varphi(g)_{\mathrm{as}} = \varphi(g_{\mathrm{as}})$ und $\varphi(g)_{\mathrm{an}} = \varphi(g_{\mathrm{an}})$.

Aufgabe 31 (§1.2.1) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Sei $b := \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \in K^{5\times 5}$.
Zeige, daß $\mathfrak{o}(K,b)$ einfach ist; cf. Aufgabe 1.(2).

Aufgabe 32 (§3.1, §3.5) Zeige oder widerlege.

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}\, K = 0$. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $0 \neq \mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{sl}(V)$. Zusammen mit dem Inklusionsmorphismus $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ wird V zu einem $\mathfrak{g}$-Modul. Sei dieser $\mathfrak{g}$-Modul V einfach.

(1) Es ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach.

(2) Es ist $\mathfrak{g}$ einfach.

Was folgt daraus für die Liealgebra $\mathfrak{o}(b,K)$ aus Aufgabe 31 ?

Aufgabe 33 (§3.5) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}\, K = 0$. Sei M ein $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul.

(1) Sei $\mu \in \gamma(M) \subseteq K$ ein maximales Gewicht.

Sei $m_0 \in M_\mu$. Setze $m_k := k!^{-1}(\varphi(f))^k(m_0)$ für $k \geqslant 1$ und $m_{-1} := 0$. Wir verwenden die Bezeichnungen von §3.5, insbesondere von Bemerkung 78.

Zeige, daß $[h, m_k] = (\mu - 2k)m_k$ ist, daß $[e, m_k] = (\mu - k + 1)m_{k-1}$ ist und daß $[f, m_k] = (k + 1)m_{k+1}$ ist für $k \geqslant 0$.

(2) Sei M einfach. Sei $\lambda \in K$. Sind λ und $\lambda + 2$ in $\gamma(M)$, so zeige $[e, M_\lambda] = M_{\lambda+2}$.

Aufgabe 34 (§3.5) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Schreibe $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(K)$.

Zerlege folgende $\mathfrak{g}$-Moduln jeweils in eine direkte Summe von Teilmoduln isomorph zu den in Bemerkung 79 konstruierten. Bestimme die Gewichtsräume.

(1) Betrachte den via $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(K)$ gegebenen $\mathfrak{g}$-Modul $K^{2\times 1}$.

(2) Betrachte den regulären $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{g}$.

(3) Es ist $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{sl}_3(K)$, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Betrachte den Modul $M := \mathfrak{sl}_3(K)|_{\mathfrak{g}}$.

Aufgabe 35 (§4.1) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus.

Sei $\mathfrak{g}'$ eine endlichdimensionale Liealgebra.

Sei $\varphi : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'$ ein Isomorphismus von Liealgebren. Sei $\varphi(\mathfrak{t}) =: \mathfrak{t}'$.

Zeige, daß $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}'$ ein maximaler Torus ist.

Aufgabe 36 (§4.1, §4.2) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

(1) Bestimme zwei verschiedene maximale Tori in $\mathfrak{sl}_2(K)$.

Die folgenden Aufgabenteile löse man bezüglich eines fest gewählten maximalen Torus.

(2) Bestimme $\Phi(\mathfrak{sl}_2(K))$. Bestimme eine Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{sl}_2(K)$.

(3) Bestätige Bemerkung 89 in diesem Falle.

Aufgabe 37 (§4.2) Zeige oder widerlege.

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus.

(1) Es ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$.

(2) Es ist $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$.

Aufgabe 38 (§4.4) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra. Sei $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus.

Zeige.

(1) Eine Teilalgebra von $\mathfrak{g}$, die $\mathfrak{g}_\sigma$ enthält für alle $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$, ist bereits gleich $\mathfrak{g}$.

(2) Seien σ, $\rho \in \Phi(\mathfrak{g})$. Ist auch $\sigma + \rho \in \Phi(\mathfrak{g})$, so ist $[\mathfrak{g}_\sigma, \mathfrak{g}_\rho] = \mathfrak{g}_{\sigma+\rho}$.

Aufgabe 39 (§4.3, §4.4, §4.5, Aufgabe 31.(2))
Sei $K = \mathbf{C}$. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra.

(i) Bestimme einen maximalen Torus $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{g}$.

(ii) Bestimme die Menge der Wurzeln $\Phi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{t}^*$.

(iii) Sei $E = \mathfrak{t}_{\mathbf{R}} = {}_{\mathbf{R}}\langle\, t_\chi \,:\, \chi \in \Phi(\mathfrak{g})\,\rangle$, ausgestattet mit der Bilinearform $\kappa_{\mathfrak{g}}|^{\mathbf{R}}_{E\times E}$.
Bestimme eine Orthonormalbasis von E und schreibe t_χ in dieser Basis für alle $\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$. Skizze!
Bestätige Lemma 102.(1) in 2 Fällen. Bestätige Lemma 101.(1, 2) in 2 Fällen.

(1) Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$.

(2) Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(\mathbf{C}, b)$; b wie in Aufgabe 31.

Aufgabe 40 (§4.5)

(1) Bestimme das zu $\mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem (E, Ψ). Skizze! Cf. Aufgabe 39.(1).

(2) Bestimme eine Basis des Wurzelsystems (E, Ψ) aus (1).

Aufgabe 41 (§5.1) Sei $E = (E, \lfloor -, = \rfloor)$ ein euklidischer Raum.
Für $x \in E \smallsetminus \{0\}$ sei

$$x^\vee := \tfrac{2}{\lfloor x,x \rfloor}\, x \ .$$

Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem.

(1) Zeige, daß mit $\Phi^\vee := \{\, t^\vee \,:\, t \in \Phi\}$ auch $(E, \Phi^\vee)$ ein Wurzelsystem ist, genannt das zu (E, Φ) *duale* Wurzelsystem.

(2) Zeige $\Phi^{\vee\vee} = \Phi$.

(3) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 39.(1) zu $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem.
Ist $\Phi \simeq \Phi^\vee$?

(4) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 39.(2) zu $\mathfrak{o}(\mathbf{C}, b)$ gehörige Wurzelsystem.
Ist $\Phi \simeq \Phi^\vee$?

Aufgabe 42 (§5.1)

(1) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 39.(1) zu $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem. Zeige, daß $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

(2) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 39.(2) zu $\mathfrak{o}(\mathbf{C}, b)$ gehörige Wurzelsystem, b wie in Aufgabe 31. Zeige, daß $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ isomorph zur Untergruppe $\mathrm{D}_8 := \langle\!\langle (1,3), (1,2)(3,4) \rangle\!\rangle$ von Ordnung 8 in der S_4 ist.

Aufgabe 43 (§5.3)

(1) Bestätige Bemerkung 125 in einem Beispiel im Wurzelsystem von Beispiel 113.(2).

(2) Bestätige Bemerkung 125 in einem Beispiel im Wurzelsystem von Beispiel 113.(3).

Aufgabe 44 (§5.5) Sei $m \geqslant 0$. Sei K ein Körper mit $|K| \geqslant m$.

Sei V ein Vektorraum. Sei $U_i \subset V$ ein Teilraum für $i \in [1, m]$.

Zeige $\bigcup_{i \in [1,m]} U_i \subset V$.

Aufgabe 45 (§5.6) Sei (E, Φ) ein Wurzelsystem. Sei Δ eine Basis von (E, Φ). Zeige.

(1) Sei $r \in \Phi_\Delta^+ \smallsetminus \Delta$. Dann gibt es ein $d \in \Delta$ mit $r - d \in \Phi_\Delta^+$.

(2) Sei $r \in \Phi_\Delta^+$. Es gibt ein $k \geqslant 0$ und $e_1, \ldots, e_k \in \Delta$ mit $r = \sum_{i \in [1,k]} e_i$ und $\sum_{i \in [1,j]} e_i \in \Phi_\Delta^+$ für alle $j \in [1, k]$.

Aufgabe 46 (§5.6, §5.7)
Aufgabe 40 entnehmen wir das Wurzelsystem (E, Φ) von $\mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$ und davon eine Basis Δ.

(1) Bestimme ein Element $w \in \mathrm{W}_{E,\Phi}$ von Ordnung 3.

Bestimme $\{ w^i(\Delta) : i \in \mathbf{Z} \}$.

(2) Berechne eine Cartanmatrix von (E, Φ).

Aufgabe 47 (§5.6)
Sei (E, Φ) das Wurzelsystem aus Beispiel 113.(3); cf. Aufgabe 39.(2).

Sei Δ eine Basis von (E, Φ).

Bestätige in diesem Fall die Bijektivität der in Korollar 146 betrachteten Abbildung von $\mathrm{W}_{E,\Phi}$ in die Menge aller Basen von (E, Φ), die w nach $w(\Delta)$ schickt. Cf. Aufgabe 42.(2).

Aufgabe 48 (§5.8, §4.6, §5.1) Sei $K = \mathbf{C}$.

(1) Seien $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{g}''$ halbeinfache endlichdimensionale Liealgebren.
Seien $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{t}'' \leqslant \mathfrak{g}''$ maximale Tori.

(i) Zeige, daß $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{t}''$ ein maximaler Torus in $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$ ist; cf. Bemerkung 15.(2).

(ii) Zeige $t_{\Phi(\mathfrak{g})} = (t'_{\Phi(\mathfrak{g}')}\,, 0) \sqcup (0\,, t''_{\Phi(\mathfrak{g}'')})$ und $(t'_{\Phi(\mathfrak{g}')}\,, 0) \perp (0\,, t''_{\Phi(\mathfrak{g}'')})$ (Bezeichnungen jeweils analog).

(2) Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra. Sei $t_{\Phi(\mathfrak{g})} = \Psi' \sqcup \Psi''$ so, daß $\Psi' \perp \Psi''$ ist. Setze

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}' & := & \mathbf{c}\langle\Psi'\rangle \oplus \bigoplus_{\chi' \in \Phi(\mathfrak{g}),\, t_{\chi'} \in \Psi'} \mathfrak{g}_{\chi'} \\ \mathfrak{g}'' & := & \mathbf{c}\langle\Psi''\rangle \oplus \bigoplus_{\chi'' \in \Phi(\mathfrak{g}),\, t_{\chi''} \in \Psi''} \mathfrak{g}_{\chi''}\ . \end{array}$$

Zeige $\mathfrak{g}',\, \mathfrak{g}'' \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$; cf. Bemerkung 15.(1).

(3) Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra. Zeige, daß $\mathfrak{g}$ genau dann eine einfache Liealgebra ist, wenn $(\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}\,, t_{\Phi(\mathfrak{g})})$ ein einfaches Wurzelsystem ist für jeden maximalen Torus $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$; cf. Beispiel 112. (Hinweis: $(1, 2)$.)

Aufgabe 49 (§5.9) Zeige, daß jede der in der Liste der Klassifikation, Satz 164, auftretenden Isoklassen dynkingerichteter Graphen die Dynkinklasse eines einfachen Wurzelsystems ist.

Hinweis.

$$\begin{array}{rl} & \{\, \sum_{i\in[1,\,\ell+1]} \alpha_i \mathrm{e}_i \,:\, \alpha_i \in \mathbf{R},\ \sum_{i\in[1,\,\ell+1]} \alpha_i = 0 \,\} \\ \supseteq & \{\, \mathrm{e}_i - \mathrm{e}_j \,:\, i,\, j \,\in\, [1, \ell+1],\ i \neq j \,\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{R}^\ell \\ \supseteq & \{\, \alpha\mathrm{e}_i + \beta\mathrm{e}_j \,:\, i,\, j \,\in\, [1, \ell],\ i \neq j,\ \alpha \in \{-1, +1\},\ \beta \in \{-1, 0, +1\} \,\} \qquad \text{(sodann dual dazu)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{R}^\ell \\ \supseteq & \{\, \alpha\mathrm{e}_i + \beta\mathrm{e}_j \,:\, i,\, j \,\in\, [1, \ell],\ i \neq j,\ \alpha \in \{-1, +1\},\ \beta \in \{-1, +1\} \,\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \{\, \alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2 + \alpha_3\mathrm{e}_3 \,:\, \alpha_i \in \mathbf{R} \text{ für } i \in [1, 3],\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \,\} \\ \supseteq & \{d,\, f,\, d+f,\, 2d+f,\, 3d+f,\, 3d+2f,\, -d,\, -f,\, -d-f,\, -2d-f,\, -3d-f,\, -3d-2f\}\ , \\ & \text{wobei}\ \ d = \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2\ ,\quad f = -2\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{R}^4 \\ \supseteq & \{\, \alpha\mathrm{e}_i + \beta\mathrm{e}_j \,:\, i,\, j \,\in\, [1, 4],\ i \neq j,\ \alpha \in \{-1, 0, +1\},\ \beta \in \{-1, +1\} \,\} \\ \sqcup & \{\, \tfrac{1}{2}(\gamma_1\mathrm{e}_1 + \gamma_2\mathrm{e}_2 + \gamma_3\mathrm{e}_3 + \gamma_4\mathrm{e}_4) \,:\, \gamma_i \in \{-1, +1\} \text{ für } i \in [1, 4] \,\} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
& \mathbf{R}^8 \\
\supseteq & \{\, \alpha \mathrm{e}_i + \beta \mathrm{e}_j \,:\, i,\, j \,\in\, [1,8],\; i \neq j,\; \alpha \in \{-1,+1\},\; \beta \in \{-1,+1\}\,\} \\
\sqcup & \{\, \frac{1}{2}(\sum_{i\in[1,8]} \gamma_i \mathrm{e}_i) \,:\, \gamma_i \in \{-1,+1\} \text{ für } i \in [1,8],\; \prod_{i\in[1,8]} \gamma_i = 1\,\}\;, \\
& \text{sodann } \mathrm{e}_1 \text{ herausnehmen, resp. } \mathrm{e}_1 \text{ und } \mathrm{e}_2 \text{ herausnehmen}
\end{array}
$$

Aufgabe 50 (§5.7, §5.9)

(1) Sei (E,Φ) ein Wurzelsystem mit Basis Δ. Zeige, daß $\Delta^\vee := \{\, d^\vee \,:\, d \in \Delta\,\}$ eine Basis des Wurzelsystems $(E,\Phi^\vee)$ ist; cf. Aufgabe 41. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Cartanmatrizen von (E,Φ) bezüglich Δ und von $(E,\Phi^\vee)$ bezüglich $\Delta^\vee$?

(2) Wähle ein Wurzelsystem (E,Φ) mit Dynkingraph G_2 . Bestimme $\Phi^\vee$ und den Dynkingraphen von $(E,\Phi^\vee)$. Skizze! (Hinweis: Aufgabe 49.)

A.2 Lösungen

Aufgabe 1

(1) Wir unterschlagen die Verifikation, daß es sich bei $[-,=]$ um eine bilineare Abbildung handelt. Nichtsdestoweniger sollte man sich dessen vergewissern.

Seien $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{smallmatrix}\right) \in K^{3\times 1}$. Es wird

$$\left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right)\right] \;=\; \left(\begin{smallmatrix}\beta\gamma-\gamma\beta\\ \gamma\alpha-\alpha\gamma\\ \alpha\beta-\beta\alpha\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ 0\end{smallmatrix}\right) .$$

Ferner wird

$$\begin{array}{rl}
& \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right), \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{smallmatrix}\right)\right]\right] + \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right), \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right)\right]\right] + \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{smallmatrix}\right), \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right)\right]\right] \\
= & \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\beta'\gamma''-\gamma'\beta''\\ \gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''\\ \alpha'\beta''-\beta'\alpha''\end{smallmatrix}\right)\right] + \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\beta''\gamma-\gamma''\beta\\ \gamma''\alpha-\alpha''\gamma\\ \alpha''\beta-\beta''\alpha\end{smallmatrix}\right)\right] + \left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha''\\ \beta''\\ \gamma''\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\beta\gamma'-\gamma\beta'\\ \gamma\alpha'-\alpha\gamma'\\ \alpha\beta'-\beta\alpha'\end{smallmatrix}\right)\right] \\
= & \left(\begin{smallmatrix}\beta(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')-\gamma(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')\\ \gamma(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')-\alpha(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')\\ \alpha(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')-\beta(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}\beta'(\alpha''\beta-\beta''\alpha)-\gamma'(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)\\ \gamma'(\beta''\gamma-\gamma''\beta)-\alpha'(\alpha''\beta-\beta''\alpha)\\ \alpha'(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)-\beta'(\beta''\gamma-\gamma''\beta)\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}\beta''(\alpha\beta'-\beta\alpha')-\gamma''(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\\ \gamma''(\beta\gamma'-\gamma\beta')-\alpha''(\alpha\beta'-\beta\alpha')\\ \alpha''(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')-\beta''(\beta\gamma'-\gamma\beta')\end{smallmatrix}\right) \\
= & \left(\begin{smallmatrix}\beta\alpha'\beta''-\beta\beta'\alpha''+\beta'\alpha''\beta-\beta'\beta''\alpha+\beta''\alpha\beta'-\beta''\beta\alpha'-\gamma\gamma'\alpha''+\gamma\alpha'\gamma''-\gamma'\gamma''\alpha+\gamma'\alpha''\gamma-\gamma''\gamma\alpha'+\gamma''\alpha\gamma'\\ \gamma\beta'\gamma''-\gamma\gamma'\beta''+\gamma'\beta''\gamma-\gamma'\gamma''\beta+\gamma''\beta\gamma'-\gamma''\gamma\beta'-\alpha\alpha'\beta''+\alpha\beta'\alpha''-\alpha'\alpha''\beta+\alpha'\beta''\alpha-\alpha''\alpha\beta'+\alpha''\beta\alpha'\\ \alpha\gamma'\alpha''-\alpha\alpha'\gamma''+\alpha'\gamma''\alpha-\alpha'\alpha''\gamma+\alpha''\gamma\alpha'-\alpha''\alpha\gamma'-\beta\beta'\gamma''+\beta\gamma'\beta''-\beta'\beta''\gamma+\beta'\gamma''\beta-\beta''\beta\gamma'+\beta''\gamma\beta'\end{smallmatrix}\right) \\
= & \left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\\ 0\end{smallmatrix}\right) .
\end{array}$$

Man kann auch vorbringen, daß es genügt, die Gleichung für Standardbasisvektoren von $K^{3\times 1}$ zu verifizieren. Das wird aber wegen Fallunterscheidungen nicht kürzer.

(2) Wir unterschlagen die Verifikation, daß $\mathfrak{o}(K,a)$ ein Teilraum von $\mathfrak{gl}_n(K)$ ist. Nichtsdestoweniger sollte man sich dessen vergewissern.

Seien $g,\, h \in \mathfrak{o}(K,a)$. Wir haben zu zeigen, daß $[g,h] \overset{!}{\in} \mathfrak{o}(K,a)$. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl}
[g,h]^{\mathrm{t}}a & = & (gh-hg)^{\mathrm{t}}a \\
& = & h^{\mathrm{t}}g^{\mathrm{t}}a - g^{\mathrm{t}}h^{\mathrm{t}}a \\
& = & -h^{\mathrm{t}}ag + g^{\mathrm{t}}ah \\
& = & ahg - agh \\
& = & -a[g,h] .
\end{array}$$

(3) Mit $\mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{k}$ ist auch $\mathfrak{k} \xrightarrow{f^{-1}} \mathfrak{h}$ linear.
Seien $k,\, k' \in \mathfrak{k}$. Es wird

$$f^{-1}[k,k'] \;=\; f^{-1}[ff^{-1}k, ff^{-1}k'] \;=\; f^{-1}f[f^{-1}k, f^{-1}k'] \;=\; [f^{-1}k, f^{-1}k'] .$$

(4) Es ist $\mathfrak{o}(K,\mathrm{E}_3) = \{g \in \mathfrak{g}_3(K) \;:\; g^{\mathrm{t}} = -g\}$. Es ist $\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\ -1&0&0\\ 0&0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\ 0&0&0\\ -1&0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\ 0&0&-1\\ 0&1&0\end{smallmatrix}\right)\right)$ eine Basis davon, da $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Also ist die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl}
K^{3\times 1} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{o}(K,\mathrm{E}_3) \\
\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix}0&\alpha&\beta\\ -\alpha&0&-\gamma\\ -\beta&\gamma&0\end{smallmatrix}\right)
\end{array}$$

die die Standardbasis von $K^{3\times 1}$ auf diese Basis von $\mathfrak{o}(K,\mathrm{E}_3)$ schickt, bijektiv. Wir wollen zeigen, daß sie ein Isomorphismus ist, i.e. daß sie mit der Lieklammer verträglich ist.

Seien $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix} \in K^{3\times 1}$. Es wird zum einen

$$f\left[\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix}\beta\gamma'-\gamma\beta'\\\gamma\alpha'-\alpha\gamma'\\\alpha\beta'-\beta\alpha'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \beta\gamma'-\gamma\beta' & \gamma\alpha'-\alpha\gamma'\\\gamma\beta'-\beta\gamma' & 0 & \beta\alpha'-\alpha\beta'\\\alpha\gamma'-\gamma\alpha' & \alpha\beta'-\beta\alpha' & 0\end{pmatrix},$$

zum anderen

$$\begin{aligned}
\left[f\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}\right] &= \left[\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\-\alpha & 0 & -\gamma\\-\beta & \gamma & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \alpha' & \beta'\\-\alpha' & 0 & -\gamma'\\-\beta' & \gamma' & 0\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\-\alpha & 0 & -\gamma\\-\beta & \gamma & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \alpha' & \beta'\\-\alpha' & 0 & -\gamma'\\-\beta' & \gamma' & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & \alpha' & \beta'\\-\alpha' & 0 & -\gamma'\\-\beta' & \gamma' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \alpha & \beta\\-\alpha & 0 & -\gamma\\-\beta & \gamma & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\alpha\alpha'-\beta\beta' & \beta\gamma' & -\alpha\gamma'\\\gamma\beta' & -\alpha\alpha'-\gamma\gamma' & -\alpha\beta'\\-\gamma\alpha' & -\beta\alpha' & -\beta\beta'-\gamma\gamma'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\alpha'\alpha-\beta'\beta & \beta'\gamma & -\alpha'\gamma\\\gamma'\beta & -\alpha'\alpha-\gamma'\gamma & -\alpha'\beta\\-\gamma'\alpha & -\beta'\alpha & -\beta'\beta-\gamma'\gamma\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & \beta\gamma'-\gamma\beta' & \gamma\alpha'-\alpha\gamma'\\\gamma\beta'-\beta\gamma' & 0 & \beta\alpha'-\alpha\beta'\\\alpha\gamma'-\gamma\alpha' & \alpha\beta'-\beta\alpha' & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

was dasselbe ist.

Es ist f nicht der einzige Isomorphismus zwischen diesen beiden Liealgebren.

Aufgabe 2

(1) Seien $d,\, e \in \mathfrak{der}(A)$. Seien $a,\, b \in A$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& [d,e](a\cdot b)\\
=\ & d(e(a\cdot b)) - e(d(a\cdot b))\\
=\ & d(e(a)\cdot b + a\cdot e(b)) - e(d(a)\cdot b + a\cdot d(b))\\
=\ & \quad d(e(a))\cdot b + e(a)\cdot d(b) + d(a)\cdot e(b) + a\cdot d(e(b))\\
& -e(d(a))\cdot b - d(a)\cdot e(b) - e(a)\cdot d(b) - a\cdot e(d(b))\\
=\ & d(e(a))\cdot b + a\cdot d(e(b)) - e(d(a))\cdot b - a\cdot e(d(b))\\
=\ & [d,e](a)\cdot b + a\cdot [d,e](b)\ .
\end{aligned}$$

Also ist $[d,e] \in \mathfrak{der}(A)$.

(2) Es ist $(e_1\,,\, e_2\,,\, e_3\,,\, e_4) := \left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$ eine Basis von $K^{2\times 2}$. In dieser wollen wir eine Derivation als $d = (\delta_{i,\,j})_{i\in[1,4],\, j\in[1,4]} \in K^{4\times 4}$ schreiben, wir identifizieren also $\mathfrak{der}(K^{2\times 2}) \subseteq \mathfrak{gl}(K^{2\times 2}) = K^{4\times 4}$. Ferner schreiben wir $\sum_{i\in[1,4]} \lambda_i e_i = (\lambda_i)_{i\in[1,4]} \in K^{4\times 1}$, wir identifizieren also $K^{2\times 2}$ mit $K^{4\times 1}$ vermöge unserer Basis.

Die Multiplikationstafel von $K^{2\times 2}$ ist wie folgt.

$(\cdot)$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	0	0
e_2	0	0	e_1	e_2
e_3	e_3	e_4	0	0
e_4	0	0	e_3	e_4

Es ist $d \in \mathfrak{gl}(K^{2\times 2})$ genau dann eine Derivation, wenn $d(e_i\cdot e_j) = d(e_i)\cdot e_j + e_i\cdot d(e_j)$ für alle $i,\, j \in [1,4]$. Denn gilt diese Gleichung, dann durch bilineare Fortsetzung auch $d(a\cdot b) = d(a)\cdot b + a\cdot d(b)$ für $a,\, b \in K^{2\times 2}$.

