M. Künzer Abgabe bis Fr 26.04.19

Liealgebren, SoSe 19

Blatt 1

Aufgabe 1 (8 Punkte) Sei K ein Körper.

(1) Sei $\mathfrak{g} = K^{3\times 1}$, ausgestattet mit $\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} \beta\gamma'-\gamma\beta' \\ \gamma\alpha'-\alpha\gamma' \\ \alpha\beta'-\beta\alpha' \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \in K^{3\times 1}$.
Man zeige, daß $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra ist.

(2) Sei $n \geqslant 0$. Sei $a \in K^{n\times n}$. Sei $\mathfrak{o}(K,a) := \{g \in \mathfrak{gl}_n(K) \; : \; g^{\mathrm{t}}\, a = -ag\}$.
Man zeige $\mathfrak{o}(K,a) \leqslant \mathfrak{gl}_n(K)$.

(3) Sei $\mathfrak{h} \xrightarrow{f} \mathfrak{k}$ ein Isomorphismus von Liealgebren.
Man zeige, daß auch $\mathfrak{k} \xrightarrow{f^{-1}} \mathfrak{h}$ ein Isomorphismus ist.

(4) Sei $\mathfrak{g}$ wie in (1). Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Man zeige $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{o}(K, \mathrm{E}_3)$.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte) Sei K ein Körper.

(1) Sei A eine Algebra. Sei

$$\mathfrak{der}(A) \; := \; \{d \in \mathfrak{gl}(A) \; : \; d(a\cdot b) = d(a)\cdot b + a\cdot d(b) \text{ für } a,\, b \,\in\, A\} \;\subseteq\; \mathfrak{gl}(A)$$

der Teilraum der *Derivationen.* Man zeige $\mathfrak{der}(A) \leqslant \mathfrak{gl}(A)$.

(2) Sei $K^{2\times 2}$ mit der Matrixmultiplikation ausgestattet. Bestimme eine Basis von $\mathfrak{der}(K^{2\times 2})$.
Falls $\mathrm{char}\, K \neq 2$, für welches $n \geqslant 0$ ist $\mathfrak{der}(K^{2\times 2}) \simeq \mathfrak{sl}_n(K)$?

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/lalg19/`