M. Künzer Abgabe bis Fr 31.05.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 6

Aufgabe 20 (2 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache endlichdimensionale Liealgebra.
Man zeige $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$. (Hinweis: Lemma 53.(1).)

Aufgabe 22 (6 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.
Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Liealgebra. Sei $\mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$.
Man zeige ohne Verwendung von Lemma 53.

(1) Sei $\mathfrak{b}$ halbeinfach. Es ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^{\perp}$. (Hinweis: Satz 50, Aufgabe 21.)

(2) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Es ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}^{\perp}$.

(3) Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Sei $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{b} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. Es ist $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$. (Hinweis: (2).)

Aufgabe 23 (2 Punkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K = 0$.
Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum.
Sei $\mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{gl}(V)$ ein Morphismus von Liealgebren. Man zeige $\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$.
(Hinweis: tr Morphismus.)

Aufgabe 24 (2+1+2+3+4+1+3+2 Punkte) Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra.

(1) Gegeben sei ein $\mathfrak{g}$-Modul M sowie ein Teilmodul $M' \subseteq M$. Man zeige, daß M/M' zu einem $\mathfrak{g}$-Modul wird via $[g, m + M'] := [g, m] + M'$ für $g \in \mathfrak{g}$ und $m \in M$.

(2) Sei $M \xrightarrow{f} N$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln. Man zeige, daß auch $M \xleftarrow{f^{-1}} N$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}$-Moduln ist.

(3) Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung zwischen $\mathfrak{g}$-Moduln. Zu zeigen ist folgendes.
Es sind $\operatorname{Kern} f \subseteq M$ und $\operatorname{Im} f \subseteq N$ Teilmoduln.
Es gibt den Isomorphismus $M/\operatorname{Kern} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$, $m + \operatorname{Kern} f \longmapsto f(m)$ von $\mathfrak{g}$-Moduln.

(4) Sei $\mathfrak{g}$ nichtabelsch. Zu zeigen ist folgendes.
Genau dann ist der reguläre $\mathfrak{g}$-Modul $\mathfrak{g}$ einfach, wenn $\mathfrak{g}$ einfach als Liealgebra ist.

(5) Sei M ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Man zeige, daß M genau dann halbeinfach ist, wenn zu jedem Teilmodul $M' \subseteq M$ ein Teilmodul $M'' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus M''$ existiert.

(6) Sei K algebraisch abgeschlossen. Sei M ein endlichdimensionaler einfacher $\mathfrak{g}$-Modul. Sei $M \xrightarrow{f} M$ eine $\mathfrak{g}$-lineare Abbildung. Man zeige, daß $f = \lambda \operatorname{id}_M$ ist für ein $\lambda \in K$.
(Hinweis: f hat Eigenwert.)

(7) Seien $\mathfrak{g}$-Moduln M und N gegeben. Man definiere auf dem Raum der K-linearen Abbildungen $\operatorname{Hom}(M, N)$ wie folgt eine $\mathfrak{g}$-Modulstruktur.
Gegeben $g \in \mathfrak{g}$ und $f \in \operatorname{Hom}(M, N)$, so bilde $[g, f] \in \operatorname{Hom}(M, N)$ ein Element $m \in M$ ab nach $[g, f](m) := [g, f(m)] - f([g, m])$. Man zeige, daß $\operatorname{Hom}(M, N)$, zusammen mit $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\operatorname{Hom}(M, N))$, $g \longmapsto [g, -]$, ein $\mathfrak{g}$-Modul ist.

(8) Sei M ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Sei $M^* := \operatorname{Hom}(M, K)$. Man zeige, daß M isomorph ist zu M^{**} vermöge $e : M \to M^{**}$, $m \mapsto (f \mapsto f(m))$.