Folglich ist $d = (\delta_{i,j})_{i,j}$ genau dann in $\mathfrak{der}(K^{2\times 2})$, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\delta_{1,1}\\\delta_{2,1}\\\delta_{3,1}\\\delta_{4,1}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{1,1}\\0\\\delta_{3,1}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{1,1}\\\delta_{2,1}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=1,\, j=1\\
\begin{pmatrix}\delta_{1,2}\\\delta_{2,2}\\\delta_{3,2}\\\delta_{4,2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{1,1}\\0\\\delta_{3,1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{1,2}\\\delta_{2,2}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=1,\, j=2\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{2,1}\\0\\\delta_{4,1}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{1,3}\\\delta_{2,3}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=1,\, j=3\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{2,1}\\0\\\delta_{4,1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{1,4}\\\delta_{2,4}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=1,\, j=4\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{1,2}\\0\\\delta_{3,2}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{3,1}\\\delta_{4,1}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=2,\, j=1\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{1,2}\\0\\\delta_{3,2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{3,2}\\\delta_{4,2}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=2,\, j=2\\
\begin{pmatrix}\delta_{1,1}\\\delta_{2,1}\\\delta_{3,1}\\\delta_{4,1}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{2,2}\\0\\\delta_{4,2}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{3,3}\\\delta_{4,3}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=2,\, j=3\\
\begin{pmatrix}\delta_{1,2}\\\delta_{2,2}\\\delta_{3,2}\\\delta_{4,2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{2,2}\\0\\\delta_{4,2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\delta_{3,4}\\\delta_{4,4}\\0\\0\end{pmatrix}, && \text{aus } i=2,\, j=4\\
\begin{pmatrix}\delta_{1,3}\\\delta_{2,3}\\\delta_{3,3}\\\delta_{4,3}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{1,3}\\0\\\delta_{3,3}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{1,1}\\\delta_{2,1}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=3,\, j=1\\
\begin{pmatrix}\delta_{1,4}\\\delta_{2,4}\\\delta_{3,4}\\\delta_{4,4}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{1,3}\\0\\\delta_{3,3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{1,2}\\\delta_{2,2}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=3,\, j=2\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{2,3}\\0\\\delta_{4,3}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{1,3}\\\delta_{2,3}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=3,\, j=3\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{2,3}\\0\\\delta_{4,3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{1,4}\\\delta_{2,4}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=3,\, j=4\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{1,4}\\0\\\delta_{3,4}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{3,1}\\\delta_{4,1}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=4,\, j=1\\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{1,4}\\0\\\delta_{3,4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{3,2}\\\delta_{4,2}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=4,\, j=2\\
\begin{pmatrix}\delta_{1,3}\\\delta_{2,3}\\\delta_{3,3}\\\delta_{4,3}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\delta_{2,4}\\0\\\delta_{4,4}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{3,3}\\\delta_{4,3}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=4,\, j=3\\
\begin{pmatrix}\delta_{1,4}\\\delta_{2,4}\\\delta_{3,4}\\\delta_{4,4}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\\delta_{2,4}\\0\\\delta_{4,4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\delta_{3,4}\\\delta_{4,4}\end{pmatrix}, && \text{aus } i=4,\, j=4
\end{aligned}
$$

Als Basis des Lösungsraums dieses homogenen linearen Gleichungssystems erhalten wir e.g.

$$
(e', f', h') \;:=\; \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
$$

Es wird $[e', f'] = 2h'$, $[h', e'] = -e'$ und $[h', f'] = f'$.

Auf der anderen Seite ist

$$(e, f, h) \;=\; \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right)$$

eine Basis von $\mathfrak{sl}_2(K)$. Es wird $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$.

Sei nun $\operatorname{char} K \neq 2$. Es ist e.g. die bijektive lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{sl}_2(K) & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{der}(K^{2\times 2}) \\ h & \longmapsto & 2h' \\ e & \longmapsto & -f' \\ f & \longmapsto & e' \end{array}$$

wegen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} [\varphi(e), \varphi(f)] & = & [-f', e'] & = & 2h' & = & \varphi(h) & = & \varphi([e, f]) \\ [\varphi(h), \varphi(e)] & = & [2h', -f'] & = & -2f' & = & \varphi(2e) & = & \varphi([h, e]) \\ [\varphi(h), \varphi(f)] & = & [2h', e'] & = & -2e' & = & \varphi(-2f) & = & \varphi([h, f]) \end{array}$$

ein Isomorphismus.

Aufgabe 3

Für $i,\, j \,\in\, [1, n]$ bezeichne $\mathrm{e}_{i,\,j} \in \mathfrak{gl}_n(K) = K^{n\times n}$ die Matrix, die an Position (i, j) den Eintrag 1 hat, und ansonsten Eintrag 0. Für $i,\, j,\, k,\, \ell \,\in\, [1, n]$ ist $\mathrm{e}_{i,\,j}\, \mathrm{e}_{k,\ell} = \partial_{j,k}\, \mathrm{e}_{i,\ell}$. Es folgt

$$[\mathrm{e}_{i,\,j}\,,\, \mathrm{e}_{k,\ell}] \;=\; \partial_{j,k}\, \mathrm{e}_{i,\ell} - \partial_{\ell,i}\, \mathrm{e}_{k,\,j}$$

Es ist

$$(\mathrm{e}_{i+1,\,i+1} - \mathrm{e}_{i,i} : i \in [1, n-1]) \sqcup (\mathrm{e}_{i,\,j} : i,\, j \,\in\, [1, n],\; i \neq j)$$

eine Basis von $\mathfrak{sl}_n(K)$.

(1) Ist $n \in \{0, 1\}$, so ist $\mathfrak{sl}_n(K)$ abelsch, und somit insbesondere nicht einfach.

(2) Sei $n \geqslant 2$. Da $[\mathrm{e}_{1,2}\,,\, \mathrm{e}_{2,1}] = \mathrm{e}_{1,2}\, \mathrm{e}_{2,1} - \mathrm{e}_{2,1}\, \mathrm{e}_{1,2} = \mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2} \neq 0$, ist $\mathfrak{sl}_n(K)$ nichtabelsch.

(3) Sei $n \geqslant 3$. Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{sl}_n(K)$. Gibt es $k,\, \ell \,\in\, [1, n]$ mit $k \neq \ell$ und $\mathrm{e}_{k,\ell} \in \mathfrak{a}$, so *behaupten wir,* daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_n(K)$ ist.

Ist $i \in [1, n] \smallsetminus \{k, \ell\}$, so ist $\mathfrak{a} \ni [\mathrm{e}_{i,k}\,,\, \mathrm{e}_{k,\ell}] = \mathrm{e}_{i,\ell}$. Also ist $\mathrm{e}_{i,\ell} \in \mathfrak{a}$ für $i \in [1, n] \smallsetminus \{\ell\}$. Ist nun $j \in [1, n] \smallsetminus \{i, \ell\}$, so ist $\mathfrak{a} \ni [\mathrm{e}_{i,\ell}\,,\, \mathrm{e}_{\ell,\,j}] = \mathrm{e}_{i,\,j}$. Also ist $\mathrm{e}_{i,\,j} \in \mathfrak{a}$ für $i \in [1, n] \smallsetminus \{\ell\}$ und $j \in [1, n]$, sofern $i \neq j$.

Mit dem hierzu transponierten Argument erhalten wir $\mathrm{e}_{i,\,j} \in \mathfrak{a}$ für $j \in [1, n] \smallsetminus \{k\}$ und $i \in [1, n]$, sofern $i \neq j$.

Somit ist also $\mathrm{e}_{i,\,j} \in \mathfrak{a}$ für $i,\, j \,\in\, [1, n]$ mit $i \neq j$ und $(i, j) \neq (\ell, k)$.

Wähle $m \in [1, n] \smallsetminus \{k, \ell\}$; möglich wegen $n \geqslant 3$. Es ist $\mathrm{e}_{m,\ell} \in \mathfrak{a}$ wegen $(m, \ell) \neq (\ell, k)$, und also, abermals mit dem eben gesehenen Argument, auch $\mathrm{e}_{\ell,k} \in \mathfrak{a}$, da $(\ell, k) \neq (\ell, m)$.

Insgesamt ist nun $\mathrm{e}_{i,\,j} \in \mathfrak{a}$ für $i,\, j \,\in\, [1, n]$ mit $i \neq j$ bekannt.

Schließlich ist $\mathfrak{a} \ni [\mathrm{e}_{i,\,j}\,,\, \mathrm{e}_{j,i}] = \mathrm{e}_{i,i} - \mathrm{e}_{j,\,j}$ für $i,\, j \,\in\, [1, n]$ mit $i \neq j$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

(4) Sei $n \geqslant 3$ und n kein Vielfaches von $\operatorname{char} K$. Wir *behaupten*, daß $\mathfrak{sl}_n(K)$ einfach ist.

Nach (2) genügt es zu zeigen, daß ein Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{sl}_n(K)$ bereits gleich $\mathfrak{sl}_n(K)$ ist.

Sei $a \in \mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$. Schreibe $a = (\alpha_{i,\,j})_{i,\,j} = \sum_{i,\,j} \alpha_{i,\,j}\, \mathrm{e}_{i,\,j}$.

Fall 1. Es gibt $k, \ell \in [1, n]$ mit $k \neq \ell$ und $\alpha_{k,\ell} \neq 0$.

Sei $m \in [1, n] \smallsetminus \{k, \ell\}$; möglich wegen $n \geqslant 3$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a} & \ni & [\mathrm{e}_{\ell,m}\,,\,[\mathrm{e}_{\ell,k}\,,\,[\mathrm{e}_{m,k}\,,\,a]]] \\ & = & [\mathrm{e}_{\ell,m}\,,\,[\mathrm{e}_{\ell,k}\,,\,\mathrm{e}_{m,k}\,a - a\,\mathrm{e}_{m,k}]] \\ & = & [\mathrm{e}_{\ell,m}\,,\,-\mathrm{e}_{\ell,k}\,a\,\mathrm{e}_{m,k} - \mathrm{e}_{m,k}\,a\,\mathrm{e}_{\ell,k}] \\ & = & -\mathrm{e}_{\ell,k}\,a\,\mathrm{e}_{\ell,k} \\ & = & -\alpha_{k,\ell}\,\mathrm{e}_{\ell,k}\,. \end{array}$$

Da $-\alpha_{k,\ell} \neq 0$, ist auch $\mathrm{e}_{\ell,k} \in \mathfrak{a}$. Dank (3) folgt nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_n(K)$.

Fall 2. Es ist $\alpha_{i,j} = 0$ für alle $i, j \in [1, n]$ mit $i \neq j$.

Es gibt $k, m \in [1, n]$ mit $\alpha_{k,k} \neq \alpha_{m,m}$ und, natürlich, $k \neq m$. Denn *wäre* dem nicht so, so wäre $\mathrm{tr}(a) = n\alpha_{1,1} \neq 0$, da $a \neq 0$ und da nach Voraussetzung $\mathrm{char}\, K$ kein Teiler von n ist, was $a \in \mathfrak{sl}_n(K)$ *widerspricht.*

Nun ist $\mathfrak{a} \ni [\mathrm{e}_{k,m}\,,\,a] = \sum_i \alpha_{i,i}[\mathrm{e}_{k,m}\,,\,\mathrm{e}_{i,i}] = (\alpha_{m,m} - \alpha_{k,k})\mathrm{e}_{k,m}$. Da $\alpha_{m,m} - \alpha_{k,k} \neq 0$, folgt $\mathrm{e}_{k,m} \in \mathfrak{a}$. Dank (3) folgt nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_n(K)$.

In beiden Fällen zeigt dies die *Behauptung.*

(5) Sei $n = 2$. Sei $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Wir *behaupten,* daß $\mathfrak{sl}_2(K)$ einfach ist.

Nach (2) genügt es zu zeigen, daß ein Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{sl}_2(K)$ bereits gleich $\mathfrak{sl}_2(K)$ ist.

Es hat $\mathfrak{sl}_2(K)$ die Basis $(\mathrm{e}_{1,2}\,,\,\mathrm{e}_{2,1}\,,\,\mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2})$.

Sei $a \in \mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$. Schreibe $a = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{smallmatrix}\right) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\,\mathrm{e}_{i,j}$.

Wir haben $\mathfrak{a} \ni [\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}-\alpha_{1,1} \\ 0 & -\alpha_{2,1} \end{smallmatrix}\right)$.

Genauso haben wir dann auch $\mathfrak{a} \ni [\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}-\alpha_{1,1} \\ 0 & -\alpha_{2,1} \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2\alpha_{2,1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Ferner haben wir $\mathfrak{a} \ni [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2}-\alpha_{1,1} \\ 0 & -\alpha_{2,1} \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2(\alpha_{2,2}-\alpha_{1,1}) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Fall $\alpha_{2,1} \neq 0$. Da $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2\alpha_{2,1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{a}$ und da $\mathrm{char}\, K \neq 2$, folgt $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{a}$.

Ferner ist $\mathfrak{a} \ni [\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Schließlich ist $\mathfrak{a} \ni [\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ woraus mit $\mathrm{char}\, K \neq 2$ auch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{a}$ folgt.

Zusammen zeigt dies $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_2(K)$.

Fall $\alpha_{1,2} \neq 0$. Transponiert zum vorigen Fall.

Fall $\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = 0$.

Es ist $\alpha_{1,1} \neq \alpha_{2,2}$. Denn *wäre* dem nicht so, so wäre $\mathrm{tr}(a) = 2\alpha_{1,1} \neq 0$, da $a \neq 0$ und da nach Voraussetzung $\mathrm{char}\, K \neq 2$, was $a \in \mathfrak{sl}_n(K)$ *widerspricht.*

Da $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2(\alpha_{2,2}-\alpha_{1,1}) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{a}$ und da $\mathrm{char}\, K \neq 2$, folgt $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{a}$. Wie im vorvorigen Fall folgt daraus $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_2(K)$.

In allen drei Fällen zeigt dies die *Behauptung.*

(6) Sei $n \geqslant 2$. Sei $\mathrm{char}\, K$ ein Teiler von n. Dann ist $0 \neq \mathrm{E}_n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{sl}_n(K)) \lhd \mathfrak{sl}_n(K)$, und also $\mathfrak{sl}_n(K)$ nicht einfach.

(7) *Ergebnis.* Es ist $\mathfrak{sl}_n(K)$ genau dann einfach, wenn $n \geqslant 2$ und n kein Vielfaches von $\mathrm{char}\, K$ ist.

Dies faßt $(1, 4, 5, 6)$ zusammen.

Aufgabe 4

(1) Wir verifizieren die Wohldefiniertheit der Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g}/\mathfrak{a} & \times & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} & \xrightarrow{[-,=]} & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \\ (g+\mathfrak{a} & , & h+\mathfrak{a}) & \longmapsto & [g+\mathfrak{a}, h+\mathfrak{a}] := [g,h]+\mathfrak{a}\ . \end{array}$$

Zu zeigen ist die Repräsentantenunabhängigkeit des Bildes. Sind also $g,\ g',\ h,\ h' \in \mathfrak{g}$ mit $g+\mathfrak{a} = g'+\mathfrak{a}$ und $h+\mathfrak{a} = h'+\mathfrak{a}$ gegeben, so wird

$$[g,h]-[g',h'] \;=\; [g-g',h]+[g',h-h'] \;\in\; \mathfrak{a}$$

und also $[g,h]+\mathfrak{a} = [g',h']+\mathfrak{a}$.

Die Bilinearität dieser Abbildung vererbt sich von $\mathfrak{g}$.

Für $g,\ h,\ k \in \mathfrak{g}$ wird

$$\begin{array}{rl} & [g+\mathfrak{a},[h+\mathfrak{a},k+\mathfrak{a}]]+[h+\mathfrak{a},[k+\mathfrak{a},g+\mathfrak{a}]]+[k+\mathfrak{a},[g+\mathfrak{a},h+\mathfrak{a}]] \\ = & [g,[h,k]]+[h,[k,g]]+[k,[g,h]]+\mathfrak{a} \\ = & 0 \end{array}$$

und

$$[g+\mathfrak{a},g+\mathfrak{a}] \;=\; [g,g]+\mathfrak{a} \;=\; 0\ ,$$

also ebenfalls von $\mathfrak{g}$ vererbt.

Somit ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ eine Liealgebra.

Ferner ist $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $g \longmapsto g+\mathfrak{a}$ ein Morphismus, da

$$\rho([g,h]) \;=\; [g,h]+\mathfrak{a} \;=\; [g+\mathfrak{a},h+\mathfrak{a}] \;=\; [\rho(g),\rho(h)]$$

für $g,\ h \in \mathfrak{g}$.

(2) (i) Die Aussage ist richtig.

Sind $g,\ g' \in \varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}})$, dann sind $\varphi(g),\ \varphi(g') \in \tilde{\mathfrak{h}}$, also $\varphi([g,g']) = [\varphi(g),\varphi(g')] \in \tilde{\mathfrak{h}}$ und folglich $[g,g'] \in \varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}})$. Also ist $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \leqslant \mathfrak{g}$.

Ist zudem $\tilde{\mathfrak{h}} \trianglelefteq \mathfrak{h}$, und sind $g \in \varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}})$ und $g' \in \mathfrak{g}$, dann ist $\varphi(g) \in \tilde{\mathfrak{h}}$, also $\varphi([g,g']) = [\varphi(g),\varphi(g')] \in \tilde{\mathfrak{h}}$ und folglich $[g,g'] \in \varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}})$. Also ist $\varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

(ii) Die Aussage ist insgesamt falsch.

Die erste Aussage ist richtig.

Sind $\tilde{g}_1\,,\ \tilde{g}_2 \in \tilde{\mathfrak{g}}$, dann ist $[\varphi(\tilde{g}_1),\varphi(\tilde{g}_2)] = \varphi([\,\tilde{g}_1\,,\,\tilde{g}_2\,]) \in \varphi(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Die zweite Aussage ist falsch.

Sei K ein Körper, z.B. $K = \mathbf{C}$. Sei $\mathfrak{a} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, sei $\mathfrak{g} := \left(\begin{smallmatrix} K & K \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right)$, beides als Teilalgebren von $\mathfrak{h} := \mathfrak{gl}_2(K)$ zu verstehen, und sei φ die Inklusionsabbildung von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{h}$. Es ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, aber es ist $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ kein Ideal von $\mathfrak{h}$, da z.B. $[\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \not\in \mathfrak{a}$.

(iii) Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel. Sei K ein Körper, z.B. $K = \mathbf{C}$. Sei

$$\mathfrak{g} \;:=\; \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \zeta \end{smallmatrix}\right) \;:\; \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta \in K \right\} \;\leqslant\; \mathfrak{gl}_3(K)\ ,$$

sei

$$\mathfrak{a} \;:=\; \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;:\; \beta,\ \gamma,\ \varepsilon \in K \right\} \;\trianglelefteq\; \mathfrak{g}$$

und sei

$$\tilde{\mathfrak{a}} \;:=\; \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;:\; \beta,\, \gamma \,\in\, K \} \;\trianglelefteqslant\; \mathfrak{a}$$

Beachte hierzu, daß

$$[\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & \varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \zeta \end{smallmatrix}\right)] \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & (\delta-\alpha)\beta' & \varepsilon\beta'+(\zeta-\alpha)\gamma'-\beta\varepsilon' \\ 0 & 0 & (\zeta-\delta)\varepsilon' \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;\in\; \mathfrak{a}\;,$$

für β', γ', ε', α, β, γ, δ, ε, $\zeta \,\in\, K$; insbesondere

$$[\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & \beta' \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \zeta \end{smallmatrix}\right)] \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & (\delta-\alpha)\beta' & \varepsilon\beta'+(\zeta-\alpha)\gamma'-\beta\beta' \\ 0 & 0 & (\zeta-\delta)\beta' \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\;,$$

was e.g. für $\delta = \alpha = 0$, $\beta' = \zeta = 1$ nicht in $\tilde{\mathfrak{a}}$ liegt; ferner insbesondere

$$[\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & 0 & \beta' \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)] \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \varepsilon\beta'-\beta\beta' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;\in\; \tilde{\mathfrak{a}},$$

Alternatives Gegenbeispiel, nur in Charakteristik 2, aber etwas kleiner ([6]). Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K = 2$, z.B. $K = \mathbf{F}_2$. Sei

$$\mathfrak{g} \;:=\; \mathfrak{gl}_2(K)\;,$$

sei

$$\mathfrak{a} \;:=\; \{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right) \;:\; \alpha,\, \beta \,\in\, K \}$$

und sei

$$\tilde{\mathfrak{a}} \;:=\; \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;:\; \beta \,\in\, K \} \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\;.$$

Es wird

$$[\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} \alpha\gamma+\beta\varepsilon & \alpha\delta+\beta\zeta \\ \alpha\varepsilon & \alpha\zeta \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} \gamma\alpha & \gamma\beta+\delta\alpha \\ \varepsilon\alpha & \varepsilon\beta+\zeta\alpha \end{smallmatrix}\right) \;=\; \beta \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & \zeta-\gamma \\ 0 & -\varepsilon \end{smallmatrix}\right) \;=\; \beta \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon & \zeta+\gamma \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right) \;\in\; \mathfrak{a}$$

für α, β, γ, δ, ε, $\zeta \,\in\, K$. Also ist $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Setzt man $\varepsilon = 0$ und $\zeta = \gamma$, so erkennt man, daß $\mathfrak{a}$ abelsch ist. Insbesondere ist $\tilde{\mathfrak{a}} \trianglelefteqslant \mathfrak{a}$.

Aber $\tilde{\mathfrak{a}} \ntrianglelefteq \mathfrak{g}$, da z.B. $[\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \notin \tilde{\mathfrak{a}}$; cf. (ii).

(iv) Die Aussage ist richtig.

Gebe es zum einen einen Morphismus $\bar{\varphi}$ mit $\bar{\varphi} \circ \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} = \varphi$. Dann ist $\varphi(\mathfrak{a}) = \bar{\varphi}(\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})) = \bar{\varphi}(0) = 0$, i.e. $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Kern}\varphi$.

Sei zum anderen $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Kern}\varphi$. Aus der Linearen Algebra wissen wir um die Existenz der linearen Abbildung $\bar{\varphi} : \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h}$, $g+\mathfrak{a} \longmapsto \varphi(g)$. Diese ist auch ein Morphismus von Liealgebren, da

$$\bar{\varphi}([g+\mathfrak{a}, g'+\mathfrak{a}]) \;=\; \bar{\varphi}([g,g']+\mathfrak{a}) \;=\; \varphi([g,g']) \;=\; [\varphi(g),\varphi(g')] \;=\; [\bar{\varphi}(g+\mathfrak{a}),\bar{\varphi}(g'+\mathfrak{a})]$$

für g, $g' \,\in\, \mathfrak{g}$. Ferner ist $(\bar{\varphi}\circ\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}})(g) = \bar{\varphi}(g+\mathfrak{a}) = \varphi(g)$ für $g \in \mathfrak{g}$ und also $\bar{\varphi}\circ\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} = \varphi$.

Da $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ surjektiv ist, ist diesenfalls $\bar{\varphi}$ durch $\bar{\varphi}\circ\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}} = \varphi$ auch eindeutig bestimmt.

(v) Die Aussage ist richtig.

Zunächst halten wir fest, daß $\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a} \trianglelefteqslant \tilde{\mathfrak{g}}$ ist. In der Tat ist für $a \,\in\, \tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a}$ und $g \,\in\, \tilde{\mathfrak{g}}$ auch $[a,g] \in \mathfrak{a}$, da $a \in \mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$, und $[a,g] \in \tilde{\mathfrak{g}}$, da a, $g \,\in\, \tilde{\mathfrak{g}}$.

Ferner halten wir fest, daß $\tilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{g}$ ist. Denn sind g, $g' \,\in\, \tilde{\mathfrak{g}}$ und a, $a' \,\in\, \mathfrak{a}$, so erhalten wir

$$[g+a, g'+a'] \;=\; \underbrace{[g,g']}_{\in\,\tilde{\mathfrak{g}}} + \underbrace{[a,g'] + [g,a'] + [a,a']}_{\in\,\mathfrak{a}} \;\in\; \tilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{a}\;.$$

[6] Dieses Gegenbeispiel kenne ich von Domenica Gusso und Tobias Walter.

Dazuhin folgt $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \tilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.

Aus der Linearen Algebra (oder aus (3), angewandt auf $\varphi = \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}|_{\tilde{\mathfrak{g}}}$) wissen wir um die Existenz der bijektiven linearen Abbildung $\tilde{\mathfrak{g}}/(\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a}) \longrightarrow (\tilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$, $g + (\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a}) \longmapsto g + \mathfrak{a}$. Diese ist auch ein Morphismus von Liealgebren, da

$$[g + (\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a}), g' + (\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a})] \;=\; [g, g'] + (\tilde{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a}) \quad\longmapsto\quad [g, g'] + \mathfrak{a} \;=\; [g + \mathfrak{a}, g' + \mathfrak{a}]$$

für $g,\, g' \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

(vi) Die Aussage ist richtig.

Sei $g \in \mathfrak{g}$. Sei $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Wir haben $[g, z] \overset{!}{\in} \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ zu zeigen. Zunächst ist $[g, z] \in \mathfrak{a}$ wegen $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Sei nun $a \in \mathfrak{a}$ gegeben. Wir haben $[a, [g, z]] \overset{!}{=} 0$ zu zeigen. In der Tat wird $[a, [g, z]] = [\underbrace{[a, g]}_{\in\,\mathfrak{a}}, z] + [g, \underbrace{[a, z]}_{=\,0}] = 0 + 0 = 0$.

(3) Aus (2.iv) folgt die Existenz des surjektiven Morphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}/\mathrm{Kern}\,\varphi & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \varphi(\mathfrak{g}) \\ g + \mathrm{Kern}\,\varphi & \longmapsto & \varphi(g) \end{array}$$

Dieser ist auch injektiv, wie aus der Linearen Algebra bekannt. Denn ist das Bild $\varphi(g)$ von $g + \mathrm{Kern}\,\varphi$ gleich 0, so ist $g \in \mathrm{Kern}\,\varphi$ und also bereits $g + \mathrm{Kern}\,\varphi = 0$.

(4) *Wohldefiniertheit* $\longmapsto$. Wir haben $\rho(\mathfrak{h}) \leqslant \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ zu zeigen. Es ist $\rho(\mathfrak{h})$ das Bild des Kompositums der Morphismen $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, also das Bild eines Morphismus, und als solches eine Teilalgebra im Zielbereich; cf. (2.ii).

Wohldefiniertheit $\longleftarrow\!\!\!\mid$. Aus (2.i) folgt $\rho^{-1}(\mathfrak{k}) \leqslant \mathfrak{g}$. Da $0 \subseteq \mathfrak{k}$, ist auch $\mathfrak{a} = \rho^{-1}(0) \subseteq \rho^{-1}(\mathfrak{k})$.

Kompositum wird $\mathrm{id}_{T_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}}$. Sei $\mathfrak{h} \in T_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ gegeben.

Es ist $\mathfrak{h} \leqslant \rho^{-1}(\rho(\mathfrak{h}))$.

Sei umgekehrt $g \in \rho^{-1}(\rho(\mathfrak{h}))$. Dann ist $\rho(g) \in \rho(\mathfrak{h})$, i.e. $g + \mathfrak{a} = h + \mathfrak{a}$ für ein $h \in \mathfrak{h}$. Es folgt $g = h + a$ für ein $a \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$, mithin $g \in \mathfrak{h}$.

