

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 11**Aufgabe 39 (10 Punkte)**

(1) Man bestimme das zu $\mathfrak{sl}_4(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem (E, Ψ) . Skizziere!

Aufgabe 40 (3+1+2+2 Punkte) Sei $E = (E, [-, =])$ ein euklidischer Raum.

Für $x \in E \setminus \{0\}$ sei

$$x^\vee := \frac{2}{[x,x]} x .$$

Sei Φ ein Wurzelsystem in E .

- (1) Man zeige, daß auch $\Phi^\vee := \{t^\vee : t \in \Phi\}$ ein Wurzelsystem in E ist, genannt das zu Φ *duale* Wurzelsystem.
- (2) Man zeige $\Phi^{\vee\vee} = \Phi$.
- (3) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 38.(1) zu $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem.
Ist $\Phi \simeq \Phi^\vee$?
- (4) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 38.(2) zu $\mathfrak{o}(\mathbf{C}, b)$ gehörige Wurzelsystem.
Ist $\Phi \simeq \Phi^\vee$?

Aufgabe 41 (10 Punkte)

- (1) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 38.(1) zu $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ gehörige Wurzelsystem. Man zeige, daß $W_{E,\Phi}$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.
- (2) Sei (E, Φ) das gemäß Aufgabe 38.(2) zu $\mathfrak{o}(\mathbf{C}, b)$ gehörige Wurzelsystem, b wie in Aufgabe 30. Man zeige, daß $W_{E,\Phi}$ isomorph zur Untergruppe $D_8 := \langle\langle (1,3), (1,2)(3,4) \rangle\rangle$ von Ordnung 8 in der S_4 ist.