M. Künzer Abgabe bis Fr 26.04.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 1

Aufgabe 1 (8 Punkte) Sei K ein Körper.

(1) Sei $\mathfrak{g} = K^{3\times 1}$, ausgestattet mit $\left[\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right) \right] := \left(\begin{smallmatrix}\beta\gamma'-\gamma\beta'\\ \gamma\alpha'-\alpha\gamma'\\ \alpha\beta'-\beta\alpha'\end{smallmatrix}\right)$ für $\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{smallmatrix}\right) \in K^{3\times 1}$.
Man zeige, daß $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra ist.

(2) Sei $n \geqslant 0$. Sei $a \in K^{n\times n}$. Sei $\mathfrak{o}(K,a) := \{g \in \mathfrak{gl}_n(K) \;:\; g^{\mathrm{t}}\, a = -ag\}$.
Man zeige $\mathfrak{o}(K,a) \leqslant \mathfrak{gl}_n(K)$.

(3) Sei $\mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{k}$ ein Isomorphismus von Liealgebren.
Man zeige, daß auch $\mathfrak{k} \xrightarrow{f^{-1}} \mathfrak{h}$ ein Isomorphismus ist.

(4) Sei $\mathfrak{g}$ wie in (1). Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Man zeige $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{o}(K, \mathrm{E}_3)$.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte) Sei K ein Körper.

(1) Sei A eine Algebra. Sei

$$\mathfrak{Der}(A) \;:=\; \{d \in \mathfrak{gl}(A) \;:\; d(a\cdot b) = d(a)\cdot b + a\cdot d(b) \text{ für } a,\, b \,\in\, A\} \;\subseteq\; \mathfrak{gl}(A)$$

der Teilraum der *Derivationen*. Man zeige $\mathfrak{Der}(A) \leqslant \mathfrak{gl}(A)$.

(2) Sei $K^{2\times 2}$ mit der Matrixmultiplikation ausgestattet. Bestimme eine Basis von $\mathfrak{Der}(K^{2\times 2})$.
Falls $\mathrm{char}\, K \neq 2$, für welches $n \geqslant 0$ ist $\mathfrak{Der}(K^{2\times 2}) \simeq \mathfrak{sl}_n(K)$?

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/lalg19/`