Kompositum wird $\mathrm{id}_{T_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}}$. Dies folgt aus der Surjektivität von ρ.

Einschränken auf Ideale.

Ist $\mathfrak{k} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, dann ist dank (2.i) auch $\rho^{-1}(\mathfrak{k}) \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$.

Sei $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{h} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$. Wie haben $\rho(\mathfrak{h}) \overset{!}{\trianglelefteqslant} \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ zu zeigen. Sei $h \in \mathfrak{h}$. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Es wird

$$[g + \mathfrak{a}, \rho(h)] \;=\; [g + \mathfrak{a}, h + \mathfrak{a}] \;=\; [g, h] + \mathfrak{a} \;=\; \rho([g, h]) \;\in\; \rho(\mathfrak{h})\;,$$

da wegen $\mathfrak{h} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$ eben $[g, h] \in \mathfrak{h}$ liegt.

Aufgabe 5

(1) Wir zeigen $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V) \overset{!}{\leqslant} \mathfrak{g}$. Seien $g,\, g' \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V)$. Wir müssen zeigen, daß $[g, g'] \overset{!}{\in} \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(V)$ liegt. Sei $v \in V$. In der Tat wird

$$[[g, g'], v] \;=\; [g, \underbrace{[g', v]}_{\in V}] + [g', \underbrace{[v, g]}_{\in V}] \;\in\; V\;.$$

Es ist $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, da $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Es ist $\mathfrak{h} \trianglelefteqslant \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, wie man wie folgt erkennt. Sei $h \in \mathfrak{h}$. Sei $g \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Es wird $[h, g] = [g, -h] \in [g, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

(2) Wir zeigen $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(V) \overset{!}{\leqslant} \mathfrak{g}$. Seien $g,\, g' \in \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(V)$. Wir müssen zeigen, daß $[g,g'] \overset{!}{\in} \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(V)$ liegt. Sei $v \in V$. In der Tat wird

$$[[g,g'],v] \;=\; [g,\underbrace{[g',v]}_{=0}] + [g',\underbrace{[v,g]}_{=0}] \;=\; 0\,.$$

Eine dem Zentralisator ähnliche Konstruktion kennen wir schon aus Aufgabe 1.(2).

Aufgabe 6

Sei $g \in \mathfrak{g}$.

Halten wir zunächst fest, daß für $x,\, y \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)[x,y] \;=\; [g,[x,y]] \;=\; [[g,x],y] + [x,[g,y]] \;=\; [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)(x),y] + [x,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)(y)]$$

ist, und folglich $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$.

Nun wird

$$\begin{array}{rcl}
[d,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g](x) & = & (d \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g \circ d)(x) \\
& = & d([g,x]) - [g,d(x)] \\
& = & ([d(g),x] + [g,d(x)]) - [g,d(x)] \\
& = & [d(g),x] \\
& = & (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, d(g))(x)
\end{array}$$

für $x \in \mathfrak{g}$, und somit $[d,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g] = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, d(g)$. Also ist $[\mathfrak{Der}(\mathfrak{g}),\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})] \subseteq \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ und somit $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \trianglelefteqslant \mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$.

Aufgabe 7

(1) Da $\varphi(h)$ eine Derivation ist, gilt $[h,[n,n']] = [[h,n],n'] + [n,[h,n']]$ für $h \in \mathfrak{h}$ und $n,\, n' \in \mathfrak{n}$.
Da φ ein Morphismus von Liealgebren ist, gilt $[[h,h'],n] = [h,[h',n]] - [h',[h,n]]$.
Damit wird

$$[(n,h),(n,h)] \;=\; (\;[n,n] + [h,n] - [h,n]\;,\;\; [h,h]\;) \;=\; 0$$

und

$$\begin{array}{cl}
& [(n,h),[(n',h'),(n'',h'')]] \\
= & [(n,h),\;(\;[n',n''] + [h',n''] - [h'',n']\;,\;[h',h'']\;)\;] \\
= & (\;[n,[n',n''] + [h',n''] - [h'',n']] + [h,[n',n''] + [h',n''] - [h'',n']] - [[h',h''],n]\;,\;\;[h,[h',h'']]\;) \\
= & (\;[n,[n',n'']] + [n,[h',n'']] - [n,[h'',n']] + [h,[n',n'']] + [h,[h',n'']] - [h,[h'',n']] - [h',[h'',n]] + [h'',[h',n]]\;,\;\;[h,[h',h'']]\;) \\
= & (\;[n,[n',n'']] + [n,[h',n'']] - [n,[h'',n']] - [n'',[h,n']] + [n',[h,n'']] + [h,[h',n'']] - [h,[h'',n']] - [h',[h'',n]] + [h'',[h',n]]\;,\;\;[h,[h',h'']]\;)\;,
\end{array}$$

woraus

$$\begin{array}{cl}
& [(n,h),[(n',h'),(n'',h'')]] + [(n',h'),[(n'',h''),(n,h)]] + [(n'',h''),[(n,h),(n',h')]] \\
= & (\;[n,[n',n'']] + [n,[h',n'']] - [n,[h'',n']] - [n'',[h,n']] + [n',[h,n'']] + [h,[h',n'']] - [h,[h'',n']] - [h',[h'',n]] + [h'',[h',n]]\;,\;\;[h,[h',h'']]\;) \\
+ & (\;[n',[n'',n]] + [n',[h'',n]] - [n',[h,n'']] - [n,[h',n'']] + [n'',[h',n]] + [h',[h'',n]] - [h',[h,n'']] - [h'',[h,n']] + [h,[h'',n']]\;,\;\;[h',[h'',h]]\;) \\
+ & (\;[n'',[n,n']] + [n'',[h,n']] - [n'',[h',n]] - [n',[h'',n]] + [n,[h'',n']] + [h'',[h,n']] - [h'',[h',n]] - [h,[h',n'']] + [h',[h,n'']]\;,\;\;[h'',[h,h']]\;) \\
= & (\;[n,[n',n'']] + [n',[n'',n]] + [n'',[n,n']]\;,\;\;[h,[h',h'']] + [h',[h'',h]] + [h'',[h,h']]\;) \\
= & (0,0)
\end{array}$$

für $(n,h),\, (n',h'),\, (n'',h'') \in \mathfrak{n} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}$.
Ferner ist

$$[(0,h),(0,h')] \;=\; (\;[0,0] + [h,0] - [h',0]\;,\;\;[h,h']\;) \;=\; (0,[h,h']) \;\in\; \mathfrak{h}$$

für $h,\, h' \in \mathfrak{h}$. Somit ist $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{n} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}$.
Schließlich ist

$$[(n,h),(n',0)] \;=\; (\;[n,n'] + [h,n'] - [0,n]\;,\;\;[h,0]\;) \;=\; (\;[n,n'] + [h,n']\;,\;0\;) \;\in\; \mathfrak{n}$$

für $(n,h) \in \mathfrak{n} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}$ und $n' \in \mathfrak{n}$. Somit ist $\mathfrak{n} \trianglelefteqslant \mathfrak{n} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}$.

(2) Für $h \in \mathfrak{h}$ ist die Abbildung $\varphi_s(h) : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}$ durch

$$i((\varphi_s(h))(n)) \ := \ [s(h), i(n)] \ .$$

für $n \in \mathfrak{n}$ wohldefiniert, da $r([s(h), i(n)]) = [rs(h), ri(n)] = 0$, mithin $[s(h), i(n)] \in i(\mathfrak{n})$, und da i injektiv ist.

Sie ist linear (wie wir ausnahmsweise einmal nachrechnen wollen), da für $\lambda,\ \lambda' \in K$ und $n,\ n' \in \mathfrak{n}$ sich

$$\begin{array}{rcl} i((\varphi_s(h))(\lambda n + \lambda' n')) & = & [s(h), i(\lambda n + \lambda' n')] \\ & = & \lambda [s(h), i(n)] + \lambda' [s(h), i(n')] \\ & = & \lambda i((\varphi_s(h))(n)) + \lambda' i((\varphi_s(h))(n')) \\ & = & i(\lambda(\varphi_s(h))(n) + \lambda'(\varphi_s(h))(n)) \end{array}$$

ergibt und da i injektiv ist. Ferner ist $\varphi_s(h) \in \mathfrak{der}(\mathfrak{n})$, da für $n,\ n' \in \mathfrak{n}$

$$\begin{array}{rcl} i((\varphi_s(h))([n, n'])) & = & [s(h), i([n, n'])] \\ & = & [s(h), [i(n), i(n')]] \\ & = & [[s(h), i(n)], i(n')] + [i(n), [s(h), i(n')]] \\ & = & [i((\varphi_s(h))(n)), i(n')] + [i(n), i((\varphi_s(h))(n'))] \\ & = & i([(\varphi_s(h))(n), n'] + [n, (\varphi_s(h))(n')]) \end{array}$$

ist und da i injektiv ist.

Die Abbildung $\varphi_s : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{der}(\mathfrak{n}),\ h \longmapsto \varphi_s(h)$ ist linear, da sich für $\lambda,\ \lambda' \in K$ und $h,\ h' \in \mathfrak{n}$ bei $n \in \mathfrak{n}$

$$\begin{array}{rcl} i((\varphi_s(\lambda h + \lambda' h'))(n)) & = & [s(\lambda h + \lambda' h'), i(n)] \\ & = & \lambda [s(h), i(n)] + \lambda' [s(h'), i(n)] \\ & = & \lambda i((\varphi_s(h))(n)) + \lambda' i((\varphi_s(h'))(n)) \\ & = & i(\lambda(\varphi_s(h))(n) + \lambda'(\varphi_s(h'))(n)) \\ & = & i((\lambda \varphi_s(h) + \lambda' \varphi_s(h'))(n)) \end{array}$$

ergibt und da i injektiv ist. Ferner ist φ_s ein Morphismus von Liealgebren, da sich für $h,\ h' \in \mathfrak{h}$ bei $n \in \mathfrak{n}$

$$\begin{array}{rcl} i((\varphi_s([h, h']))(n)) & = & [s([h, h']), i(n)] \\ & = & [[s(h), s(h')], i(n)] \\ & = & [s(h), [s(h'), i(n)]] - [s(h'), [s(h), i(n)]] \\ & = & [s(h), i(\varphi_s(h')(n))] - [s(h'), i(\varphi_s(h)(n))] \\ & = & i(\varphi_s(h)(\varphi_s(h')(n))) - i(\varphi_s(h')(\varphi_s(h)(n))) \\ & = & i(\varphi_s(h)(\varphi_s(h')(n)) - \varphi_s(h')(\varphi_s(h)(n))) \\ & = & i([\varphi_s(h), \varphi_s(h')](n)) \end{array}$$

ergibt und da i injektiv ist.

Betrachte die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{n} \rtimes_{\varphi_s} \mathfrak{h} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{g} \\ (n, h) & \longmapsto & i(n) + s(h) \end{array}$$

Es ist f injektiv, da $i(n) + s(h) = 0$ auch $0 = r(i(n) + s(h)) = r(s(h)) = h$ und also $i(n) = 0$ und somit $n = 0$ nach sich zieht.

Es ist f surjektiv. Denn sei $g \in \mathfrak{g}$ gegeben. Es ist $r(g - s(r(g))) = 0$. Folglich gibt es ein $n \in \mathfrak{n}$ mit $i(n) = g - s(r(g))$. Es wird $f(n, r(g)) = i(n) + s(r(g)) = g$.

Es ist f ein Morphismus von Liealgebren. Denn für $(n, h),\ (n', h') \in \mathfrak{n} \rtimes_{\varphi_s} \mathfrak{h}$ erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} f([(n, h), (n', h')]) & = & f(\ [n, n'] + [h, n'] - [h', n]\ ,\ [h, h']\ ) \\ & = & i([n, n'] + [h, n'] - [h', n]) + s([h, h']) \\ & = & i([n, n']) + i([h, n']) - i([h', n]) + s([h, h']) \\ & = & i([n, n']) + i(\varphi_s(h)(n')) - i(\varphi_s(h')(n)) + s([h, h']) \\ & = & [i(n), i(n')] + [s(h), i(n')] + [i(n), s(h')] + [s(h), s(h')] \\ & = & [i(n) + s(h), i(n') + s(h')] \\ & = & [f(n, h), f(n', h')]\ . \end{array}$$

(3) Für $h \in \mathfrak{h}$ wird bei $n \in \mathfrak{n}$
$$\begin{array}{rcl} i((\varphi(h))(n)) & = & i([h,n]) \\ & = & ([h,n],0) \\ & = & [(0,h),(n,0)] \\ & = & [s(h),i(n)] \\ & = & i((\varphi_s(h))(n)) \;, \end{array}$$
was dank i injektiv dann $\varphi = \varphi_s$ zeigt.

Aufgabe 8

Ist $f_i(T) = 0$ für ein $i \in [1,n]$, so ist $f_j(T) \neq 0$ und $\deg f_j(T) = 0$ für alle $j \in [1,n] \smallsetminus \{i\}$. Wir können diesenfalls also $r(T) := r_i(T)$ wählen.

Sei im folgenden $f_i(T) \neq 0$ für alle $i \in [1,n]$ vorausgesetzt.

Wir führen eine Induktion über $n \geqslant 0$.

Fall $n \in \{0,1\}$. Ersichtlich.

Fall $n = 2$. O.E. $\deg f_1(T) \leqslant \deg f_2(T)$. Wir führen eine Induktion über $\deg f_1(T)$. Seien $u(T)$, $v(T) \in K[T]$ so, daß $f_2(T) = f_1(T)u(T) + v(T)$ mit $v(T) = 0$ oder ($v(T) \neq 0$ und $\deg v(T) < \deg f_1(T)$), wie man durch Polynomdivision erhält. Eine gemeinsame Nullstelle von $f_1(T)$ und von $v(T)$ wäre auch eine von $f_1(T)$ und $f_2(T)$, kann es also nicht geben.

Subfall $v(T) = 0$. Es ist $\deg f_1(T) = 0$, da sonst $v(T)$ und $f_1(T)$ eine gemeinsame Nullstelle hätten. Die Bedingung $r(T) \equiv_{f_1(T)} r_1(T)$ ist also leer, so daß wir $r(T) := r_2(T)$ setzen können.

Subfall $v(T) \neq 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $\tilde{r}(T) \in K[T]$ mit $\tilde{r}(T) \equiv_{f_1(T)} 0$ und $\tilde{r}(T) \equiv_{v(T)} 1$. Schreibe
$$\tilde{r}(T) \overset{1.}{=} a(T)f_1(T) \overset{2.}{=} b(T)v(T) + 1 \;=\; b(T)(f_2(T) - f_1(T)u(T)) + 1$$
für gewisse $a(T)$, $b(T) \in K[T]$, mithin
$$1 \;=\; (a(T) + u(T)b(T))f_1(T) - b(T)f_2(T) \;.$$
Setze $r(T) := -b(T)f_2(T)r_1(T) + (a(T) + u(T)b(T))f_1(T)r_2(T)$. Dann ist
$$\begin{array}{lllll} r(T) & \equiv_{f_1(T)} & -b(T)f_2(T)r_1(T) & \equiv_{f_1(T)} & r_1(T) \\ r(T) & \equiv_{f_2(T)} & (a(T) + u(T)b(T))f_1(T)r_2(T) & \equiv_{f_2(T)} & r_2(T) \;. \end{array}$$

Fall $n \geqslant 3$. Sei nach Induktionsvoraussetzung ein $\tilde{r}(T) \in K[T]$ so gefunden, daß $\tilde{r}(T) \equiv_{f_i(T)} r_i(T)$ ist für alle $i \in [1, n-1]$. Sei $\tilde{f}(T) := f_1(T) \cdots f_{n-1}(T)$. Es haben $\tilde{f}(T)$ und $f_n(T)$ keine gemeinsame Nullstelle. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $r(T) \in K[T]$ mit $r(T) \equiv_{\tilde{f}(T)} \tilde{r}(T)$ und $r(T) \equiv_{f_n(T)} r_n(T)$. Ersteres zieht $r(T) \equiv_{\tilde{f}(T)} \tilde{r}(T) \equiv_{f_i(T)} r_i(T)$ und somit $r(T) \equiv_{f_i(T)} r_i(T)$ für $i \in [1, n-1]$ nach sich.

Aufgabe 9

Seien $\mu_x(T)$, $\mu_y(T) \in K[T]$ die Minimalpolynome von x resp. y.

Beachte, daß $f \circ x^k = y^k \circ f$ für $k \geqslant 0$ und also $f \circ u(x) = u(y) \circ f$ für alle $u(T) \in K[T]$.

(1) Ist x halbeinfach, so hat $\mu_x(T)$ nur einfache Nullstellen. Es ist $0 = f \circ \mu_x(x) = \mu_x(y) \circ f$, wegen f surjektiv also $\mu_x(y) = 0$. Es folgt, daß $\mu_y(T)$ ein Teiler von $\mu_x(T)$ ist und somit seinerseits nur einfache Nullstellen hat. Also ist y halbeinfach.

(2) Ist y halbeinfach, so hat $\mu_y(T)$ nur einfache Nullstellen. Es ist $0 = \mu_y(y) \circ f = f \circ \mu_y(x)$, wegen f injektiv also $\mu_y(x) = 0$. Es folgt, daß $\mu_x(T)$ ein Teiler von $\mu_y(T)$ ist und somit seinerseits nur einfache Nullstellen hat. Also ist x halbeinfach.

(3) *Lösung.*

Wir schreiben $U := f(V)$.

Sei $\dot{f} : U \to W$ der Inklusionsmorphismus. Sei $\bar{f} := f|^U$. Es ist

$$f \;=\; \dot{f} \circ \bar{f}\,,$$

mit $\dot{f}$ injektiv und $\bar{f}$ surjektiv.

Es ist $y(U) = y(f(V)) = f(x(V)) \subseteq f(V) = U$. Also existiert $z := y|_U^U$. Es ist $\dot{f} \circ z = y \circ \dot{f}$ nach Konstruktion.

Ferner ist $z \circ \bar{f} = \bar{f} \circ x$, da $\dot{f} \circ z \circ \bar{f} = y \circ \dot{f} \circ \bar{f} = y \circ f = f \circ x = \dot{f} \circ \bar{f} \circ x$ und da $\dot{f}$ injektiv ist.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "x"'] & U \arrow[r, "\dot{f}"] \arrow[d, "z"] & W \arrow[d, "y"] \\
V \arrow[r, "\bar{f}"] & U \arrow[r, "\dot{f}"] & W
\end{tikzcd}$$

Können wir die Behauptung für den Fall einer injektiven linearen Abbildung und für den Fall einer surjektiven linearen Abbildung zeigen, so folgt

$$f \circ x_{\mathrm{gs}} \;=\; \dot{f} \circ \bar{f} \circ x_{\mathrm{gs}} \;=\; \dot{f} \circ z_{\mathrm{gs}} \circ \bar{f} \;=\; y_{\mathrm{gs}} \circ \dot{f} \circ \bar{f} \;=\; y_{\mathrm{gs}} \circ f\,.$$

Diese beiden Fälle müssen wir also noch abhandeln. Wir verwenden Lemma 22.

Fall: f injektiv.

Schreibe $y_{\mathrm{gs}} = a(y)$ und $y_{\mathrm{gn}} = b(y)$ mit $a(T),\, b(T) \in K[T]$, wobei $a(T) + b(T) = T$ und $a(0) = 0$ und $b(0) = 0$.

Es ist dann $y_{\mathrm{gs}} \circ f = a(y) \circ f = f \circ a(x)$, also $a(x)$ halbeinfach nach (1).

Sei $k \geqslant 0$ gewählt mit $(y_{\mathrm{gn}})^k = 0$. Es ist dann $0 = (y_{\mathrm{gn}})^k \circ f = b(y)^k \circ f = f \circ b(x)^k$, also $b(x)^k = 0$ wegen f injektiv, also $b(x)$ nilpotent.

Ferner ist $a(x) + b(x) = x$ wegen $a(T) + b(T) = T$. Schließlich ist $a(x) \circ b(x) = b(x) \circ a(x)$.

Folglich ist $(a(x), b(x)) = (x_{\mathrm{gs}}\,,\, x_{\mathrm{gn}})$. Wir erhalten

$$y_{\mathrm{gs}} \circ f \;=\; f \circ a(x) \;=\; f \circ x_{\mathrm{gs}}$$

und

$$y_{\mathrm{gn}} \circ f \;=\; y \circ f - y_{\mathrm{gs}} \circ f \;=\; f \circ x - f \circ x_{\mathrm{gs}} \;=\; f \circ x_{\mathrm{gn}}\,.$$

Fall: f surjektiv.

Schreibe $x_{\mathrm{gs}} = a(x)$ und $x_{\mathrm{gn}} = b(x)$ mit $a(T),\, b(T) \in K[T]$, wobei $a(T) + b(T) = T$ und $a(0) = 0$ und $b(0) = 0$.

Es ist dann $f \circ x_{\mathrm{gs}} = f \circ a(x) = a(y) \circ f$, also $a(y)$ halbeinfach nach (2).

Sei $k \geqslant 0$ gewählt mit $(x_{\mathrm{gn}})^k = 0$. Es ist dann $0 = f \circ (x_{\mathrm{gn}})^k = f \circ b(x)^k = b(y)^k \circ f$, also $b(y)^k = 0$ wegen f surjektiv, also $b(y)$ nilpotent.

Ferner ist $a(y) + b(y) = y$ wegen $a(T) + b(T) = T$. Schließlich ist $a(y) \circ b(y) = b(y) \circ a(y)$.

Folglich ist $(a(y), b(y)) = (y_{\mathrm{gs}}\,,\, y_{\mathrm{gn}})$. Wir erhalten

$$f \circ x_{\mathrm{gs}} \;=\; a(y) \circ f \;=\; y_{\mathrm{gs}} \circ f$$

und

$$f \circ x_{\mathrm{gn}} \;=\; f \circ x - f \circ x_{\mathrm{gs}} \;=\; y \circ f - y_{\mathrm{gs}} \circ f \;=\; y_{\mathrm{gn}} \circ f\ .$$

Alternative Lösung.

Sei $\Lambda \subseteq K$ die Menge der Eigenwerte von x.

Für $\mu \in K$ schreiben wir $\mathrm{H}_y(\mu) := \bigcup_{\beta \geqslant 0} \mathrm{Kern}\big((y-\mu)^\beta\big)$. Falls μ ein Eigenwert von y mit algebraischer Vielfachheit γ ist, ist $\mathrm{H}_y(\mu) = \mathrm{Kern}\big((y-\mu)^\gamma\big)$, wie aus der Linearen Algebra bekannt. Falls μ kein Eigenwert von y ist, ist $\mathrm{H}_y(\mu) = 0$.

Sei $\lambda \in \Lambda$. Wir *behaupten* $f(\mathrm{H}_x(\lambda)) \overset{!}{\subseteq} \mathrm{H}_y(\lambda)$. Sei α die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert von x. Sei $v \in \mathrm{H}_x(\lambda) = \mathrm{Kern}\,\big((x-\lambda)^\alpha\big)$. Es wird

$$(y-\lambda)^\alpha(f(v)) \;=\; f((x-\lambda)^\alpha(v)) \;=\; f(0) \;=\; 0\ .$$

Somit wird $f(v) \in \mathrm{Kern}\big((y-\lambda)^\alpha\big) \subseteq \mathrm{H}_y(\lambda)$ – dies auch, falls λ kein Eigenwert von y ist. Dies zeigt die *Behauptung.*

Wir *behaupten* $f \circ x_{\mathrm{gs}} = y_{\mathrm{gs}} \circ f$. Da $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{H}_x(\lambda)$, genügt es, für $\lambda \in \Lambda$ und $v \in \mathrm{H}_x(\lambda)$ zu zeigen, daß $f(x_{\mathrm{gs}}(v)) \overset{!}{=} y_{\mathrm{gs}}(f(v))$ ist.

Es ist $x_{\mathrm{gs}}(v) = \lambda v$; cf. Lemma 22.(3).

Da $f(v) \in \mathrm{H}_x(\lambda)$ dank vorstehender Behauptung, folgt $y_{\mathrm{gs}}(f(v)) = \lambda f(v)$ mit Lemma 22.(3), falls λ ein Eigenwert von y ist, und $y_{\mathrm{gs}}(f(v)) = 0 = \lambda f(v)$, falls nicht.

Jedenfalls wird

$$f(x_{\mathrm{gs}}(v)) \;=\; \lambda f(v) \;=\; y_{\mathrm{gs}}(f(v))\ .$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Nun folgt auch $f \circ x_{\mathrm{gn}} = f \circ x - f \circ x_{\mathrm{gs}} = y \circ f - y_{\mathrm{gs}} \circ f = y_{\mathrm{gn}} \circ f$.

Mit der alternativen Lösung folgt nun erneut (1), da aus $y_{\mathrm{gs}} \circ f = f \circ x_{\mathrm{gs}} = f \circ x = y \circ f$ und f surjektiv sich $y_{\mathrm{gs}} = y$ ergibt.

Mit der alternativen Lösung folgt nun erneut (2), da aus $f \circ x_{\mathrm{gs}} = y_{\mathrm{gs}} \circ f = y \circ f = f \circ x$ und f injektiv sich $x_{\mathrm{gs}} = x$ ergibt.

Aufgabe 10

(1) Induktion über $m \geqslant 0$. Für $m = 0$ ist die Bedingung leer.

Sei nun $m \geqslant 1$. Die Induktionsvoraussetzung gibt uns eine Basis $(v_1\,,\,\dots\,,\,v_n)$ von V mit

$$x_i v_k \;=\; \lambda_{k,i} v_k$$

mit geeigneten $\lambda_{k,i} \in K$ für $k \in [1,n]$ und $i \in [1, m-1]$. Schreibe $\lambda_k := (\lambda_{k,1}\,,\dots,\,\lambda_{k,m-1})$ für $k \in [1,n]$. Sei $\Lambda_{[1,m-1]} := \{\, \lambda_k \,:\, k \in [1,n] \,\}$.

Für $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{m-1}) \in \Lambda_{[1,m-1]}$ schreiben wir

$$\mathrm{E}(\mu) \;:=\; \{\, v \in V \,:\, x_i v = \mu_i v \text{ für } i \in [1, m-1] \,\}\ .$$

Es ist $v_k \in \mathrm{E}(\lambda_k)$ für $k \in [1,n]$, und also

$$\langle\, v_k \,:\, k \in [1,n],\ \lambda_k = \mu \,\rangle \;\subseteq\; \mathrm{E}(\mu)\ .$$

Sind umgekehrt $\alpha_k \in K$ gegeben für $k \in [1,n]$ mit $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathrm{E}(\mu)$ für ein $\mu \in \Lambda_{[1,m-1]}$, so ist

$$0 \;=\; (x_i - \mu_i\,\mathrm{id}_V)(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \;=\; (\lambda_{1,i} - \mu_i)\alpha_1 v_1 + \dots + (\lambda_{n,i} - \mu_i)\alpha_n v_n$$

für $i \in [1, m-1]$, und folglich $\alpha_k = 0$ für alle $k \in [1, n]$ mit $\lambda_k \neq \mu$. Somit ist auch

$$\langle\, v_k \;:\; k \in [1,n],\ \lambda_k = \mu \,\rangle \;\supseteq\; \mathrm{E}(\mu)\ .$$

Insgesamt ist

$$\langle\, v_k \;:\; k \in [1,n],\ \lambda_k = \mu \,\rangle \;=\; \mathrm{E}(\mu)\ .$$

für $\mu \in \Lambda_{[1,m-1]}$. Es folgt

$$V \;=\; \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{[1,m-1]}} \langle\, v_k \;:\; k \in [1,n],\ \lambda_k = \mu \,\rangle \;=\; \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{[1,m-1]}} \mathrm{E}(\mu)\ .$$

Für $\mu \in \Lambda_{[1,m-1]}$ und $v \in \mathrm{E}(\mu)$ ist nach Voraussetzung $x_i x_m v = x_m x_i v = \mu_i x_m v$ für $i \in [1, m-1]$, und also auch $x_m v \in \mathrm{E}(\mu)$.

Nach Aufgabe 9.(2) ist auch $x_m|_{\mathrm{E}(\mu)}^{\mathrm{E}(\mu)}$ halbeinfach. Somit finden wir eine Basis $(v_{\mu,1}, \ldots, v_{\mu,n_\mu})$ von $\mathrm{E}(\mu)$ mit

$$x_m v_{\mu,\ell} \;=\; \nu_\ell v_{\mu,\ell}$$

mit geeigneten $\nu_\ell \in K$ für $\ell \in [1, n_\mu]$. Ohnehin ist auch

$$x_i v_{\mu,\ell} \;=\; \mu_i v_{\mu,\ell}$$

für $i \in [1, m-1]$. Die zusammengesetzte Basis

$$\bigsqcup_{\mu \in \Lambda_{[1,m-1]}} (v_{\mu,1}, \ldots, v_{\mu,n_\mu})$$

von V liefert also das Gewünschte.

(2) Sei $(v_1\,, \ldots\,, v_n)$ eine Basis wie in (1), i.e. sei $x_i v_k = \lambda_{k,i} v_k$ für $i \in [1, m]$ und $k \in [1, n]$, wobei $\lambda_{k,i} \in K$. Seien $\alpha_i \in K$ für $i \in [1, m]$ gegeben. Es wird

$$(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) v_k \;=\; (\alpha_1 \lambda_{k,1} + \cdots + \alpha_m \lambda_{k,m}) v_k\ ,$$

und somit ist $(v_1\,, \ldots\,, v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren für $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$. Somit ist dieses Element von $\operatorname{End} V$ halbeinfach.

(3) Sei $V = K^{2\times 1}$. Sei $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und sei $z = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, geschrieben bezüglich der Standardbasis. Es sind y und z halbeinfach, da beide die zwei verschiedenen Eigenwerte 0 und 1 haben. Jedoch ist $y + z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ nicht halbeinfach, da nur der Eigenwert 1 auftritt und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die einzige diagonalisierbare Matrix mit ausschließlich dem Eigenwert 1 ist.

Aufgabe 11

Wir zeigen $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Ist $g \in \mathfrak{g}$ und $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, so ist $[x, g] \in \mathfrak{a}$ wegen $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ und $[x, g] \in \mathfrak{b}$ wegen $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$, also $[x, g] \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Wir zeigen $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Sei $a \in \mathfrak{a}$. Sei $b \in \mathfrak{b}$. Es ist $[a + b, g] = \underbrace{[a, g]}_{\in \mathfrak{a}} + \underbrace{[b, g]}_{\in \mathfrak{b}} \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Wir zeigen $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Sei $a \in \mathfrak{a}$. Sei $b \in \mathfrak{b}$. Es ist $[[a, b], g] = [a, \underbrace{[b, g]}_{\in \mathfrak{b}}] + [\underbrace{[a, g]}_{\in \mathfrak{a}}, b] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$. Also gilt dies auch für alle Linearkombinationen von solchen Elementen.

Es ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *im allgemeinen eine echte Teilmenge.* Sei hierzu e.g. $n \geqslant 3$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K)$. Es ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{gl}_n(K)$.

Wir *behaupten* $[\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)] \overset{!}{=} \mathfrak{sl}_n(K)$. Es ist $[\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)] \subseteq \mathfrak{sl}_n(K)$ (was für die gestellte Aufgabe auch schon genügen würde); cf. Beispiel 5.(1). Umgekehrt ist, in der Notation der Lösung zu Aufgabe 3,

$$[\mathrm{e}_{1,2}\,,\, \mathrm{e}_{2,2}] \;=\; \mathrm{e}_{1,2}\;.$$

Da $[\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)] \trianglelefteq \mathfrak{gl}_n(K)$, ist insbesondere $[\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)] \trianglelefteq \mathfrak{sl}_n(K)$. Da $n \geqslant 3$, zeigt nun Schritt (3) aus der Lösung zu Aufgabe 3, daß $[\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)] = \mathfrak{sl}_n(K)$ ist. Dies zeigt die *Behauptung.*

Folglich ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{sl}_n(K) \subset \mathfrak{gl}_n(K) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Aufgabe 12

(1) Wähle $\lambda \in K$ mit $\chi_g(\lambda) \neq 0$, möglich, da K unendlich ist. Dann ist $\tilde{g} := g - \lambda \mathrm{E}_n$ invertierbar. Wähle $\mu \in K$ mit $\chi_h(\mu) \neq 0$, möglich, da K unendlich ist. Dann ist $\tilde{h} := h - \mu \mathrm{E}_n$ invertierbar. Ferner ist $[\tilde{g}, \tilde{h}] = (g \cdot h - \lambda h - \mu g + \lambda\mu \mathrm{E}_n) - (h \cdot g - \lambda h - \mu g + \lambda \mu \mathrm{E}_n) = [g, h]$.

(2) O.E. ist $n \geqslant 2$.

Schreibe $\tilde{z} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $\tilde{a},\, \tilde{b} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$. Nach (1) dürfen wir $\tilde{a},\, \tilde{b} \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ annehmen. Schreibe $a := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{smallmatrix}\right)$ und $b := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -u\tilde{a}^{-1} \\ \tilde{a}^{-1}v & \tilde{b} \end{smallmatrix}\right)$. Dann wird

$$[a,b] \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -u\tilde{a}^{-1} \\ \tilde{a}^{-1}v & \tilde{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -u\tilde{a}^{-1} \\ \tilde{a}^{-1}v & \tilde{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & \tilde{a}\tilde{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -u \\ 0 & \tilde{b}\tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & \tilde{z} \end{pmatrix} \;=\; z\;.$$

(3) Es ist $n \geqslant 2$.

Annahme, die Aussage von (3) ist falsch. Dann ist $z = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \tilde{z} \end{smallmatrix}\right)$ mit $\tilde{z} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ und $\alpha \in K$. Denn hätte z an Position $(1,1)$ den Eintrag $\alpha \in K$ und an Position $(1,k)$ den Eintrag $\beta \in K \smallsetminus \{0\}$, dann hätte mit $s := -\alpha\beta^{-1}\mathrm{e}_{k,1} + \mathrm{E}_n$ die Matrix $s^{-1}zs$ an Position $(1,1)$ den Eintrag 0. Analog für die erste Spalte.

Falls $\tilde{z} \notin \langle \mathrm{E}_{n-1}\rangle$, dann hat mit Induktion über n o.E. $\tilde{z}$ an Position $(1,1)$ den Eintrag 0. Mit $s' := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathrm{E}_{n-2} \end{smallmatrix}\right)$ hat dann die Matrix $s'^{-1}zs'$ an Position $(1,1)$ den Eintrag 0. *Diesenfalls Widerspruch.*

Falls $\tilde{z} \in \langle \mathrm{E}_{n-1}\rangle$, dann schreiben wir $\tilde{z} = \mu \mathrm{E}_{n-1}$ für ein $\mu \in K$. Nach Voraussetzung ist $\mu \neq \alpha$. Mit $s'' := \mathrm{e}_{1,2} + \mathrm{E}_n$ hat $s''^{-1}zs''$ an Position $(1,2)$ den Eintrag $\alpha - \mu \neq 0$. Eine weitere Konjugation wie oben gesehen liefert dann an Position $(1,1)$ den Eintrag 0. *Diesenfalls Widerspruch.*

(4) Wir führen eine Induktion über $n \geqslant 1$. Im Falle $n = 1$ ergibt sich $0 = 0$.

Sei $n \geqslant 2$. Zu zeigen ist nur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \smallsetminus \{0\} \overset{!}{\subseteq} \{\, [g,h] \;:\; g,\, h \,\in\, \mathfrak{g}\,\}$.

Es ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}_n(K)$. Denn es ist $0 \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \trianglelefteq \mathfrak{sl}_n(K)$, da die Spur eines Kommutator verschwindet und da $[\,\mathrm{e}_{1,2}\,,\, \mathrm{e}_{2,1}\,] = \mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2} \neq 0$; cf. Aufgabe 11. Die behauptete Gleichheit folgt mit der Einfachheit von $\mathfrak{sl}_n(K)$; cf. Aufgabe 3 – hierfür geht $\operatorname{char} K = 0$ ein.

Sei $z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}_n(K)$ mit $z \neq 0$ gegeben. Dann ist $z \notin \langle \mathrm{E}_n \rangle$, da $\operatorname{char} K = 0$. Dank (3) hat z o.E. Eintrag 0 an Position $(1,1)$; beachte hierzu, daß $s^{-1}[g,h]s = [s^{-1}gs, s^{-1}hs]$ für $g,\, h \in \mathfrak{g}$ und $s \in \mathrm{GL}_n(K)$, so daß die rechte Seite unter Konjugation abgeschlossen ist. Also ist $z = \left(\begin{smallmatrix} 0 & u \\ v & \tilde{z} \end{smallmatrix}\right)$ mit $\tilde{z} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$. Es ist $0 = \operatorname{tr} z = \operatorname{tr} \tilde{z}$. Mit Induktion über n ist $\tilde{z}$ ein Kommutator. Dank (2) ist also z ein Kommutator.

Diese Argumentation stammt von William Kahan, *Only Commutators Have Trace Zero,* manuscript, `www.cs.berkeley.edu/~wkahan/MathH110/trace0.pdf`, 1999.

Ein Beispiel für eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ und Ideale $\mathfrak{a},\, \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ mit $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \supset \{\, [a,b] \;:\; a \in \mathfrak{a},\;\; b \in \mathfrak{b}\,\}$ ist mir nicht bekannt.

Aufgabe 13

Sei $n \geqslant 0$.

Schreibe für $k \in [0, n]$

$$\mathfrak{gl}_n^{\geqslant k}(K) \;:=\; \{\,(\alpha_{i,j})_{i,j} \in \mathfrak{gl}_n(K) \,:\, \alpha_{i,j} = 0 \text{ falls } j - i < k\,\}\,.$$

Somit sind nichtverschwindende Einträge einer Matrix in $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant k}(K)$ nur an den Positionen (i, j) mit $j-i \geqslant k$ zulässig. Etwa ist $\mathfrak{gl}_n^{>}(K) = \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)$ und $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant}(K) = \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)$. Ferner ist $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant n}(K) = 0$.

Für $k,\, \ell \geqslant 0$ und $x \in \mathfrak{gl}_n^{\geqslant k}(K)$ und $y \in \mathfrak{gl}_n^{\geqslant \ell}(K)$ sind $xy,\, yx \in \mathfrak{gl}_n^{\geqslant k+\ell}(K)$, und folglich auch

$$[x, y] \;\in\; \mathfrak{gl}_n^{\geqslant k+\ell}(K)\,.$$

(1) Wir *behaupten* $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)^{[k-1]} \subseteq \mathfrak{gl}_n^{\geqslant k}(K)$ für $k \geqslant 1$. Induktion über k. Für $k = 1$ haben wir Gleichheit. Sei nun $k \geqslant 2$. Wir erhalten

$$\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)^{[k-1]} \;=\; [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)^{[k-2]}, \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)] \;\subseteq\; [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant k-1}(K), \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)] \;\subseteq\; \mathfrak{gl}_n^{\geqslant k}(K)\,.$$

Dies zeigt die *Behauptung.* Insbesondere ist $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)^{[n-1]} = 0$, und somit $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)$ nilpotent.

Daher ist $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)$ auch auflösbar.

(2) Es ist $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)^{(1)} \subseteq \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)$, da die Diagonale eines Produktes oberer Dreiecksmatrizen nicht von der Reihenfolge der Faktoren abhängt. Nach (1) ist $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K)$ auflösbar. Also ist $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)^{(1)}$ auflösbar. Damit ist auch $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)$ auflösbar.

Wir *behaupten* $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K) \overset{!}{=} [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K), \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)]$. Hierzu ist nur $\overset{!}{\subseteq}$ zu zeigen. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{e}_{i,j} \in [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K), \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)]$ ist für $i,\, j \in [1, n]$ mit $j - i \geqslant 1$; cf. Lösung zu Aufgabe 3. In der Tat ist $\mathrm{e}_{i,j} = -[\mathrm{e}_{i,j}\,, \mathrm{e}_{i,i}] \in [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K), \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)]$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Wir *behaupten* $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K) \overset{!}{=} (\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K))^{[k]}$ für $k \geqslant 1$. Induktion über $k \geqslant 1$. Die Aussage gilt für $k = 1$, da $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K) = [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K), \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)] \subseteq \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)^{[1]}$ und $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K) \supseteq \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)^{[1]}$. Sei $k \geqslant 2$. Wir erhalten

$$\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K) \;=\; [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K), \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)] \;=\; [\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)^{[k-1]}, \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)] \;=\; \mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)^{[k]}\,.$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Da $n \geqslant 2$, ist nun $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 1}(K) \neq 0$ und mithin $\mathfrak{gl}_n^{\geqslant 0}(K)$ nicht nilpotent.

(3) Es ist

$$(e, f, h) \;=\; \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right) \;=\; \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$

eine Basis von $\mathfrak{sl}_2(K)$. Es wird $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e = 0$, $[h, f] = -2f = 0$. Cf. Lösung zu Aufgabe 2.

Es wird $\mathfrak{sl}_2(K)^{[1]} = \langle [e, f],\, [h, e],\, [h, f] \rangle = \langle h \rangle$.

Es wird $\mathfrak{sl}_2(K)^{[2]} = \langle [h, e],\, [h, f] \rangle = 0$.

Also ist $\mathfrak{sl}_2(K)$ nilpotent, und damit insbesondere auflösbar.

(4) Es ist $\mathrm{e}_{1,3} = [\mathrm{e}_{1,2}\,, \mathrm{e}_{2,3}] \in \mathfrak{sl}_3(K)^{(1)}$. Da $\mathfrak{sl}_3(K)^{(1)} \trianglelefteq \mathfrak{sl}_3(K)$, folgt mit Schritt (3) aus der Lösung zu Aufgabe 3, daß $\mathfrak{sl}_3(K)^{(1)} = \mathfrak{sl}_3(K)$ ist. Mithin ist $\mathfrak{sl}_3(K)$ nicht auflösbar und also auch nicht nilpotent.

Da $0 \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{sl}_3(K))$, ist $\mathfrak{sl}_3(K)$ nicht halbeinfach.

(5) Es ist die einfache Liealgebra $\mathfrak{sl}_2(K)$ eine Teilalgebra von $\mathfrak{gl}_2(K)$; cf. Aufgabe 3. Da $\mathfrak{sl}_2(K)$ einfach, und damit nicht auflösbar ist, ist auch $\mathfrak{gl}_2(K)$ nicht auflösbar; cf. Bemerkung 27.(2).

Da $0 \neq \mathfrak{gl}_2(K)^{(1)} \leqslant \mathfrak{sl}_2(K)$ ist nach Linearer Algebra und da das Ideal $\mathfrak{gl}_2(K)^{(1)}$ von $\mathfrak{gl}_2(K)$ daher auch ein Ideal in $\mathfrak{sl}_2(K)$ ist, folgt $\mathfrak{gl}_2(K)^{(1)} = \mathfrak{sl}_2(K)$.

Wir *behaupten,* daß alle Ideale von $\mathfrak{gl}_2(K)$ durch 0, $\langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(K))$, $\mathfrak{sl}_2(K)$ und $\mathfrak{gl}_2(K)$ gegeben sind.

Zunächst sind die aufgelisteten Teilräume durchweg Ideale: Aus der Linearen Algebra ist bekannt, daß eine Matrix, die mit allen Matrizen vertauscht, eine Skalarmatrix ist; in anderen Worten, daß $\langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle = \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(K))$ ist, und letzteres ist als Ideal bekannt. Ferner ist $\mathfrak{sl}_2(K) \trianglelefteq \mathfrak{gl}_2(K)$, cf. Beispiel 12.

Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{gl}_2(K)$. Sei *angenommen,* es ist $\mathfrak{a} \notin \{0,\ \langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle,\ \mathfrak{sl}_2(K),\ \mathfrak{gl}_2(K)\}$.

Da $\mathfrak{sl}_2(K)$ einfach ist, ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{sl}_2(K) = 0$ oder $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{sl}_2(K) = \mathfrak{sl}_2(K)$.

Wäre zweiteres der Fall, so wäre $\mathfrak{sl}_2(K) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{gl}_2(K)$, wegen Dimension also $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{sl}_2(K),\ \mathfrak{gl}_2(K)\}$, was nicht zutrifft. Also ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{sl}_2(K) = 0$.

Sei nun $a \in \mathfrak{a}$. Für $g \in \mathfrak{gl}_2(K)$ ist $[a, g] \in \mathfrak{gl}_2(K)^{(1)} = \mathfrak{sl}_2(K)$. Wegen $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{gl}_2(K)$ ist $[a, g] \in \mathfrak{a}$. Also ist $[a, g] \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{sl}_2(K) = 0$.

Somit ist $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_2(K)) = \langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Es folgt $\mathfrak{a} = \langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

Dies trifft aber nicht zu, und wir haben einen *Widerspruch.*

Man kann, sobald $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{sl}_2(K) = 0$ gefolgert wurde, auch folgendermaßen argumentieren.

Es ist $\dim \mathfrak{a} \leqslant 1$.

Da $\mathfrak{a} \neq 0$, folgt $\mathfrak{a} = \langle\left(\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right)\rangle$, wobei $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in K$ mit $\alpha + \delta \neq 0$.

1. Es ist $[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix}0&\beta\\-\gamma&0\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{a}$. Da $(\alpha, \delta) \neq (0, 0)$ folgt $\beta = \gamma = 0$.

2. Es ist $[\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&\delta\end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix}0&\delta-\alpha\\0&0\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{a}$, und also $\delta = \alpha$. Somit ist $\mathfrak{a} = \langle \mathrm{E}_2 \rangle$, was nicht der Fall ist.

Wir sind auch auf diese Weise bei einem *Widerspruch* angelangt.

Also sind alle Ideale von $\mathfrak{gl}_2(K)$ in $\{0,\ \langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle,\ \mathfrak{sl}_2(K),\ \mathfrak{gl}_2(K)\}$ enthalten. Dies zeigt die *Behauptung.*

Unter den gefundenen Idealen sind nur 0 und $\langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ auflösbar. Also ist $\mathfrak{rad}(\mathfrak{gl}_2(K)) = \langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

Aufgabe 14

Für $g \in \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)(\mathfrak{a}) = [g, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$. Somit existiert $\mathrm{ad}'(g) := \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)|_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}}$. Es ist $\mathrm{ad}' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ ein Morphismus von Liealgebren, da $\mathrm{ad}'([g, g'])(a) = [[g, g'], a] = [g, [g', a]] - [g', [g, a]] = [\mathrm{ad}'(g), \mathrm{ad}'(g')](a)$ für $g,\ g' \in \mathfrak{g}$ und $a \in \mathfrak{a}$; cf. Bemerkung 9.

Da $\mathfrak{g}$ nilpotent ist, ist nach Engel, Satz 40, für $g \in \mathfrak{g}$ der Endomorphismus $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)$ und also auch seine Einschränkung $\mathrm{ad}'(g) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)|_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}}$ nilpotent. Dank Lemma 37, angewandt auf $\mathrm{ad}'(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$, gibt es nun ein $a \in \mathfrak{a} \smallsetminus \{0\}$ mit $(\mathrm{ad}'(g))(a) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. In anderen Worten, es ist $[\mathfrak{g}, a] = 0$ und somit $a \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Insgesamt ist $0 \neq a \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Aufgabe 15

(1) Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ kein abelsches Ideal ungleich 0 enthält; cf. Bemerkung 32.

Sei ein abelsches Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ gegeben. Wir haben $\mathfrak{a} \overset{!}{=} 0$ zu zeigen.

Es ist $\pi_1 : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, $(g, h) \mapsto g$ ein surjektiver Morphismus von Liealgebren, da die Lieklammer auf $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ eintragsweise gebildet wird.

Es ist $\pi_2 : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, $(g, h) \mapsto h$ ein surjektiver Morphismus von Liealgebren, aus demselben Grund.

Es ist $\pi_1(\mathfrak{a})$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$, da für jedes $a \in \mathfrak{a}$ und jedes $g \in \mathfrak{g}$ sich $[g, \pi_1(a)] = [\pi_1((g, 0)), \pi_1(a)] = \pi_1([(g, 0), a]) \in \pi_1(\mathfrak{a})$ ergibt. Da $\mathfrak{a}$ abelsch ist, ist auch $\pi_1(\mathfrak{a})$ abelsch. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, ist $\pi_1(\mathfrak{a}) = 0$.

Genauso ist auch $\pi_2(\mathfrak{a}) = 0$.

Also gilt für jedes Element (a', a'') in $\mathfrak{a}$ sowohl $a' = \pi_1((a', a'')) = 0$ als auch $a'' = \pi_2((a', a'')) = 0$.

Somit ist in der Tat $\mathfrak{a} = 0$. ([7])

(2) Es ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \geqslant \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, da für $(z, w) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ und $(g, h) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ sich $[(z, w), (g, h)] = ([z, g], [w, h]) = (0, 0)$ ergibt.

Zu zeigen bleibt $\mathfrak{z}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \overset{!}{\leqslant} \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Sei $(g, h) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})$.

Zu zeigen ist $g \overset{!}{\in} \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und $h \overset{!}{\in} \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$.

Wir zeigen ersteres, zweiteres geht dann genauso.

Sei $x \in \mathfrak{g}$. Zu zeigen ist $[g, x] \overset{!}{=} 0$. Aber es wird $(0, 0) = [(g, h), (x, 0)] = ([g, x], [h, 0])$ und also $0 = [g, x]$.

Aufgabe 16

Schreibe $n := \dim V$.

(1) Die Aussage ist falsch. Denn es ist z.B. $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ nilpotent, da abelsch, enthält aber mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ein nicht nilpotentes Element.

Insbesondere läßt sich diese Teilalgebra $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ nicht durch Basiswechsel nach $\mathfrak{gl}_2^{>}(\mathbf{C})$ bringen. Cf. Lemma 39.

(2) Die Aussage ist richtig. Ist g nilpotent für alle $g \in \mathfrak{g}$, so nach Bemerkung 10 auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, g$, und also auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, g)|_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}}$. Daher ist $\mathfrak{g}$ nilpotent gemäß Engel, Satz 40.

(3) Die Aussage ist falsch. Denn es ist e.g. die Teilalgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ von $\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ einfach, und somit halbeinfach; cf. Aufgabe 3, Bemerkung 31.(2) Die darin enthaltene Teilalgebra $\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ ist hingegen abelsch und ungleich 0, und also nicht halbeinfach.

(4) Die Aussage ist falsch. Denn es ist e.g. die Teilalgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ von $\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ einfach, und somit halbeinfach; cf. Aufgabe 3, Bemerkung 31.(2). Das darin enthaltene Element $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist hingegen nilpotent und ungleich 0, und also nicht halbeinfach.

(5) Die Aussage ist falsch. Denn es ist e.g. jedes Element von $\mathfrak{g} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ halbeinfach, aber $\mathfrak{g}$ abelsch und ungleich 0, also nicht halbeinfach.

(6) Die Aussage ist falsch. Sei e.g. $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g} := \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$. Es ist $(g_{\mathrm{gs}}, g_{\mathrm{gn}}) = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$ und also $g_{\mathrm{gs}} \notin \mathfrak{g}$.

Cf. aber Lemma 69.

Aufgabe 17

(1) Die Aussage ist richtig.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Sei $W \subseteq V$ ein Teilraum. Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f(V) \subseteq W$. Dann ist $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(f|_W^W)$. Denn sei $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von W. Sei A die beschreibende Matrix von $f|_W^W$ bezüglich dieser Basis. Ergänze zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ von V. Die beschreibende Matrix von f bezüglich dieser Basis hat die Blockmatrixgestalt $\left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es wird $\mathrm{tr}\, f = \mathrm{tr} \left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}(f|_W^W)$.

[7]Diese Lösung kenne ich von Magnus Kuhn.

Seien $a, b \in \mathfrak{a}$. Es ist $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a)((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, b)(\mathfrak{g})) \subseteq (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a)(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Mit vorstehender Anmerkung, angewandt auf den Endomorphismus $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, b)$ von $\mathfrak{g}$, wird

$$\kappa_\mathfrak{a}(a,b) \;=\; \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_\mathfrak{a}\, a) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{a}\, b)\big) \;=\; \mathrm{tr}\big(((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, b))|_\mathfrak{a}^\mathfrak{a}\big) \;=\; \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, a) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, b)\big) \;=\; \kappa_\mathfrak{g}(a,b)\ .$$

Mithin ist $\kappa_\mathfrak{a} = \kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$.

(2) Die Aussage ist falsch.

Sei $\operatorname{char} K \neq 2$, e.g. $K = \mathbf{C}$.

Sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(K)$. Wir verwenden die Basis

$$(e,f,h) \;=\; \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathfrak{sl}_2(K)$. Es wird $[e,f] = h$, $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$; cf. Lösung zu Aufgabe 2.

Sei $\mathfrak{h} := \langle h \rangle \leqslant \mathfrak{g}$.

Da $\mathfrak{h}$ abelsch ist, ist $\mathrm{ad}_\mathfrak{h}\, h = 0$ für $h \in \mathfrak{h}$ und mithin $\kappa_\mathfrak{h} = 0$.

Aber es ist $\kappa_\mathfrak{g}(h,h) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h) \circ (\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, h)) = \mathrm{tr}(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 8$. Somit ist $\kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} \neq 0$.

Insbesondere ist $\kappa_\mathfrak{h} \neq \kappa_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

Aufgabe 18

(1) Als Basis von $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2^{\geqslant}(K)$ wählen wir $(u,v,w) := (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$.

Diesbezüglich wird $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Folglich wird die Grammatrix von $\kappa_\mathfrak{g}$ diesbezüglich zu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Es ist $[u,v] = 0$, $[u,w] = w$ und $[v,w] = -w$. Folglich ist $\mathfrak{g}^{(1)} = \langle w \rangle$.

Also ist $\kappa_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}) = \kappa_\mathfrak{g}(w, \mathfrak{g}) = 0$.

Dies ist im Einklang mit Cartan, Satz 50.(1); cf. Aufgabe 13.(2).

(3) Es ist $\operatorname{rad} \kappa_\mathfrak{g} = \langle u+v, w \rangle$, wie man der Grammatrix in (1) entnimmt. Es ist $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, da $\mathfrak{g}$ auflösbar ist; cf. Aufgabe 13.(2).

Aufgabe 19

(1) Die Aussage ist falsch.

Seien $g := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $h := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $k := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathfrak{gl}_3(\mathbf{C})$.

Diese Matrizen erhält man, wenn man glaubt, daß die im Hinweis gegebenen Werte eine Liealgebra definieren und darauf den adjungierten Morphismus in spe anwendet.

Es wird

$$[g,h] \;=\; h\ ,\quad [g,k] \;=\; \mathrm{i}k\ ,\quad [h,k] \;=\; 0$$

Also ist $\mathfrak{g} := \langle g,h,k \rangle \leqslant \mathfrak{gl}_3(\mathbf{C})$ eine dreidimensionale Teilalgebra.

Es ist $\mathfrak{g}^{[1]} = \langle h,k \rangle$. Es ist $\mathfrak{g}^{[2]} = \langle h,k \rangle$. Also ist $\mathfrak{g}$ nicht nilpotent.

Rechnen wir in der Basis (g, h, k), so erhalten wir

$$\begin{array}{lclclcl}
\kappa_{\mathfrak{g}}(g,g) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{i}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{i}\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0\\
\kappa_{\mathfrak{g}}(g,h) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{i}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0\\
\kappa_{\mathfrak{g}}(g,k) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, k)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{i}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0\\
\kappa_{\mathfrak{g}}(h,h) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0\\
\kappa_{\mathfrak{g}}(h,k) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, k)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0\\
\kappa_{\mathfrak{g}}(k,k) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, k)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, k)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0\,.
\end{array}$$

Folglich ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$.

Insbesondere ist nun $\mathrm{rad}\,\kappa_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ kein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{g}$. Cf. auch (2).
Dieses Beispiel kenne ich von Jeremy Henty.
Cf. auch Bemerkung 51.

(2) Die Aussage ist richtig.

Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ein nilpotentes Ideal.

Wir bemerken zunächst, daß $\mathfrak{a}^{[i]} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ist für $i \geqslant 0$; cf. Aufgabe 11, iteriert angewandt.

Wir wollen $\mathfrak{a} \leqslant \mathrm{rad}\,\kappa_{\mathfrak{g}}$ zeigen, also $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) \overset{!}{=} 0$.

Sei $a \in \mathfrak{a}$. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Wir haben $0 \overset{!}{=} \kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g))$ zu zeigen. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g)$ nilpotent ist.

Es genügt zu zeigen, daß für $x \in \mathfrak{g}$ und $i \geqslant 0$ sich $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g))^{i+1}(x) \in \mathfrak{a}^{[i]}$ ergibt.

Induktion nach $i \geqslant 0$.

Für $i = 0$ ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g))^{0+1}(x) = [a, [g, x]] \in \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{[0]}$, da $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.

Sei $i \geqslant 1$. Sei die Aussage für $i - 1$ bekannt. Wir schreiben $b := (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g))^{i}(x) \in \mathfrak{a}^{[i-1]}$.

Wir wollen die Aussage für i zeigen. Es wird $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(a) \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g))^{i+1}(x) \;=\; [a, [g, b]]$. Da mit b auch $[g, b]$ im Ideal $\mathfrak{a}^{[i-1]}$ von $\mathfrak{g}$ liegt, ist in der Tat $[a, [g, b]] \in \mathfrak{a}^{[i]}$.

(3) Die Aussage ist falsch.

Seien $g := \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $h := \left(\begin{smallmatrix}0&0\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ in $\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$. Es wird $[g, h] = h$. Also ist $\mathfrak{g} := \langle g, h\rangle \leqslant \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ eine zweidimensionale Teilalgebra.

Es ist $\mathfrak{g}^{(1)} = \langle h\rangle$, $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$ und somit $\mathfrak{g}$ auflösbar, i.e. $\mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Rechnen wir in der Basis (g, h), so erhalten wir

$$\begin{array}{lclclcl}
\kappa_{\mathfrak{g}}(g,g) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 1\\
\kappa_{\mathfrak{g}}(g,h) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, g)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0\\
\kappa_{\mathfrak{g}}(h,h) & = & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h)\big) & = & \mathrm{tr}\Big(\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\Big) & = & 0
\end{array}$$

Folglich ist die Grammatrix der Killingform gleich $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. Es folgt $\mathrm{rad}\,\kappa_{\mathfrak{g}} = \langle h\rangle$.

Insgesamt ist also $\langle h\rangle = \mathrm{rad}\,\kappa_{\mathfrak{g}} \vartriangleleft \mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Alternativ hierzu liefert auch Aufgabe 18.(3) ein Gegenbeispiel, aber ein etwas größeres.

(4) Die Aussage ist richtig.

Der Morphismus $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ hat den Kern $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h}$, welcher abelsch und also auflösbar ist. Ferner ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}/(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h})$; cf. Aufgabe 4.(3). Somit ist $\mathfrak{h}$ genau dann auflösbar, wenn $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ auflösbar ist. Dank Lemma 49 ist dies genau dann der Fall, wenn

$$0 \;=\; \mathrm{tr}((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{h}) \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{h})^{(1)}) \;=\; \mathrm{tr}((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{h}) \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^{(1)}))) \;=\; \kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{(1)})$$

ist.

Direkt Cartan, Satz 50.(1), zu verwenden, ist wohl nicht möglich; cf. Aufgabe 17.(2).

(5) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$. Sei $\mathfrak{h} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Es ist $\mathfrak{h}^{\perp} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$; cf. Beispiel 52. Sodann zeigt $[\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, daß $\mathfrak{h}^{\perp}$ keine Teilalgebra ist.

Aufgabe 20

Beweis mit Lemma 48*, daß x nilpotent ist.*

Wir verwenden die Bezeichnungen von loc. cit. Ist $A = B = 0$ (oder $A = B = \mathfrak{gl}(V)$), so ist $N = \mathfrak{gl}(V)$. Also genügt es gemäß loc. cit. für ein $x \in N = \mathfrak{gl}(V)$, daß $\mathrm{tr}(x \circ w) = 0$ ist für alle $w \in N = \mathfrak{gl}(V)$, um auf x nilpotent schließen zu können.

Beweis ohne Lemma 48*, daß $x = 0$ ist.*

Sei $n := \dim V$. Wählen wir eine Basis von V und betrachten die beschreibenden Matrizen, so haben wir zu zeigen, daß für eine Matrix $X = (x_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$, für welche $\mathrm{tr}(X \cdot W) = 0$ ist für alle $W \in K^{n\times n}$, auch $X = 0$ gilt.

Seien $k, \ell \in [1, n]$. Wir wollen $x_{k,\ell} \overset{!}{=} 0$ zeigen.

Sei $W := \mathrm{e}_{\ell,k} = (\partial_{i,\ell} \cdot \partial_{j,k})_{i,j}$. Es ist $X \cdot W$ eine Matrix, die an Position (i, i) den Eintrag

$$\sum_{j\in[1,n]} x_{i,j} \cdot \partial_{j,\ell} \cdot \partial_{i,k} \;=\; x_{i,\ell} \cdot \cdot \partial_{i,k}$$

und also die Spur

$$0 \;=\; \mathrm{tr}(X \cdot W) \;=\; \sum_{i\in[1,n]} x_{i,\ell} \cdot \cdot \partial_{i,k} \;=\; x_{k,\ell}$$

hat.

Aufgabe 21

Zerlege $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$ mit $m \geqslant 0$ und $\mathfrak{h}_i$ einfaches Ideal für $i \in [1, m]$; cf. Lemma 53.(1). Es wird $\mathfrak{g}^{(1)} = (\mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m)^{(1)} = \mathfrak{h}_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m^{(1)} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m = \mathfrak{g}$.

Aufgabe 22

Betrachte $f : V \longrightarrow V^*$, $v \longmapsto b(v, -)$. Schreibe $W \xrightarrow{i} V$ für die Einbettungsabbildung. Da $b|_{W\times W}$ nichtausgeartet ist, ist $g := i^* \circ f \circ i : W \longrightarrow W^*$, $w \longmapsto b(w, -)|_W \;=\; (b|_{W\times W})(w, -)$ bijektiv. Da $(i^* \circ f) \circ (i \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_{W^*}$, folgt $V = \mathrm{Im}(i \circ g^{-1}) \oplus \mathrm{Kern}(i^* \circ f) = W \oplus W^{\perp}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V^* \arrow[d, "i^*"] \\ W \arrow[u, "i"] \arrow[r, "g", "\sim"'] & W^* \end{tikzcd}$$

Aufgabe 23

(1) Nach Cartan, Satz 50.(4), ist $\kappa_{\mathfrak{b}}$ nichtausgeartet. Nach Aufgabe 17.(1) ist $\kappa_{\mathfrak{b}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}}$. Also ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^\perp$; cf. Aufgabe 22.

(2) Es ist $\mathfrak{b}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$, cf. Bemerkung 47.(2). Schreibe $\mathfrak{c} := \mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}^\perp$. Es ist $\kappa_{\mathfrak{c}} = \kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}} = 0$; cf. Aufgabe 15.(1). Also ist $\mathfrak{c}$ auflösbar, also $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, i.e. $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}^\perp = 0$; cf. Cartan, Satz 50.(1), und Bemerkung 28. Da $\kappa_{\mathfrak{g}}$ nichtausgeartet ist nach Cartan, Satz 50.(4), ist $\dim\mathfrak{b} + \dim\mathfrak{b}^\perp = \dim\mathfrak{g}$. Insgesamt ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^\perp$.

> Ohne ausdrückliches Verbot hätte man auch mit (1) argumentieren können, da nach Lemma 53.(2) aus $\mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ folgt, daß $\mathfrak{b}$ halbeinfach ist. Dies würde aber verhindern, daß wir (2) zum Beweis von Lemma 53 heranziehen können.

(3) Sei $a \in \mathfrak{a}$ und $g \in \mathfrak{g}$. Wir haben $[a, g] \overset{!}{\in} \mathfrak{a}$ zu zeigen. Mit (2) ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^\perp$, wobei $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}^\perp \trianglelefteq \mathfrak{g}$; cf. Bemerkung 47.(2). Schreibe $g = b + c$ mit $b \in \mathfrak{b}$ und $c \in \mathfrak{b}^\perp$. Da $a \in \mathfrak{b}$ und $c \in \mathfrak{b}^\perp$, ist $[a, c] \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^\perp = 0$; cf. auch Bemerkung 15.(1). Es folgt $[a, g] = [a, b + c] = [a, b] \in \mathfrak{a}$, letzteres, da $a \in \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{b}$.

> Vgl. auch Aufgabe 4.(2.iii).
>
> Ohne ausdrückliches Verbot hätte man mit Lemma 53.(2) auch $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in[1,m]} \mathfrak{h}_i$ schreiben können für ein $m \geqslant 0$ und einfache Ideale $\mathfrak{h}_i$, ferner $\mathfrak{b} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{h}_i$ für eine Teilmenge $I \subseteq [1, m]$ und schließlich, abermals mit Lemma 53.(2), $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i\in J} \mathfrak{h}_i$ für eine Teilmenge $J \subseteq I$, woraus auch $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ folgt. Dies würde aber verhindern, daß wir (3) zum Beweis von Lemma 53 heranziehen können.

Aufgabe 24

Es ist $\mathfrak{gl}(V) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathfrak{gl}_1(K)$ ein Morphismus; cf. Beispiel 7.(1). Zu zeigen ist $\mathrm{tr}\circ\varphi \overset{!}{=} 0$, da dies gerade $\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \operatorname{Kern}\mathrm{tr} = \mathfrak{sl}(V)$ besagt. Mit $\mathfrak{g}$ ist aber auch $(\mathrm{tr}\circ\varphi)(\mathfrak{g})$ halbeinfach; cf. Lemma 53.(2), Aufgabe 4.(3). Die einzigen Teilalgebren von $\mathfrak{gl}_1(K)$ sind aber 0 und $\mathfrak{gl}_1(K)$. Unter diesen ist nur 0 halbeinfach, da $\mathfrak{rad}(\mathfrak{gl}_1(K)) = \mathfrak{gl}_1(K) \neq 0$. Also ist $(\mathrm{tr}\circ\varphi)(\mathfrak{g}) = 0$.

Alternativ kann man auch mit Aufgabe 21 argumentieren, daß $\varphi(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{g}^{(1)}) = (\varphi(\mathfrak{g}))^{(1)} \leqslant \mathfrak{gl}(V)^{(1)} = \mathfrak{sl}(V)$; cf. Bemerkung 24.(1), Lösung zu Aufgabe 11.

Aufgabe 25

(1) Für $g \in \mathfrak{g}$ ist $\varphi''(g) : M/M' \longrightarrow M/M'$, $m + M' \longmapsto [g, m] + M'$ wohldefiniert, da für m, $\tilde{m} \in M$ mit $m + M' = \tilde{m} + M'$, i.e. mit $m - \tilde{m} \in M'$, auch $[g, m] - [g, \tilde{m}] = [g, m - \tilde{m}] \in [\mathfrak{g}, M'] \subseteq M'$ ist, und also $[g, m] + M' = [g, \tilde{m}] + M'$. Es ist $\varphi''(g)$ eine lineare Abbildung.

Es ist φ'' eine lineare Abbildung.

Zeigen wir, daß φ'' ein Morphismus von Liealgebren ist. Seien g, $g' \in \mathfrak{g}$ gegeben. Zum einen wird

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi''([g,g']) & : & M/M' & \longrightarrow & M/M' \\ & & m + M' & \longmapsto & [[g,g'],m] + M' \;=\; [g,[g',m]] - [g',[g,m]] + M' , \end{array}$$

zum anderen wird

$$\begin{array}{rcrcl} [\varphi''(g), \varphi''(g')] & : & M/M' & \longrightarrow & M/M' \\ & & m + M' & \longmapsto & \varphi''(g)(\varphi''(g')(m + M')) - \varphi''(g')(\varphi''(g)(m + M')) \\ & & & = & ([g,[g',m]] + M') - ([g',[g,m]] + M') , \end{array}$$

was dasselbe ist.

Schließlich ist $[g, m + M'] = (\varphi''(g))(m + M') = [g, m] + M'$ für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$.

(2) Sei $g \in \mathfrak{g}$ und $n \in N$. Es wird

$$f^{-1}([g,n]) \;=\; f^{-1}([g, ff^{-1}(n)]) \;=\; f^{-1}f([g, f^{-1}(n)]) \;=\; [g, f^{-1}(n)]\;.$$

(3) Es ist $\operatorname{Kern} f \subseteq M$ ein Teilmodul, da für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in \operatorname{Kern} f$ auch $f([g,m]) = [g, f(m)] = [g,0] = 0$ ist, i.e. $[g,m] \in \operatorname{Kern} f$, und somit $[\mathfrak{g}, \operatorname{Kern} f] \subseteq \operatorname{Kern} f$.

Es ist $\operatorname{Im} f \subseteq N$ ein Teilmodul, da für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$ auch $[g, f(m)] = f([g,m]) \in \operatorname{Im} f$ ist, und somit $[\mathfrak{g}, \operatorname{Im} f] \subseteq \operatorname{Im} f$.

Aus der Linearen Algebra ist die Existenz der bijektiven linearen Abbildung $M/\operatorname{Kern} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$, $m + \operatorname{Kern} f \longmapsto f(m)$ bekannt. Zu zeigen bleibt die $\mathfrak{g}$-Linearität. Sei $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$. Wir erhalten

$$[g, m + \operatorname{Kern} f] \;=\; [g,m] + \operatorname{Kern} f \;\longmapsto\; f([g,m]) = [g, f(m)]\;.$$

(4) Sei zum einen $\mathfrak{g}$ einfach als $\mathfrak{g}$-Modul. Da $\mathfrak{g}$ als nichtabelsch vorausgesetzt wurde, bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{g}$ nur die Ideale 0 und $\mathfrak{g}$ enthält. Sei ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteqslant \mathfrak{g}$ gegeben. Die Idealeigenschaft besagt, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$. Somit ist $\mathfrak{a}$ ein Teilmodul. Also ist $\mathfrak{a} = 0$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

Sei zum anderen $\mathfrak{g}$ einfach als Liealgebra. Da $\mathfrak{g}$ nichtabelsch ist, ist $\mathfrak{g} \neq 0$. Bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{g}$ nur die Teilmoduln 0 und $\mathfrak{g}$ enthält. Sei $M \subseteq \mathfrak{g}$ ein Teilmodul. Die Teilmoduleigenschaft besagt, daß $[\mathfrak{g}, M] \subseteq M$ ist. Also ist M ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Also ist $M = 0$ oder $M = \mathfrak{g}$.

(5) Sei zum einen M halbeinfach. Schreibe $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$ mit $k \geqslant 0$ und einfachen Teilmoduln N_i für $i \in [1,k]$. Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Sei M'' von maximaler Dimension in

$$\{\, X \subseteq M \;:\; X \text{ ist Teilmodul, } M' \cap X = 0 \,\}\;;$$

diese Wahl ist möglich, da diese Menge den Nullmodul enthält und also nichtleer ist. Wir haben $M \overset{!}{=} M' \oplus M''$ zu zeigen. Die Direktheit der Summe folgt aus der Wahl von M''. *Annahme,* $M' \oplus M'' \subset M$. Dann gibt es ein $i \in [1,k]$ mit $N_i \not\subseteq M' \oplus M''$. Es ist $N_i \cap (M' \oplus M'')$ ein Teilmodul von N_i ungleich N_i, da allgemein der Schnitt zweier Teilmoduln ein Teilmodul ist. Da N_i einfach ist, folgt $N_i \cap (M' \oplus M'') = 0$, i.e. wir haben die direkte Summe $N_i \oplus M' \oplus M''$. Insbesondere ist $M' \cap (N_i \oplus M'') = 0$, im *Widerspruch* zur Wahl von M''.

Gebe es zum anderen für jeden Teilmodul $M' \subseteq M$ einen Teilmodul $M'' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus M''$. Sei $k \geqslant 0$ maximal mit der Eigenschaft, daß es einfache Teilmoduln $N_i \subseteq M$ für $i \in [1,k]$ gibt mit $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \subseteq M$. Solche Teilmoduln N_i wählen wir. Sei $M'' \subseteq M$ ein Teilmodul mit $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus M'' = M$, möglich, da allgemein die Summe von Teilmoduln wieder ein Teilmodul ist. *Annahme,* es ist $M'' \neq 0$. Sei $N_{k+1} \subseteq M''$ ein Teilmodul ungleich 0 minimaler Dimension. Dann ist N_{k+1} einfach und $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus N_{k+1} \subseteq M$, im *Widerspruch* zur Maximalität von k. Also ist $M'' = 0$, i.e. $N_1 \oplus \cdots \oplus N_k = M$.

(6) Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Dann ist $f - \lambda$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung. Also ist $\mathrm{E}_f(\lambda) = \operatorname{Kern}(f - \lambda) \subseteq M$ ein Teilmodul. Da $\mathrm{E}_f(\lambda) \neq 0$ und da M einfach ist, folgt $\mathrm{E}_f(\lambda) = \operatorname{Kern}(f - \lambda) = M$, i.e. $f = \lambda$.

(7) Wir haben zu zeigen, daß die lineare Abbildung $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(M)$, $g \longmapsto [g, -]$ ein Morphismus von Liealgebren ist. In der Tat wird für $g,\ g' \in \mathfrak{g}$

$$\begin{array}{rcl}
[[g,g'],f](m) & = & [[g,g'],f(m)] - f([[g,g'],m]) \\
& = & [g,[g',f(m)]] - [g',[g,f(m)]] - f([g,[g',m]] - [g',[g,m]]) \\
& = & \quad [g,([g',f(m)] - f([g',m]))] - [g',f([g,m])] + f([g',[g,m]]) \\
& & -[g',([g,f(m)] - f([g,m]))] + [g,f([g',m])] - f([g,[g',m]]) \\
& = & [g,[g',f](m)] - [g',f]([g,m]) - [g',[g,f](m)] + [g,f]([g',m]) \\
& = & [g,[g',f]](m) - [g',[g,f]](m)
\end{array}$$

für $f \in \operatorname{Hom}(M,N)$ und $m \in M$, also $[[g,g'],f] = [g,[g',f]] - [g',[g,f]]$ für $f \in \operatorname{Hom}(M,N)$, also $[[g,g'],-] = [g,-] \circ [g',-] - [g',-] \circ [g,-] = [[g,-],[g',-]]$, wie verlangt.

(8) Es ist $e : M \to M^{**}$ eine bijektive lineare Abbildung.

Seien $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$ gegeben. Wir haben $[g, e(m)] \overset{!}{=} e([g, m])$ zu zeigen.

Sei $f \in M^*$ gegeben. Es wird $[g, e(m)](f) = -(e(m))([g, f]) = -[g, f](m) = f([g, m]) = (e([g, m]))(f)$.

Aufgabe 26

(1) Sei $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$. Sei $g \in \mathfrak{g}$. Wir haben $[g, [a, m]] \overset{!}{\in} [\mathfrak{a}, M]$ zu zeigen. In der Tat wird $[g, [a, m]] = [\underbrace{[g, a]}_{\in \mathfrak{a}}, m] + [a, \underbrace{[g, m]}_{\in M}] \in [\mathfrak{a}, M]$.

(2) Schreibe $s := \dim M \geqslant 1$. Nach Lemma 42, angewandt auf die nach Bemerkung 27.(1) auflösbare Liealgebra $\varphi(\mathfrak{g}) \leqslant \mathfrak{gl}(M)$, gibt es so eine Basis $(m_1, \dots, m_s)$ von M, daß

$$[g, m_i] \;\in\; \langle\, m_j \,:\, j \in [1, i] \,\rangle$$

ist für $g \in \mathfrak{g}$ und $i \in [1, s]$.

Für den zugehörigen Isomorphismus $\psi : \mathfrak{gl}(M) \overset{\sim}{\to} \mathfrak{gl}_s(K)$ ist also $\psi(\varphi(\mathfrak{g})) \leqslant \mathfrak{gl}_s^{\leqslant}(K)$. Folglich ist $\psi(\varphi(\mathfrak{g}^{(1)})) = \psi(\varphi(\mathfrak{g}))^{(1)} \leqslant \mathfrak{gl}_s^{\leqslant}(K)^{(1)} = \mathfrak{gl}_s^{<}(K)$; cf. Bemerkung 24.(1), Lösung zu Aufgabe 13.(2).

Also ist

$$[g, m_i] \;\in\; \langle\, m_j \,:\, j \in [1, i-1] \,\rangle$$

für $g \in \mathfrak{g}^{(1)}$ und $i \in [1, s]$.

Insbesondere ist $m_s \in M \smallsetminus [\mathfrak{g}^{(1)}, M]$.

(3) Nach (2) ist $[\mathfrak{g}^{(1)}, M] \subset M$. Nach (1) gibt die Einfachheit von M also $[\mathfrak{g}^{(1)}, M] = 0$, i.e. $\varphi(\mathfrak{g}^{(1)}) = 0$. Somit haben wir die Faktorisierung

$$(\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{gl}(M)) \;=\; (\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)} \xrightarrow{\bar\varphi} \mathfrak{gl}(M))\,,$$

wobei $\bar\varphi(g + \mathfrak{g}^{(1)}) = \varphi(g)$ ist für $g \in \mathfrak{g}$; cf. Aufgabe 4.(2.iv).

Da (M, ρ) ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist, ist auch $(M, \bar\varphi)$ ein einfacher $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$-Modul. Es ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$ abelsch; cf. Bemerkung 24.(2).

Folglich genügt es zu zeigen, daß ein einfacher Modul (N, ψ) über einer abelschen Liealgebra $\mathfrak{h}$ eindimensional ist. Sei $h \in \mathfrak{h}$. Für $n \in N$ und $x \in \mathfrak{h}$ ist $[h, [x, n]] = [x, [h, n]] + [[h, x], n] = [x, [h, n]]$. Folglich ist $\psi(h) : N \longrightarrow N$ eine $\mathfrak{h}$-lineare Abbildung. Nach Schur, Bemerkung 61, gibt es ein $\lambda_h \in K$ mit $\psi(h) = \lambda_h \,\mathrm{id}_N$, i.e. mit $[h, n] = \lambda_h n$ für $n \in N$.

Wähle $n_0 \in N \smallsetminus \{0\}$. Dann ist $\langle n_0 \rangle \subseteq N$ ein $\mathfrak{h}$-Teilmodul, da $[h, n_0] = \lambda_h n_0$ für $h \in \mathfrak{h}$. Wegen N einfach ist also $N = \langle n_0 \rangle$, und damit $\dim N = 1$.

Aufgabe 27

(1) Für $h \in \mathfrak{g}$ und $g \in \mathfrak{g}$ wird

$$(f_\kappa([h, g]))(x) \;=\; \kappa([h, g], x)$$

und

$$[h, f_\kappa(g)](x) \;=\; -f_\kappa(g)([h, x]) \;=\; -\kappa(g, [h, x]) \;=\; -\kappa([g, h], x) \;=\; \kappa([h, g], x)$$

für $x \in \mathfrak{g}$, cf. Bemerkung 62, und somit $f_\kappa([h, g]) = [h, f_\kappa(g)]$. Also ist f_κ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung.

(2) Es ist $\mathfrak{g}$ ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul; cf. Aufgabe 25.(4).

O.E. ist $\kappa \neq 0$.

Die Abbildung f_κ aus (1) ist wegen $\kappa \neq 0$ nicht die Nullabbildung. Da $\mathfrak{g}$ ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist, ist folglich Kern $f_\kappa = 0$. Wegen Dimension ist f_κ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln.

Sei $\tilde{\kappa} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ definiert durch $\tilde{\kappa}(g,h) := \mathrm{tr}(g \circ h)$ für $g,\ h\ \in\ \mathfrak{g}$. Nach Voraussetzung ist $\tilde{\kappa}$ und also auch $f_{\tilde{\kappa}}$ ungleich 0; cf. Bemerkung 45. Da $\mathfrak{g}$ ein einfacher $\mathfrak{g}$-Modul ist, ist folglich Kern $f_{\tilde{\kappa}} = 0$. Wegen Dimension ist also auch $f_{\tilde{\kappa}}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln.

Nach Schur, Bemerkung 61, ist $f_{\tilde{\kappa}}^{-1} \circ f_\kappa = \lambda\, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ für ein $\lambda \in K \smallsetminus \{0\}$, damit auch $f_\kappa = \lambda f_{\tilde{\kappa}}$ und daher $\kappa = \lambda\tilde{\kappa}$. Folglich ist $\kappa(g,h) = \lambda\tilde{\kappa}(g,h) = \lambda\, \mathrm{tr}(g \circ h)$ für $g,\ h\ \in\ \mathfrak{g}$.

Um λ zu bestimmen, verwende man das nach Voraussetzung existente Element $g \in \mathfrak{g}$, für welches $\tilde{\kappa}(g,g) \neq 0$ ist, und vergleiche mit $\kappa(g,g)$. Ist e.g. $\mathrm{char}\, K = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ und $\kappa = \kappa_{\mathfrak{g}}$, so ist $\kappa_{\mathfrak{g}}(h,h) = 8$ und $\tilde{\kappa}(h,h) = 2$, folglich $\lambda = 4$.

Aufgabe 28

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Sei $n := \dim \mathfrak{g}$. Sei M ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul mit Operationsmorphismus $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{gl}(M)$. Sei $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ eine nichtausgeartete Bilinearform, für welche $b([g,h],k) = b(g,[h,k])$ ist für $g,\ h,\ k\ \in\ \mathfrak{g}$.

Sei $(x_1\,, \ldots, x_n)$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Sei $(y_1\,, \ldots, y_n)$ die dazu bezüglich b duale Basis von $\mathfrak{g}$, i.e. $b(x_i\,, y_j) = \partial_{i,\,j}$ für $i,\ j\ \in\ [1,n]$.

Sei $(x'_1\,, \ldots, x'_n)$ eine weitere Basis von $\mathfrak{g}$. Sei $(y'_1\,, \ldots, y'_n)$ die dazu bezüglich b duale Basis von $\mathfrak{g}$, i.e. $b(x'_i\,, y'_j) = \partial_{i,\,j}$ für $i,\ j\ \in\ [1,n]$.

Zu zeigen ist

$$\textstyle\sum_{i\in[1,n]} \varphi(x_i) \circ \varphi(y_i) \ \overset{!}{=}\ \sum_{i\in[1,n]} \varphi(x'_i) \circ \varphi(y'_i)\ .$$

Sei $x'_i = \sum_j \alpha_{i,\,j}\, x_j$ und $y'_i = \sum_j \beta_{i,\,j}\, y_j$ für $i \in [1,n]$, wobei mit $\alpha_{i,\,j}\,,\ \beta_{i,\,j}\ \in\ K$ für $i,\ j\ \in\ [1,n]$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
\partial_{i,k} & = & b(x'_i\,,\, y'_k) \\
& = & b(\sum_j \alpha_{i,\,j}\, x_j\,,\, \sum_\ell \beta_{k,\ell}\, y_\ell) \\
& = & \sum_{j,\ell}\ \alpha_{i,\,j}\, \beta_{k,\ell}\, b(x_j\,,\, y_\ell) \\
& = & \sum_{j,\ell}\ \alpha_{i,\,j}\, \beta_{k,\ell}\, \partial_{j,\ell} \\
& = & \sum_j\ \alpha_{i,\,j}\, \beta_{k,\,j}
\end{array}$$

für $i,\ k\ \in\ [1,n]$. In anderen Worten, es sind $(\alpha_{i,\,j})_{i,\,j}$ und $\big((\beta_{i,\,j})_{i,\,j}\big)^{\mathrm{t}}$ zueinander inverse Matrizen. Insbesondere gilt auch

$$\textstyle\sum_i \alpha_{i,\,j}\, \beta_{i,k} \ =\ \partial_{j,k}$$

für $j,\ k\ \in\ [1,n]$. Also wird

$$\begin{array}{rcl}
\sum_i \varphi(x'_i) \circ \varphi(y'_i) & = & \sum_i\ \varphi(\sum_j \alpha_{i,\,j}\, x_j) \circ \varphi(\sum_k \beta_{i,k}\, y_k) \\
& = & \sum_{i,\,j,k}\ \alpha_{i,\,j}\, \beta_{i,k}\, \varphi(x_j) \circ \varphi(y_k) \\
& = & \sum_{j,k}\ \partial_{j,k}\, \varphi(x_j) \circ \varphi(y_k) \\
& = & \sum_j\ \varphi(x_j) \circ \varphi(y_j)\ ,
\end{array}$$

wie wir zeigen wollten.

Aufgabe 29

Direkte Berechnung.

Wir wählen die Basis

$$(\mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2}\,,\, \mathrm{e}_{2,2} - \mathrm{e}_{3,3}\,,\, \mathrm{e}_{1,2}\,,\, \mathrm{e}_{1,3}\,,\, \mathrm{e}_{2,1}\,,\, \mathrm{e}_{2,3}\,,\, \mathrm{e}_{3,1}\,,\, \mathrm{e}_{3,2})$$

von $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$, in den Bezeichungen der Lösung zu Aufgabe 3. Bezüglich dieser Basis ergibt sich die Grammatrix der Killingform $\kappa_{\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C}),\,\varphi}$ zu

$$G \;:=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihr Inverses ist

$$G^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir die bezüglich $\kappa_{\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C}),\,\varphi}$ duale Basis

$$(\tfrac{1}{3}(2\mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2} - \mathrm{e}_{3,3})\,,\, \tfrac{1}{3}(\mathrm{e}_{1,1} + \mathrm{e}_{2,2} - 2\mathrm{e}_{3,3})\,,\, \mathrm{e}_{2,1}\,,\, \mathrm{e}_{3,1}\,,\, \mathrm{e}_{1,2}\,,\, \mathrm{e}_{3,2}\,,\, \mathrm{e}_{1,3}\,,\, \mathrm{e}_{2,3})\;,$$

wie man auch direkt bestätigen kann.

Da φ injektiv ist, ist $\mathrm{c}_\varphi = \mathrm{c}_{\varphi,\kappa_{3(\mathbf{C}),\varphi}}$.

Wir erhalten, den Endomorphismus als Matrix geschrieben,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{c}_\varphi & = & (\mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2}) \cdot \frac{1}{3}(2\mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2} - \mathrm{e}_{3,3}) \\ & + & (\mathrm{e}_{2,2} - \mathrm{e}_{3,3}) \cdot \frac{1}{3}(\mathrm{e}_{1,1} + \mathrm{e}_{2,2} - 2\mathrm{e}_{3,3}) \\ & + & \mathrm{e}_{1,2}\cdot\mathrm{e}_{2,1} + \mathrm{e}_{1,3}\cdot\mathrm{e}_{3,1} + \mathrm{e}_{2,1}\cdot\mathrm{e}_{1,2} + \mathrm{e}_{2,3}\cdot\mathrm{e}_{3,2} + \mathrm{e}_{3,1}\cdot\mathrm{e}_{1,3} + \mathrm{e}_{3,2}\cdot\mathrm{e}_{2,3} \\ & = & \frac{8}{3}(\mathrm{e}_{1,1} + \mathrm{e}_{2,2} + \mathrm{e}_{3,3}) = \frac{8}{3}\;. \end{array}$$

Berechnung mittels Bemerkung 67.(3).

Wir *behaupten,* daß $\mathbf{C}^{3\times 1}$ ein einfacher $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$-Modul ist. Sei $0 \neq M \subseteq \mathbf{C}^{3\times 1}$ ein Teilmodul. Wir müssen $M \overset{!}{=} \mathbf{C}^{3\times 1}$ zeigen.

Sei $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{smallmatrix}\right) \in M \smallsetminus \{0\}$. Wir dürfen $\gamma \neq 0$ annehmen, da ansonsten das Produkt mit $\mathrm{e}_{3,1}$ oder $\mathrm{e}_{3,2}$ ein solches Element in M liefert. Es wird $[\gamma^{-1}\mathrm{e}_{1,3}\,, \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{smallmatrix}\right)] = \gamma^{-1}\mathrm{e}_{1,3}\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \in M$.

Es wird $[\mathrm{e}_{2,1}\,, \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)] = \mathrm{e}_{2,1}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \in M$ und $[\mathrm{e}_{3,1}\,, \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)] = \mathrm{e}_{3,1}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \in M$. Also liegt eine Basis von $\mathbf{C}^{3\times 1}$ in M. Es folgt $M = \mathbf{C}^{3\times 1}$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Nun gibt Bemerkung 67.(3)

$$\mathrm{c}_\varphi \;=\; (\dim(\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})) - \dim(\mathrm{Kern}\,\varphi))/\dim(\mathbf{C}^{3\times 1}) \;=\; (8-0)/3 \;=\; \tfrac{8}{3}\;.$$

Aufgabe 30

Da φ ein Morphismus ist, haben wir für $x \in \mathfrak{g}$ folgendes kommutatives Viereck aus linearen Abbildungen.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(x))"] & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Beachte dazu $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(x)))(\varphi(y)) = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) = \varphi((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x))(y))$ für $y \in \mathfrak{g}$.

Es genügt nun, $\varphi(g)_{\mathrm{as}} \stackrel{!}{=} \varphi(g_{\mathrm{as}})$ zu zeigen, da dann

$$\varphi(g)_{\mathrm{an}} \;=\; \varphi(g) - \varphi(g)_{\mathrm{as}} \;=\; \varphi(g) - \varphi(g_{\mathrm{as}}) \;=\; \varphi(g - g_{\mathrm{as}}) \;=\; \varphi(g_{\mathrm{an}})$$

folgt.

Sei $\bar{\varphi} := \varphi|^{\varphi(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} \to \varphi(\mathfrak{g})$ die Einschränkung im Zielbereich auf das Bild.

Sei $\dot{\varphi} := \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}|_{\varphi(\mathfrak{g})} : \varphi(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{h}$ die Einbettung des Bilds.

Es ist $\varphi = \dot{\varphi} \circ \bar{\varphi}$ mit $\dot{\varphi}$ injektiv und $\bar{\varphi}$ surjektiv. Es ist $\varphi(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}/\mathrm{Kern}(\varphi)$ wieder halbeinfach; cf. Lemma 53.(2). Somit genügt es, die Fälle φ injektiv und φ surjektiv zu betrachten, denn mit diesem Wissen kann man dann $\varphi(g)_{\mathrm{as}} = \dot{\varphi}(\bar{\varphi}(g))_{\mathrm{as}} = \dot{\varphi}(\bar{\varphi}(g)_{\mathrm{as}}) = \dot{\varphi}(\bar{\varphi}(g_{\mathrm{as}})) = \varphi(g_{\mathrm{as}})$ folgern.

Fall φ injektiv.

Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(\mathfrak{g})) \leqslant \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$. Es ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(\mathfrak{g})) \simeq \mathfrak{g}$ halbeinfach; cf. Bemerkung 33.

Nach Lemma 69 gibt es g', $g'' \in \mathfrak{g}$ mit $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g))_{\mathrm{gs}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g'))$ und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g))_{\mathrm{gn}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g''))$.

Wir wollen $(g', g'') \stackrel{!}{=} (g_{\mathrm{as}}\,,\, g_{\mathrm{an}})$ zeigen.

Da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} \circ \varphi$ ein injektiver Morphismus ist, folgt $g' + g'' = g$ und $[g', g''] = 0$; cf. Lemma 22.

Wir haben folgende kommutativen Vierecke aus linearen Abbildungen.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g'))"] & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g')"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g''))"] & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g'')"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g')) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g))_{\mathrm{gs}}$ halbeinfach ist, gilt dies wegen φ injektiv auch für $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g')$; cf. Aufgabe 9.(2).

Da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g'')) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g))_{\mathrm{gn}}$ nilpotent ist, gilt dies wegen φ injektiv auch für $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g'')$.

Insgesamt folgt $(g', g'') = (g_{\mathrm{as}}\,,\, g_{\mathrm{an}})$; cf. Jordan, Satz 70.

Somit wird

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g_{\mathrm{as}})) \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g')) \;=\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g))_{\mathrm{gs}} \;\stackrel{\mathrm{S.}\,70}{=}\; \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g)_{\mathrm{as}})\;,$$

wegen $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ injektiv also $\varphi(g_{\mathrm{as}}) = \varphi(g)_{\mathrm{as}}$.

Fall φ surjektiv.

Da $\mathfrak{h}$ halbeinfach ist, ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ injektiv; cf. Bemerkung 33. Also genügt es, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g)_{\mathrm{as}}) \stackrel{!}{=} \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(\varphi(g_{\mathrm{as}}))$ zu zeigen, i.e. $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g))_{\mathrm{gs}} \stackrel{!}{=} \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g_{\mathrm{as}})$; cf. Jordan, Satz 70.

Da φ surjektiv ist, genügt es hierfür, $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g))_{\mathrm{gs}} \circ \varphi \stackrel{!}{=} \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g_{\mathrm{as}}) \circ \varphi$ zu zeigen.

Nach Aufgabe 9.(3) folgt aus der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g)"] & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,g"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g))_{\mathrm{gs}}"] & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,g)_{\mathrm{gs}}"] & \mathfrak{g}\,. \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Ohnehin kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g_{\mathrm{as}})"] & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}})"] & \mathfrak{g}\,. \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Es folgt

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g))_{\mathrm{gs}} \circ \varphi & = & \varphi \circ ((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,g)_{\mathrm{gs}}) \\ & \overset{\text{S. 70}}{=} & \varphi \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(g_{\mathrm{as}})) \\ & = & \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,\varphi(g_{\mathrm{as}}) \circ \varphi\;, \end{array}$$

wie benötigt.

Aufgabe 31

Per Definition in Aufgabe 1.(2) ist $\mathfrak{o}(K,b) = \{\, g \in \mathfrak{gl}_5(K) \;:\; g^{\mathrm{t}}b = -bg \,\}$. Wegen $b = b^{\mathrm{t}}$ sollte g also $(bg)^{\mathrm{t}} = -bg$ erfüllen, i.e. es sollte bg antisymmetrisch sein, i.e. es sollte

$$bg \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & -\varepsilon & \vartheta & \lambda \\ -\beta & \varepsilon & 0 & \zeta & \eta \\ -\gamma & -\vartheta & -\zeta & 0 & -\mu \\ -\delta & -\lambda & -\eta & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

sein für gewisse $\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta,\, \varepsilon,\, \zeta,\, \eta,\, \vartheta,\, \lambda,\, \mu \in K$. Folglich ist

$$\mathfrak{o}(K,b) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \varepsilon & 0 & \zeta & \eta \\ -\alpha & 0 & -\varepsilon & \vartheta & \lambda \\ -\delta & -\lambda & -\eta & \mu & 0 \\ -\gamma & -\vartheta & -\zeta & 0 & -\mu \end{pmatrix} \;:\; \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta,\, \varepsilon,\, \zeta,\, \eta,\, \vartheta,\, \lambda,\, \mu \in K \right\}$$

Sei $\hat{\alpha} \in \mathfrak{o}(K,b)$ das Element, das sich durch Setzen von $\alpha = 1$ und allen anderen Variablen zu 0 ergibt. Etc. Es ist $(\hat{\alpha},\, \hat{\beta},\, \hat{\gamma},\, \hat{\delta},\, \hat{\varepsilon},\, \hat{\zeta},\, \hat{\eta},\, \hat{\vartheta},\, \hat{\lambda},\, \hat{\mu})$ eine Basis von $\mathfrak{o}(K,b)$.

Eine Rechnung liefert folgende Verknüpfungstafel der Lieklammer.

$[-,=]$	$\hat\alpha$	$\hat\beta$	$\hat\gamma$	$\hat\delta$	$\hat\varepsilon$	$\hat\zeta$	$\hat\eta$	$\hat\vartheta$	$\hat\lambda$	$\hat\mu$
$\hat\alpha$	0	$\hat\varepsilon$	$-\hat\vartheta$	$-\hat\lambda$	$\hat\alpha$	$\hat\gamma$	$\hat\delta$	0	0	0
$\hat\beta$	$-\hat\varepsilon$	0	$-\hat\zeta$	$-\hat\eta$	$-\hat\beta$	0	0	$\hat\gamma$	$\hat\delta$	0
$\hat\gamma$	$\hat\vartheta$	$\hat\zeta$	0	$\hat\mu$	0	0	$-\hat\beta$	0	$-\hat\alpha$	$\hat\gamma$
$\hat\delta$	$\hat\lambda$	$\hat\eta$	$-\hat\mu$	0	0	$-\hat\beta$	0	$-\hat\alpha$	0	$-\hat\delta$
$\hat\varepsilon$	$-\hat\alpha$	$\hat\beta$	0	0	0	$\hat\zeta$	$\hat\eta$	$-\hat\vartheta$	$-\hat\lambda$	0
$\hat\zeta$	$-\hat\gamma$	0	0	$\hat\beta$	$-\hat\zeta$	0	0	0	$-\hat\varepsilon+\hat\mu$	$\hat\zeta$
$\hat\eta$	$-\hat\delta$	0	$\hat\beta$	0	$-\hat\eta$	0	0	$-\hat\varepsilon-\hat\mu$	0	$-\hat\eta$
$\hat\vartheta$	0	$-\hat\gamma$	0	$\hat\alpha$	$\hat\vartheta$	0	$\hat\varepsilon+\hat\mu$	0	0	$\hat\vartheta$
$\hat\lambda$	0	$-\hat\delta$	$\hat\alpha$	0	$\hat\lambda$	$\hat\varepsilon-\hat\mu$	0	0	0	$-\hat\lambda$
$\hat\mu$	0	0	$-\hat\gamma$	$\hat\delta$	0	$-\hat\zeta$	$\hat\eta$	$-\hat\vartheta$	$\hat\lambda$	0

Insbesondere ist $\mathfrak{o}(K,b)$ nichtabelsch.

Sei ein Ideal $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{o}(K,b)$ gegeben, welches ein Element

$$\alpha\hat\alpha + \beta\hat\beta + \gamma\hat\gamma + \delta\hat\delta + \varepsilon\hat\varepsilon + \zeta\hat\zeta + \eta\hat\eta + \vartheta\hat\vartheta + \lambda\hat\lambda + \mu\hat\mu \;\neq\; 0$$

enthält, wobei α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, λ, $\mu \in K$. Zu zeigen ist $\mathfrak{a} \overset{!}{=} \mathfrak{o}(K,b)$.

Falls α nicht verschwindet, so ist bereits $\alpha \neq 0$.

Falls γ (resp. δ, ε, ϑ, λ) nicht verschwindet, so können wir nach Multiplikation mit $\hat\lambda$ (resp. $\hat\vartheta$, $\hat\alpha$, $\hat\delta$, $\hat\gamma$) annehmen, daß $\alpha \neq 0$ ist.

Falls β (resp. ζ, η, μ) nicht verschwindet, so können wir nach Multiplikation mit $\hat\alpha$ (resp. $\hat\alpha$, $\hat\alpha$, $\hat\gamma$) annehmen, daß ε (resp. γ, δ, γ) nicht verschwindet. Wie im vorigen Fall können wir nun weiter annehmen, daß $\alpha \neq 0$ ist.

Insgesamt ist also in allen drei Fällen o.E. $\alpha \neq 0$.

Multiplikation unseres Elementes mit $\hat\beta$ liefert das Element

$$(-\alpha)\hat\varepsilon + (-\gamma)\hat\zeta + (-\delta)\hat\eta + (-\varepsilon)\hat\beta + \vartheta\hat\gamma + \lambda\hat\delta \;\in\; \mathfrak{a}\,.$$

Multiplikation dieses Elementes mit $\hat\beta$ liefert das Element

$$\alpha\hat\beta + (-\vartheta)\hat\zeta + (-\lambda)\hat\eta \;\in\; \mathfrak{a}\,.$$

Multiplikation dieses Elementes mit $\hat\gamma$ liefert das Element

$$\alpha\hat\zeta + \lambda\hat\beta \;\in\; \mathfrak{a}\,.$$

Multiplikation dieses Elementes mit $\hat\mu$ liefert das Element

$$(-\alpha)\hat\zeta \;\in\; \mathfrak{a}\,.$$

Skalarmultiplikation dieses Elementes mit $(-\alpha)^{-1}$ liefert das Element

$$\hat\zeta \;\in\; \mathfrak{a}\,.$$

Daher sind auch $\hat{\gamma} = [\hat{\alpha}, \hat{\zeta}]$ und $\hat{\beta} = -[\hat{\delta}, \hat{\zeta}]$ in $\mathfrak{a}$.

Somit sind auch $\hat{\vartheta} = -[\hat{\alpha}, \hat{\gamma}]$, $\hat{\mu} = -[\hat{\delta}, \hat{\gamma}]$, $\hat{\alpha} = [\hat{\lambda}, \hat{\gamma}]$, $\hat{\varepsilon} = [\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$, $\hat{\eta} = [\hat{\delta}, \hat{\beta}]$ und $\hat{\delta} = -[\hat{\lambda}, \hat{\beta}]$ in $\mathfrak{a}$.

Schließlich ist noch $\hat{\lambda} = -[\hat{\lambda}, \hat{\mu}] \in \mathfrak{a}$.

Damit ist unsere Basis von $\mathfrak{o}(K, b)$ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Dies zeigt $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}(K, b)$.

Aufgabe 32

Beachte allgemein, daß $[g, v] = g(v)$ ist für $g \in \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ und $v \in V$.

(1) Die Aussage ist richtig. Sei $\mathfrak{r} := \mathfrak{rad}(\mathfrak{g})$ das Radikal von $\mathfrak{g}$, i.e. das terminale auflösbare Ideal; cf. Bemerkung 28. Wir wollen $\mathfrak{r} \overset{!}{=} 0$ zeigen.

Es ist $\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{sl}(V) \leqslant \mathfrak{gl}(V)$.

Dank Lemma 41 gibt es ein $v \in V \smallsetminus \{0\}$ und eine lineare Abbildung $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow K$ mit $[r, v] = \lambda(r)v$ für $r \in \mathfrak{r}$.

Sei $W_0 := 0$. Sei $W_1 := \langle v \rangle$. Sei $W_{m+1} := W_m + [\mathfrak{g}, W_m]$ für $m \geqslant 0$. Sei $W := \bigcup_{m \geqslant 0} W_m$. Es ist $W \subseteq V$ ein $\mathfrak{g}$-Teilmodul. Da $0 \neq v \in W$, folgt $W = V$.

Wir *behaupten,* für $r \in \mathfrak{r}$, für $m \geqslant 0$ und für $x \in W_{m+1}$ ist $[r, x] = \lambda(r)x + y$ für ein $y \in W_m$. Induktion über $m \geqslant 0$. Für $m = 0$ trifft dies zu. Sei nun $m \geqslant 1$. Sei $x \in W_{m+1}$. O.E. ist $x \in W_m$ oder $x = [g, x']$ für ein $g \in \mathfrak{g}$ und ein $x' \in W_m$. Ersterenfalls folgt die Aussage mit Induktion. Zweiterenfalls wird

$$[r, x] \;=\; [r, [g, x']] \;=\; [g, [r, x']] + [\underbrace{[r, g]}_{\in \mathfrak{r}}, x'] \;\overset{\text{Ind.}}{=}\; \lambda(r)[g, x'] + [g, y'] + \lambda([r, g])x' + z \;=\; \lambda(r)x + \underbrace{[g, y'] + \lambda([r, g])x' + z}_{\in W_m}$$

für gewisse $y',\, z \in W_{m-1}$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Wähle, unter Verwendung von $\bigcup_{m \geqslant 0} W_m = V$, eine Basis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von V derart, daß für jedes $m \geqslant 0$ ein $k_m \in [1, n]$ so existiert, daß $(x_1, \ldots, x_{k_m})$ eine Basis von W_m ist. Dabei wählen wir $x_1 = v$.

Bezüglich dieser Basis gibt für $r \in \mathfrak{r}$ dank unserer Behauptung die Abbildung $V \to V$, $x \mapsto [r, x]$ eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen gleich $\lambda(r)$. Da $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{sl}(V)$ und da $\mathrm{char}\, K = 0$, folgt $\lambda(r) = 0$.

Wir *behaupten,* für $r \in \mathfrak{r}$, für $m \geqslant 0$ und für $x \in W_{m+1}$ ist $[r, x] = 0$. Induktion über $m \geqslant 0$. Für $m = 0$ trifft dies zu. Sei nun $m \geqslant 1$. Sei $x \in W_{m+1}$. O.E. ist $x \in W_m$ oder $x = [g, x']$ für ein $g \in \mathfrak{g}$ und ein $x' \in W_m$. Ersterenfalls folgt die Aussage mit Induktion. Zweiterenfalls wird

$$[r, x] \;=\; [r, [g, x']] \;=\; [g, [r, x']] + [\underbrace{[r, g]}_{\in \mathfrak{r}}, x'] \;\overset{\text{Ind.}}{=}\; 0 + 0 \;=\; 0\,.$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Da $\bigcup_{m \geqslant 0} W_m = V$ und da der Operationsmorphismus $\mathfrak{r} \to \mathfrak{gl}(V)$ injektiv ist, folgt $r = 0$ für $r \in \mathfrak{r}$, i.e. $\mathfrak{r} = 0$.

(2) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathfrak{h} := \mathfrak{sl}_2(K) \oplus \mathfrak{sl}_2(K)$; cf. Bemerkung 15.(2). Für ein Gegenbeispiel genügt es, einen einfachen $\mathfrak{h}$-Modul (K^4, φ) anzugeben, dessen Operationsmorphismus $\varphi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{gl}_4(K)$ injektiv ist. Denn schreiben wir $\mathfrak{g}$ für das Bild von φ, dann ist $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$ wohl halbeinfach, nicht aber einfach, und nach Aufgabe 24 liegt $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{sl}_4(K)$.

Sei (e', f', h') die Standardbasis des ersten Summanden $\mathfrak{sl}_2(K)$ von $\mathfrak{h}$, sei (e'', f'', h'') die des zweiten; cf. §3.5.

Wir haben die injektive lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}_4(K) \\
e' & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix} \\
f' & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} \\
h' & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix} \\
e'' & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} \\
f'' & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \\
h'' & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Diese ist ein Morphismus von Liealgebren, da die Multiplikationsregeln auf den jeweiligen Standardbasiselementen entsprechend auch für die Bilder gelten und da die Lieklammer verschwindet, wenn man vorne ein Bild aus dem ersten Summanden einsetzt und hinten eines aus dem zweiten.

Bleibt zu zeigen, daß K^4 damit ein einfacher $\mathfrak{h}$-Modul wird. Sei $x = \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d \end{pmatrix} \in K^4 \smallsetminus \{0\}$ in einem Teilmodul $M \subseteq K^4$ enthalten. Wir müssen $M \overset{!}{=} K^4$ zeigen. Dazu genügt es, alle Standardbasiselemente in M zu finden.

Dank Multiplikation mit e'' können wir ($a \neq 0$ oder $b \neq 0$) und $c = d = 0$ annehmen. Dank Multiplikation mit e' können wir $a \neq 0$ und $b = c = d = 0$ annehmen. Also ist $\mathrm{e}_1 \in M$. Dank Multiplikation mit f' liegt auch $\mathrm{e}_2 \in M$. Dank Multiplikation mit f'' liegen schließlich auch $\mathrm{e}_3\,,\ \mathrm{e}_4 \in M$.

Können wir nun zeigen, daß K^5 ein einfacher Modul über $\mathfrak{o}(b, K)$ ist, so folgt die Halbeinfachheit dieser Liealgebra aus (1). Wir verwenden die Bezeichnungen aus Aufgabe 31.

Sei $x = \begin{pmatrix} a\\b\\c\\d\\e \end{pmatrix} \in K^5 \smallsetminus \{0\}$ in einem Teilmodul $M \subseteq K^4$ enthalten. Wir müssen $M \overset{!}{=} K^5$ zeigen.

Dank $\hat{\gamma}$, $\hat{\vartheta}$, $\hat{\zeta}$ können wir $d \neq 0$ oder $e \neq 0$ annehmen. Dank $\hat{\mu}$ können wir $a = b = c = 0$ annehmen. Dank $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ können wir $a \neq 0$ und $b = c = d = e = 0$ annehmen. Also ist $\mathrm{e}_1 \in M$. Dank $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\gamma}$ sind auch $\mathrm{e}_2\,,\ \mathrm{e}_3\,,\ \mathrm{e}_4,\ \mathrm{e}_5 \in M$.

Somit ist $\mathfrak{o}(b, K)$ mit den Mitteln dieser Aufgabe als halbeinfach nachgewiesen. Aus Aufgabe 31 wissen wir aber bereits, daß $\mathfrak{o}(b, K)$ sogar einfach ist.

Aufgabe 33

(1) Für $\lambda \in K$ bildet $\varphi(f)$ den Raum M_λ nach $M_{\lambda-2}$ ab; cf. Bemerkung 76. Also ist $m_k \in M_{\lambda-2k}$, i.e.

$$[h, m_k] \;=\; (\mu - 2k)m_k\ .$$

Ferner ist

$$\begin{array}{rcl}
[f, m_k] & = & \varphi(f)\left(k!^{-1}(\varphi(f))^k(m_0)\right) \\
& = & (k+1)(k+1)!^{-1}(\varphi(f))^{k+1}(m_0) \\
& = & (k+1)m_{k+1}\ .
\end{array}$$

für $k \geqslant 0$. Dies ist im Ergebnis auch für $k = -1$ noch richtig.

Für die Formel für e führen wir eine Induktion über $k \geqslant 0$.

Für $k = 0$ wird $[e, m_0] = 0 = (\mu - 0 + 1)m_{0-1}$, da $[e, m_0] \in M_{\mu+2} = 0$ wegen μ maximal.

Sei nun $k \geqslant 1$, und seien die Formel für e für $k-1$ bekannt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
[e, m_k] &= k^{-1}[e, [f, m_{k-1}]] \\
&= k^{-1}([[e, f], m_{k-1}] + [f, [e, m_{k-1}]]) \\
&= k^{-1}([h, m_{k-1}] + [f, (\mu - (k-1) + 1)m_{k-2}]) \\
&= k^{-1}((\mu - 2(k-1))m_{k-1} + (\mu - k + 2)[f, m_{k-2}]) \\
&= k^{-1}((\mu - 2k + 2)m_{k-1} + (\mu - k + 2)(k-1)m_{k-1}) \\
&= (\mu - k + 1)m_{k-1}\ .
\end{aligned}$$

(2) Es ist nur $[e, M_\lambda] \neq 0$ zu zeigen; cf. Bemerkung 76 und Lemma 80.(3). Mit Lemma 80.(1) dürfen wir $M = V_{\ell+1}$ annehmen, wobei $\ell := (\dim M) - 1$. Da $\lambda = \ell - 2i$ für ein $i \in [1, \ell]$ und da $v_i \in M_{\ell-2i}$, genügt es zu beobachten, daß $[e, v_i] = (\ell - i + 1)v_{i-1} \neq 0$ ist.

Aufgabe 34

(1) Es ist $\dim(K^{2\times 1})_0 = 0$ und $\dim(K^{2\times 1})_1 = 1$. Also ist $K^{2\times 1}$ einfach, aus Dimensionsgründen mithin isomorph zu V_2.

Ferner ist $(K^{2\times 1})_1 = \langle \binom{1}{0} \rangle$ und $(K^{2\times 1})_{-1} = \langle \binom{0}{1} \rangle$, denn dies sind die Eigenräume von h.

(2) Es ist $\mathfrak{g}$ ein einfacher Modul; cf. Aufgabe 25.(4). Aus Dimensionsgründen ist $\mathfrak{g} \simeq V_2$.

Ferner ist $\mathfrak{g}_2 = \langle e \rangle$, $\mathfrak{g}_0 = \langle h \rangle$ und $\mathfrak{g}_{-2} = \langle f \rangle$, wie man der Operation $[h, -]$ ansieht.

(3) Es ist

$$\begin{aligned}
M_2 &= \langle \mathrm{e}_{1,2} \rangle \\
M_1 &= \langle \mathrm{e}_{1,3}\, ,\, \mathrm{e}_{3,2} \rangle \\
M_0 &= \langle \mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2}\, ,\, \mathrm{e}_{1,1} + \mathrm{e}_{2,2} - 2\mathrm{e}_{3,3} \rangle \\
M_{-1} &= \langle \mathrm{e}_{3,1}\, ,\, \mathrm{e}_{2,3} \rangle \\
M_{-2} &= \langle \mathrm{e}_{2,1} \rangle\ .
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$M = \langle \mathrm{e}_{2,1}\, ,\, \mathrm{e}_{1,2}\, ,\, \mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2} \rangle \oplus \langle \mathrm{e}_{1,3}\, ,\, \mathrm{e}_{2,3} \rangle \oplus \langle \mathrm{e}_{3,1}\, ,\, \mathrm{e}_{3,2} \rangle \oplus \langle \mathrm{e}_{1,1} + \mathrm{e}_{2,2} - 2\mathrm{e}_{3,3} \rangle$$

eine direkte Zerlegung in Teilmoduln, der erste isomorph zu V_3 (cf. (2)), der zweite isomorph zu V_2 (cf. (1)), der dritte isomorph zu V_2, der vierte isomorph zum trivialen Modul V_1.

Aufgabe 35

Wir wollen zeigen, daß die Teilalgebra $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}'$ ein maximaler Torus ist; cf. Aufgabe 4.(2.ii).

Sei $t \in \mathfrak{t}$ gegeben. Schreibe $t' := \varphi(t)$. Das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t)"'] & \mathfrak{g}' \arrow[d, "\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}(t')"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] & \mathfrak{g}'
\end{tikzcd}$$

zeigt, daß aus $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(t)$ halbeinfach auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}(t')$ halbeinfach folgt; cf. e.g. Aufgabe 9.(1). Somit ist auch $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}'$ ein Torus.

Annahme, $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{g}'$ ist kein maximaler Torus. Dann gibt es einen Torus $\tilde{\mathfrak{t}}' \leqslant \mathfrak{g}'$ mit $\mathfrak{t}' < \tilde{\mathfrak{t}}' \leqslant \mathfrak{g}'$. Sei $\tilde{\mathfrak{t}} := \varphi^{-1}(\tilde{\mathfrak{t}}')$. Dann ist $\mathfrak{t} < \tilde{\mathfrak{t}} \leqslant \mathfrak{g}$, und nach dem eben Gesagten ist $\tilde{\mathfrak{t}} \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus; cf. Aufgabe 1.(3). Dies aber *widerspricht* der Maximalität des Torus $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$.

Aufgabe 36

Bezüglich $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(K)$ verwenden wir die Bezeichnungen aus §3.5.

(1) Es sind $\mathfrak{t} := \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \langle h \rangle$ und $\mathfrak{t}' := \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ maximale Tori in $\mathfrak{g}$.

Denn es ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus; cf. Bemerkung 83.

Bestimmen wir $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Ein Element $ah + be + cf$ mit $a,\, b,\, c \in \mathbf{C}$ liegt in $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ genau dann, wenn $0 = [h, ah + be + cf] = 2be - 2cf$ ist, i.e. wenn $b = 0$ und $c = 0$ ist. Somit ist $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \langle h \rangle = \mathfrak{t}$. Dank Bemerkung 85 ist $\mathfrak{t}$ also ein maximaler Torus in $\mathfrak{g}$.

Ferner ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist auch $\mathfrak{t}'$ ein maximaler Torus in $\mathfrak{g}$; cf. Aufgabe 35, angewandt auf den Isomorphismus $\mathfrak{g} \stackrel{\sim}{\to} \mathfrak{g}$, $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} x \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(2) Es läuft die Bestimmung von $\Phi(\mathfrak{g})$ auf die Bestimmung der Eigenwerte von $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} h$ hinaus; cf. Beweis zu Lemma 88. Es ergibt sich $\Phi(\mathfrak{g}) = \{\chi_2, \chi_{-2}\}$, wobei $\chi_2(h) = 2$ und $\chi_{-2}(h) = -2$ ist. Es ist auch $\chi_{-2} = -\chi_2$.

Die zugehörige Wurzelraumzerlegung ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\chi_2} \oplus \mathfrak{g}_{\chi_{-2}}$, wobei $\mathfrak{g}_{\chi_2} = \langle e \rangle$ und $\mathfrak{g}_{\chi_{-2}} = \langle f \rangle$ ist.

Es ist übrigens $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t} = \langle h \rangle$.

Cf. auch Aufgabe 34.(2).

(3)

(1) Es ist $[\mathfrak{g}_{\chi_2}\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_2}] = 0 = \mathfrak{g}_{2\chi_2}$. Es ist $[\mathfrak{g}_{\chi_{-2}}, \mathfrak{g}_{\chi_{-2}}] = 0 = \mathfrak{g}_{2\chi_{-2}}$. Es ist $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0 \subseteq \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}$.
Es ist $[\mathfrak{g}_0\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_2}] = \mathfrak{g}_{\chi_2}$, da $[h, e] = 2e$.
Es ist $[\mathfrak{g}_0\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_{-2}}] = \mathfrak{g}_{\chi_{-2}}$, da $[h, f] = -2f$.
Es ist $[\mathfrak{g}_{\chi_2}\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_{-2}}] = \mathfrak{g}_0$, da $[e, f] = h$.

(2, 3) Bezüglich der Basis (e, f, h) geschrieben, wird $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(e) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(h) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Also hat die Killingform $\kappa_{\mathfrak{g}}$ bezüglich der Basis (e, f, h) die Grammatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Cf. auch Beispiel 52.

Insbesondere wird $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_2}) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\langle h \rangle, \langle e \rangle) = 0$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_{-2}}) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\langle h \rangle, \langle f \rangle) = 0$, $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_{\chi_2}\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_2}) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\langle e \rangle, \langle e \rangle) = 0$ und $\kappa_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_{\chi_{-2}}\, ,\, \mathfrak{g}_{\chi_{-2}}) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\langle f \rangle, \langle f \rangle) = 0$.

Ferner ist $\operatorname{rad}(\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \times \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})}) = \operatorname{rad}(\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\langle h \rangle \times \langle h \rangle}) = 0 = \operatorname{rad}(\kappa_{\mathfrak{g}})$. Cf. auch Cartan, Satz 50.

Aufgabe 37

(1) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathfrak{g} := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a,\, b,\, c,\, d \in K \} \leqslant \mathfrak{gl}_3(K)$. Sei $\mathfrak{t} := \langle \mathrm{E}_3\, ,\, \mathrm{e}_{1,3} \rangle \leqslant \mathfrak{g}$.

Es ist

$$[\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & a' & d' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd' - b'd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für $a,\, b,\, c,\, d,\, a',\, b',\, c',\, d' \in K$. Folglich ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ und damit ein Torus in $\mathfrak{g}$.

Wir behaupten, es ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus. *Annahme,* nicht. Dann gibt es einen Torus $\tilde{\mathfrak{t}} \leqslant \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{t} < \tilde{\mathfrak{t}} \leqslant \mathfrak{g}$ und ein Element

$$x = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{t}}$$

mit $(b,d) \in (K \times K) \smallsetminus \{(0,0)\}$. Da $x \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \neq 0$. Jedoch ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}_3(K)}(x)|_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{g}}$ nilpotent nach Bemerkung 10. Folglich ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ nicht halbeinfach, und wir haben einen *Widerspruch.*

Dagegen ist $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g} > \mathfrak{t}$.

(2) Die Aussage ist richtig.

Die Maximalität von $\mathfrak{t}$ wird hierzu nicht benötigt werden.

Schreibe $\mathfrak{c} := \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$.

Ohnehin ist $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{n}$. Wir haben nur $\mathfrak{c} \overset{!}{\geqslant} \mathfrak{n}$ zu zeigen. Sei $x \in \mathfrak{n}$. Wir wollen $x \overset{!}{\in} \mathfrak{c}$ zeigen.

Annahme, $x \notin \mathfrak{c}$. Betrachte die Zerlegung

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathfrak{c} \oplus \bigoplus_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\chi$$

aus Lemma 88. Schreibe $x = c + \sum_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g})} x_\chi$ mit $c \in \mathfrak{c}$ und $x_\chi \in \mathfrak{g}_\chi$ für $\chi \in \Phi(\mathfrak{g})$.

Wir dürfen $c = 0$ annehmen. Wir dürfen die Kardinalität $|\{\, \chi \in \Phi(\mathfrak{g}) \,:\, x_\chi \neq 0 \,\}|$ des Trägers von x als minimal annehmen.

Wähle $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$ mit $x_\sigma \neq 0$. Für $t \in \mathfrak{t}$ ist

$$\mathfrak{n} \;\ni\; \underbrace{[t,x]}_{\in\, \mathfrak{t}} - \sigma(t)x \;=\; \sum_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g})} [t, x_\chi] - \sigma(t) x_\chi \;=\; \sum_{\chi \in \Phi(\mathfrak{g})} (\chi(t) - \sigma(t)) x_\chi$$

von echt kleinerem Träger, also gleich 0. Folglich ist $[t,x] = \sigma(t)x$ für $t \in \mathfrak{t}$, i.e. $x \in \mathfrak{g}_\sigma$.

Wähle nun $t \in \mathfrak{t}$ mit $\sigma(t) \neq 0$. Es wird $\sigma(t)x = [t,x] \in \mathfrak{t}$, da $x \in \mathfrak{n}$. Folglich ist auch $x \in \mathfrak{t} \smallsetminus \{0\}$, im *Widerspruch* zu $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_\sigma \subseteq \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}_\sigma = 0$.

Aufgabe 38

(1) Mit der Wurzelraumzerlegung, Satz 91, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{t}$ in besagter Teilalgebra enthalten ist. Da $\mathfrak{t} \overset{\text{B. 95.(1)}}{=} \langle\, t_\sigma \,:\, \sigma \in \Phi(\mathfrak{g}) \,\rangle$, genügt es zu zeigen, daß t_σ dort enthalten ist für $\sigma \in \Phi(\mathfrak{g})$. Nun ist aber $[\mathfrak{g}_\sigma\,, \mathfrak{g}_{-\sigma}] \overset{\text{B. 95.(3)}}{=} \langle t_\sigma \rangle$.

(2) *Fall* $\sigma \in \{-\rho, +\rho\}$. Tritt nicht auf dank Lemma 98.(3).

Fall $\sigma \notin \{-\rho, +\rho\}$. Zu zeigen ist nur $\mathfrak{g}_{\sigma+\rho} \subseteq [\mathfrak{g}_\sigma\,, \mathfrak{g}_\rho]$; cf. Bemerkung 89.(1).

Wir verwenden den $\mathfrak{sl}_2(K)$-Modul M aus dem Beweis zu Lemma 101 und die dortigen Bezeichnungen.

Aus σ, $\sigma + \rho \in \Phi(\mathfrak{g})$ folgt $\sigma(t'_\rho)$, $\sigma(t'_\rho) + 2 \in \gamma(M)$; cf. loc. cit. Mit Aufgabe 33.(2) ist

$$\mathfrak{g}_{\sigma+\rho} \;=\; M_{\sigma(t'_\rho)+2} \;=\; [e, M_{\sigma(t'_\rho)}] \;=\; [g', M_{\sigma(t'_\rho)}] \;=\; [g', \mathfrak{g}_\sigma] \;\subseteq\; [\mathfrak{g}_\sigma\,, \mathfrak{g}_\rho]\;;$$

cf. Lemma 98.(2).

Aufgabe 39

(1) Sei $h_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $h_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Wir wählen die Basis $(h_1\,, h_2\,, \mathrm{e}_{1,2}\,, \mathrm{e}_{1,3}\,, \mathrm{e}_{2,3}\,, \mathrm{e}_{2,1}\,, \mathrm{e}_{3,1}\,, \mathrm{e}_{3,2})$ von $\mathfrak{g}$. Wir identifizieren Elemente aus $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ mit ihren beschreibenden Matrizen in $\mathbf{C}^{8\times 8}$ bezüglich dieser Basis.

Bezüglich unserer Basis ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1 &=& \mathrm{diag}(0,0,\;\;\, 2,1,-1,-2,-1,\;\;\, 1) \\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2 &=& \mathrm{diag}(0,0,-1,1,\;\;\, 2,\;\;\, 1,-1,-2) \end{array}$$

(i) Es ist $\mathfrak{t} := \langle h_1\,, h_2\rangle \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus, da $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}_3(\mathbf{C})$ liegt, halbeinfach ist und da $\mathfrak{t}$ aus Diagonalmatrizen besteht; cf. Bemerkung 83.
Wir *behaupten,* daß $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus ist.
Es ist

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \;=\; (\mathrm{Kern}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1) \cap (\mathrm{Kern}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2) \;=\; \langle h_1\,, h_2\rangle \;=\; \mathfrak{t}\,.$$

Dies zeigt die Behauptung nach Bemerkung 85.

(ii) Für $u_1\,,\, u_2 \in \mathbf{C}$ sei $(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2\end{smallmatrix}) \in \mathfrak{t}^*$ definiert als

$$\begin{array}{rccl} (\begin{smallmatrix} u_1 & u_2\end{smallmatrix}) & : & \mathfrak{t} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & h_1 & \longmapsto & u_1 \\ & & h_2 & \longmapsto & u_2\,. \end{array}$$

Den Diagonalmatrizen $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1$ und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2$ entnimmt man

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathrm{e}_{1,2}\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{1,3}\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} 1 & 1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{2,3}\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{2,1}\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} -2 & 1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{3,1}\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} -1 & -1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{3,2}\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} 1 & -2\end{smallmatrix})}\,. \end{array}$$

Da die linken Seiten zusammen mit $\mathfrak{t}$ ganz $\mathfrak{g}$ aufspannen, folgt die Gleichheit an jeder Stelle; cf. Wurzelraumzerlegung in Satz 91. I.e.

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathrm{e}_{1,2}\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{1,3}\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} 1 & 1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{2,3}\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{2,1}\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} -2 & 1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{3,1}\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} -1 & -1\end{smallmatrix})} \\ \langle \mathrm{e}_{3,2}\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\begin{smallmatrix} 1 & -2\end{smallmatrix})}\,. \end{array}$$

Cf. auch Lemma 98.(1). Inbesondere ist

$$\Phi(\mathfrak{g}) \;=\; \big\{ (\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix}),\, (\begin{smallmatrix} 1 & 1\end{smallmatrix}),\, (\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix}),\, (\begin{smallmatrix} -2 & 1\end{smallmatrix}),\, (\begin{smallmatrix} -1 & -1\end{smallmatrix}),\, (\begin{smallmatrix} 1 & -2\end{smallmatrix}) \big\}\,.$$

(iii) Bezüglich der Basis $(h_1\,, h_2)$ von $\mathfrak{t}$ ergibt sich die Grammatrix von $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ zu $\begin{pmatrix} \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1)\big) & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2)\big) \\ \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1)\big) & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2)\big)\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12\end{smallmatrix}\right)$. Ihr Inverses ist $\frac{1}{18}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$.
Da $(\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix})\left(\frac{1}{18}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)\right) = \frac{1}{6}(\begin{smallmatrix} 1 & 0\end{smallmatrix})$, ist $t_{(\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix})} = \frac{1}{6}\, h_1\,$.
Da $(\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix})\left(\frac{1}{18}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)\right) = \frac{1}{6}(\begin{smallmatrix} 0 & 1\end{smallmatrix})$, ist $t_{(\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix})} = \frac{1}{6}\, h_2\,$.
Etwa mit Gram-Schmidt können wir als Orthonormalbasis von E e.g.

$$(x_1\,, x_2) \;:=\; \left(\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\, h_1\,, \tfrac{1}{6}\, h_1 + \tfrac{1}{3}\, h_2\right)\,.$$

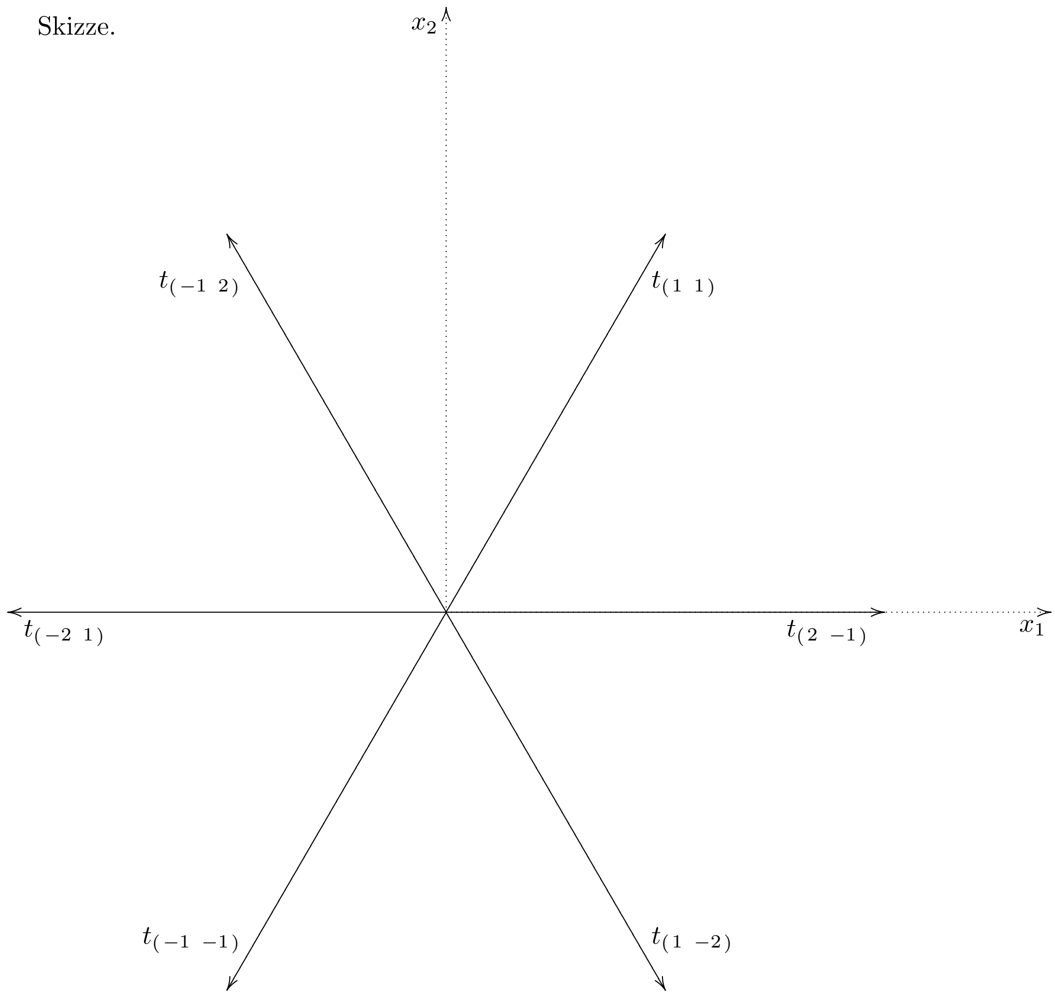
wählen. Damit ist umgekehrt $h_1 = 2\sqrt{3}x_1$ und $h_2 = 3x_2 - \sqrt{3}x_1$. So ergeben sich

$$\begin{array}{rcl} t_{(\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix})} & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\, x_1 \\ t_{(\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix})} & = & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, x_1 + \frac{1}{2}\, x_2\,, \end{array}$$

und daraus

$$\begin{array}{rclcl} t_{(\begin{smallmatrix} 1 & 1\end{smallmatrix})} & = & t_{(\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix})} + t_{(\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix})} & = & \frac{1}{2\sqrt{3}}\, x_1 + \frac{1}{2}\, x_2 \\ t_{(\begin{smallmatrix} -1 & -1\end{smallmatrix})} & = & -t_{(\begin{smallmatrix} 1 & 1\end{smallmatrix})} & = & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, x_1 - \frac{1}{2}\, x_2 \\ t_{(\begin{smallmatrix} -2 & 1\end{smallmatrix})} & = & -t_{(\begin{smallmatrix} 2 & -1\end{smallmatrix})} & = & -\frac{1}{\sqrt{3}}\, x_1 \\ t_{(\begin{smallmatrix} 1 & -2\end{smallmatrix})} & = & -t_{(\begin{smallmatrix} -1 & 2\end{smallmatrix})} & = & \frac{1}{2\sqrt{3}}\, x_1 - \frac{1}{2}\, x_2\,. \end{array}$$

Skizze.



Ferner sind e.g.

$$\begin{array}{lclclcl} \kappa_{\mathfrak{g}}(\,t_{(2\ -1)}\,,\,t_{(2\ -1)}\,) & = & \kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,x_1\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,x_1\,) & = & \frac{1}{3} & = & \frac{4}{12} \\ \kappa_{\mathfrak{g}}(\,t_{(1\ 1)}\,,\,t_{(1\ 1)}\,) & = & \kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2\,,\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2\,) & = & \frac{1}{12} + \frac{1}{4} & = & \frac{4}{12} \end{array}$$

von der Form $\frac{4}{z}$ mit $z \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$.
Schließlich wird e.g. für $\sigma = (\,2\ \ -1\,)$ und $\rho = (\,1\ \ 1\,)$

$$\sigma - \sigma(t'_\rho)\rho \;=\; \sigma - 2\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(\,t_{(2\ -1)}\,,\,t_{(1\ 1)}\,)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(\,t_{(1\ 1)}\,,\,t_{(1\ 1)}\,)}\rho \;=\; \sigma - 6\kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,x_1\,,\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2\,)\rho \;=\; \sigma - \rho \;=\; (\,1\ \ -2\,) \;\in\; \Phi\,,$$

und für $\sigma = (\,1\ \ 1\,)$ und $\rho = (\,2\ \ -1\,)$

$$\sigma - \sigma(t'_\rho)\rho \;=\; \sigma - 2\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(\,t_{(1\ 1)}\,,\,t_{(2\ -1)}\,)}{\kappa_{\mathfrak{g}}(\,t_{(2\ -1)}\,,\,t_{(2\ -1)}\,)}\rho \;=\; \sigma - 6\kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,x_1\,)\rho \;=\; \sigma - \rho \;=\; (\,-1\ \ 2\,) \;\in\; \Phi\,.$$

(2) Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Lösung zu Aufgabe 31.
Wir wählen die Basis $(\hat{\alpha},\,\hat{\beta},\,\hat{\gamma},\,\hat{\delta},\,\hat{\varepsilon},\,\hat{\zeta},\,\hat{\eta},\,\hat{\vartheta},\,\hat{\lambda},\,\hat{\mu})$ von $\mathfrak{g}$. Wir identifizieren Elemente aus $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}$ mit ihren beschreibenden Matrizen in $\mathbf{C}^{10\times 10}$ bezüglich dieser Basis.
Bezüglich dieser Basis ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat{\varepsilon} & = & \mathrm{diag}(-1, 1, \quad 0, 0, 0, \quad 1, 1, -1, -1, 0) \\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat{\mu} & = & \mathrm{diag}(\;\; 0, 0, -1, 1, 0, -1, 1, -1, \quad 1, 0)\,, \end{array}$$

wie man der Verknüpfungstafel aus der Lösung zu Aufgabe 31 entnimmt.

(i) Es ist $\mathfrak{t} := \langle \hat\varepsilon \,, \hat\mu \rangle \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus, da $\mathfrak{g} \leqslant \mathfrak{gl}_5(\mathbf{C})$ liegt, halbeinfach ist und da $\mathfrak{t}$ aus Diagonalmatrizen besteht; cf. Bemerkung 83.

Wir *behaupten,* daß $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus ist.

Es ist

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \;=\; (\mathrm{Kern}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\varepsilon) \cap (\mathrm{Kern}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\mu) \;=\; \langle \hat\varepsilon \,, \hat\mu \rangle \;=\; \mathfrak{t}\,.$$

Dies zeigt die Behauptung nach Bemerkung 85.

(ii) Für $u_1 \,, u_2 \in \mathbf{C}$ sei $\left({\scriptstyle u_1\; u_2} \right) \in \mathfrak{t}^*$ definiert als

$$\begin{array}{rcrcl} \left({\scriptstyle u_1\; u_2} \right) & : & \mathfrak{t} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & \hat\varepsilon & \longmapsto & u_1 \\ & & \hat\mu & \longmapsto & u_2\,. \end{array}$$

Den Diagonalmatrizen $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1$ und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2$ entnimmt man

$$\begin{array}{rcl} \langle\hat\alpha\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,-1\;\;0\,)} \\ \langle\hat\beta\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,1\;\;0\,)} \\ \langle\hat\gamma\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,0\;\;-1\,)} \\ \langle\hat\delta\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,0\;\;1\,)} \\ \langle\hat\zeta\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,1\;\;-1\,)} \\ \langle\hat\eta\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,1\;\;1\,)} \\ \langle\hat\vartheta\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,-1\;\;-1\,)} \\ \langle\hat\lambda\rangle & \subseteq & \mathfrak{g}_{(\,-1\;\;1\,)}\,. \end{array}$$

Da die linken Seiten zusammen mit $\mathfrak{t}$ ganz $\mathfrak{g}$ aufspannen, folgt die Gleichheit an jeder Stelle; cf. Wurzelraumzerlegung in Satz 91. I.e.

$$\begin{array}{rcl} \langle\hat\alpha\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,-1\;\;0\,)} \\ \langle\hat\beta\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,1\;\;0\,)} \\ \langle\hat\gamma\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,0\;\;-1\,)} \\ \langle\hat\delta\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,0\;\;1\,)} \\ \langle\hat\zeta\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,1\;\;-1\,)} \\ \langle\hat\eta\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,1\;\;1\,)} \\ \langle\hat\vartheta\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,-1\;\;-1\,)} \\ \langle\hat\lambda\rangle & = & \mathfrak{g}_{(\,-1\;\;1\,)} \end{array}$$

Cf. auch Lemma 98.(1). Inbesondere ist

$$\Phi(\mathfrak{g}) \;=\; \{ \left({\scriptstyle -1\;\;0} \right), \left({\scriptstyle 1\;\;0} \right), \left({\scriptstyle 0\;\;-1} \right), \left({\scriptstyle 0\;\;1} \right), \left({\scriptstyle 1\;\;-1} \right), \left({\scriptstyle 1\;\;1} \right), \left({\scriptstyle -1\;\;-1} \right), \left({\scriptstyle -1\;\;1} \right) \}\,.$$

(iii) Bezüglich der Basis $(\hat\varepsilon \,, \hat\mu)$ von $\mathfrak{t}$ ergibt sich die Grammatrix von $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ zu $\begin{pmatrix} \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\varepsilon)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\varepsilon)\big) & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\varepsilon)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\mu)\big) \\ \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\mu)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\varepsilon)\big) & \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\mu)\circ(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\hat\mu)\big) \end{pmatrix} = \left({\scriptstyle 6\;0 \atop 0\;6} \right)$. Ihr Inverses ist $\frac{1}{6} \left({\scriptstyle 1\;0 \atop 0\;1} \right)$.

Da $\left({\scriptstyle 1\;0} \right) \left(\frac{1}{6} \left({\scriptstyle 1\;0 \atop 0\;1} \right) \right) = \frac{1}{6} \left({\scriptstyle 1\;0} \right)$, ist $t_{(\,1\;\;0\,)} = \frac{1}{6}\,\hat\varepsilon\,.$

Da $\left({\scriptstyle 0\;1} \right) \left(\frac{1}{6} \left({\scriptstyle 1\;0 \atop 0\;1} \right) \right) = \frac{1}{6} \left({\scriptstyle 0\;1} \right)$, ist $t_{(\,0\;\;1\,)} = \frac{1}{6}\,\hat\mu\,.$

Direkt erkennen wir als Orthonormalbasis von E e.g.

$$(x_1 \,, x_2) \;:=\; \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}\,\hat\varepsilon \,, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\,\hat\mu \right)\,.$$

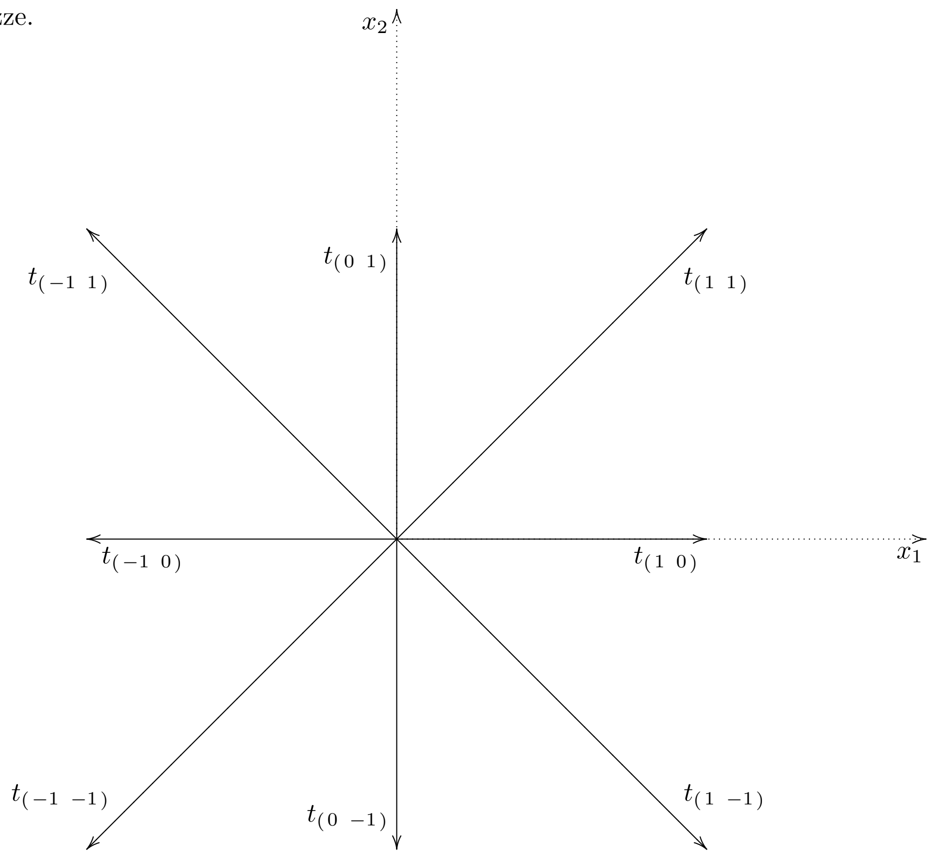
So ergeben sich

$$\begin{array}{rcl} t_{(\,1\;\;0\,)} & = & \frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1 \\ t_{(\,0\;\;1\,)} & = & \frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2\,, \end{array}$$

und daraus

$$\begin{array}{lllll} t_{(-1\ 0)} & = & -t_{(1\ 0)} & = & -\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1 \\ t_{(0\ -1)} & = & -t_{(0\ 1)} & = & -\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2 \\ t_{(1\ 1)} & = & t_{(1\ 0)}+t_{(0\ 1)} & = & \frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2 \\ t_{(-1\ -1)} & = & -t_{(1\ 1)} & = & -\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2 \\ t_{(1\ -1)} & = & t_{(1\ 0)}-t_{(0\ 1)} & = & \frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2 \\ t_{(-1\ 1)} & = & -t_{(1\ -1)} & = & -\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2\,. \end{array}$$

Skizze.



Ferner sind e.g.

$$\begin{array}{lllllll} \kappa_{\mathfrak{g}}(t_{(1\ 0)},t_{(1\ 0)}) & = & \kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1\,,\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1\,) & = & \frac{1}{6} & = & \frac{4}{24} \\ \kappa_{\mathfrak{g}}(t_{(1\ 1)},t_{(1\ 1)}) & = & \kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2\,,\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2\,) & = & \frac{1}{6}+\frac{1}{6} & = & \frac{4}{12} \end{array}$$

von der Form $\frac{4}{z}$ mit $z \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$.
Schließlich wird e.g. für $\sigma = (\,1\ 0\,)$ und $\rho = (\,1\ 1\,)$

$$\sigma - \sigma(t'_\rho)\rho \;=\; \sigma - 2\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_{(1\ 0)},t_{(1\ 1)})}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_{(1\ 1)},t_{(1\ 1)})}\rho \;=\; \sigma - 6\kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1\,,\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2\,)\rho \;=\; \sigma-\rho \;=\; (\,0\ -1\,) \;\in\; \Phi\,,$$

und für $\sigma = (\,1\ 1\,)$ und $\rho = (\,1\ 0\,)$

$$\sigma - \sigma(t'_\rho)\rho \;=\; \sigma - 2\frac{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_{(1\ 1)},t_{(1\ 0)})}{\kappa_{\mathfrak{g}}(t_{(1\ 0)},t_{(1\ 0)})}\rho \;=\; \sigma - 12\kappa_{\mathfrak{g}}(\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_2\,,\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1\,)\rho \;=\; \sigma-2\rho \;=\; (\,-1\ 1\,) \;\in\; \Phi\,.$$

Aufgabe 40

(1) Schreibe $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$. Sei $h_1 := \mathrm{e}_{1,1} - \mathrm{e}_{2,2}$, $h_2 := \mathrm{e}_{2,2} - \mathrm{e}_{3,3}$, $h_3 := \mathrm{e}_{3,3} - \mathrm{e}_{4,4}$.
Wir wählen die Basis

$$(\, h_1 \,,\; h_2 \,,\, h_3 \,,\, \mathrm{e}_{1,2} \,,\, \mathrm{e}_{1,3} \,,\, \mathrm{e}_{1,4} \,,\, \mathrm{e}_{2,3} \,,\, \mathrm{e}_{2,4} \,,\, \mathrm{e}_{3,4} \,,\, \mathrm{e}_{2,1} \,,\, \mathrm{e}_{3,1} \,,\, \mathrm{e}_{4,1} \,,\, \mathrm{e}_{3,2} \,,\, \mathrm{e}_{4,2} \,,\, \mathrm{e}_{4,3} \,)$$

von $\mathfrak{g}$. Diesbezüglich wird

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1 & = & \mathrm{diag}(0,0,0,\;\; 2,\;\; 1,\, 1,-1,-1,\;\; 0,-2,-1,-1,\;\; 1,\;\; 1,\;\; 0) \\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_2 & = & \mathrm{diag}(0,0,0,-1,\;\; 1,\, 0,\;\; 2,\;\; 1,-1,\;\; 1,-1,\;\; 0,-2,-1,\;\; 1) \\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_3 & = & \mathrm{diag}(0,0,0,\;\; 0,-1,\, 1,-1,\;\; 1,\;\; 2,\;\; 0,\;\; 1,-1,\;\; 1,-1,-2) \end{array}$$

Es ist $\mathfrak{t} := \langle\, h_1 \,,\, h_2 \,,\, h_3 \,\rangle \leqslant \mathfrak{g}$ ein Torus; cf. Bemerkung 83. Es ist

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) \;=\; (\mathrm{Kern}\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1) \cap (\mathrm{Kern}\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1) \cap (\mathrm{Kern}\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, h_1) \;=\; \langle\, h_1 \,,\, h_2 \,,\, h_3 \,\rangle \;=\; \mathfrak{t}\,.$$

Somit ist $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{g}$ ein maximaler Torus; cf. Bemerkung 85.

Wir suchen das Wurzelsystem (E, Ψ) mit $E := \mathfrak{t}_{\mathbf{R}}$ und $\Psi := t_{\Phi(\mathfrak{g})}$.

Für $u_1 \,,\, u_2 \,,\, u_3 \;\in\; \mathbf{C}$ sei $(\, u_1\; u_2\; u_3 \,)$ das Element von $\mathfrak{t}^*$, welches $h_1 \mapsto u_1$, $h_2 \mapsto u_2$, $h_3 \mapsto u_3$ abbildet. Es wird analog zur Lösung der Aufgabe 39.(1)

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\mathfrak{g}) & = & \{ (\, 2\, {-1}\; 0\,) \,,\, (\, 1\; 1\, {-1}\,) \,,\, (\, 1\; 0\; 1\,) \,,\, (\, {-1}\; 2\, {-1}\,) \,,\, (\, {-1}\; 1\; 1\,) \,,\, (\, 0\, {-1}\; 2\,) \,, \\ & & (\, {-2}\; 1\; 0\,) \,,\, (\, {-1}\, {-1}\; 1\,) \,,\, (\, {-1}\; 0\, {-1}\,) \,,\, (\, 1\, {-2}\; 1\,) \,,\, (\, 1\, {-1}\, {-1}\,) \,,\, (\, 0\; 1\, {-2}\,) \} \,. \end{array}$$

Bezüglich $(\, h_1 \,,\, h_2 \,,\, h_3 \,)$ wird die Grammatrix von $\kappa_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{t}\times\mathfrak{t}}$ zu

$$G \;:=\; \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} \,.$$

Ihr Inverses ist

$$G^{-1} \;=\; \tfrac{1}{32} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Da

$$\begin{array}{rcl} (\, 2\; {-1}\;\; 0\,) \cdot G^{-1} & = & \tfrac{1}{8}\, (\, 1\; 0\; 0\,) \\ (\, {-1}\;\; 2\; {-1}\,) \cdot G^{-1} & = & \tfrac{1}{8}\, (\, 0\; 1\; 0\,) \\ (\, 0\; {-1}\;\; 2\,) \cdot G^{-1} & = & \tfrac{1}{8}\, (\, 0\; 0\; 1\,) \;\;, \end{array}$$

sind

$$\begin{array}{rcl} t_{(\, 2\; -1\;\; 0\,)} & = & \tfrac{1}{8}\, h_1 \\ t_{(\, -1\;\; 2\; -1\,)} & = & \tfrac{1}{8}\, h_2 \\ t_{(\, 0\; -1\;\; 2\,)} & = & \tfrac{1}{8}\, h_3 \,. \end{array}$$

Etwa mit Gram-Schmidt erhalten wir die Orthonormalbasis

$$(\, x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \,) \;:=\; (\, \tfrac{1}{4}\, h_1 \,,\, \tfrac{1}{4}\, h_3 \,,\, \tfrac{1}{4\sqrt{2}}(h_1 + 2h_2 + h_3)\,)$$

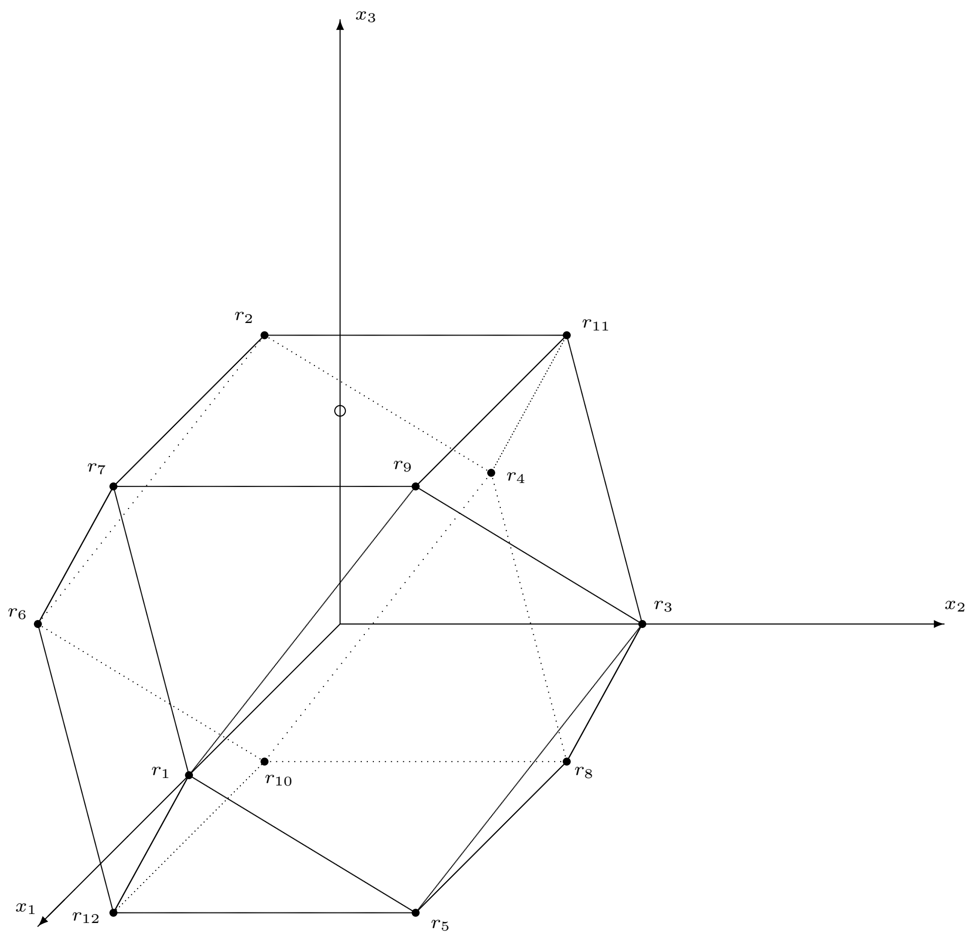
Umgekehrt ist also $h_1 = 4x_1$, $h_2 = 2\sqrt{2}x_3 - 2x_1 - 2x_2$, $h_3 = 4x_2$. So ergeben sich

$$\begin{array}{rcccl} r_1 & := & t_{(\, 2\; -1\;\; 0\,)} & = & \tfrac{1}{2}\, x_1 \\ r_2 & := & t_{(\, -1\;\; 2\; -1\,)} & = & \tfrac{\sqrt{2}}{4}\, x_3 - \tfrac{1}{4}\, x_1 - \tfrac{1}{4} x_2 \\ r_3 & := & t_{(\, 0\; -1\;\; 2\,)} & = & \tfrac{1}{2}\, x_2 \,. \end{array}$$

Weiter werden also

$$
\begin{array}{llll}
r_4 & := t_{(-2\ 1\ 0)} & = & -\frac{1}{2}\,x_1 \\
r_5 & := t_{(1\ -2\ 1)} & = & -\frac{\sqrt{2}}{4}\,x_3 + \frac{1}{4}\,x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\
r_6 & := t_{(0\ 1\ -2)} & = & -\frac{1}{2}\,x_2 \\
r_7 & := t_{(1\ 1\ -1)} & = & t_{(2\ -1\ 0)} + t_{(-1\ 2\ -1)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,x_3 + \frac{1}{4}\,x_1 - \frac{1}{4}x_2 \\
r_8 & := t_{(-1\ -1\ 1)} & = & -\frac{\sqrt{2}}{4}\,x_3 - \frac{1}{4}\,x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\
r_9 & := t_{(1\ 0\ 1)} & = & t_{(2\ -1\ 0)} + t_{(-1\ 2\ -1)} + t_{(\ 0\ -1\ 2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,x_3 + \frac{1}{4}\,x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\
r_{10} & := t_{(-1\ 0\ -1)} & = & -\frac{\sqrt{2}}{4}\,x_3 - \frac{1}{4}\,x_1 - \frac{1}{4}x_2 \\
r_{11} & := t_{(-1\ 1\ 1)} & = & t_{(-1\ 2\ -1)} + t_{(0\ -1\ 2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,x_3 - \frac{1}{4}\,x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\
r_{12} & := t_{(1\ -1\ -1)} & = & -\frac{\sqrt{2}}{4}\,x_3 + \frac{1}{4}\,x_1 - \frac{1}{4}x_2
\end{array}
$$

Mittels nur zwecks Veranschaulichung eingezeichneter Verbindungsstrecken zwischen den Wurzeln erhalten wir folgende Figur.



Diese wird auch Kuboktaeder genannt.

Literatur

[1] Erdmann, K., Wildon, M., *Introduction to Lie Algebras,* Springer UMS, 2006.

[2] Hawkins, T., *Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras,* Arch. Hist. Exact Sci. 26 (2), S. 127–192, 1982.

[3] Hiss, G., *Lie-Algebren,* Vorlesungsmitschrift, angefertigt von S. Thomas, Aachen, 2006.

[4] Humphreys, J.E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory,* Springer GTM 9, 1972.

[5] Künzer, M., *Galoistheorie,* Skript, Koblenz, 2009.

[6] Künzer, M., *Lineare Algebra für Informatiker,* Skript, Ulm, 2004.

[7] Michael, G.A.A., *On the conjugacy theorem of Cartan subalgebras,* Hiroshima Math. J. 32, S. 155–163, 2002.

[8] Soergel, W., *Lie-Algebren,* Skript, Freiburg, 2007.

[9] Thompson, M.C., *On the Conjugacy Theorems of Cartan and Borel Subalgebras,* master thesis, Auburn (Alabama), 2010.