Besprechung am 23.01.20

Aufgabe 38: *Eigenwertproblem*

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

38.1 Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechnen Sie B^{2020}.

38.2 Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $A \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$.

Aufgabe 39: *Eigenwerte*

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 113 & -13 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

39.1 Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\operatorname{tr}(A)$. Geben Sie die Eigenwerte von A an.

39.2 Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(B)$. Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von B ist. Geben Sie alle Eigenwerte von B an.

Aufgabe 40: *Direkte Summe*

Gegeben seien die Basen B_1, B_2 und B_3 von Unterräumen U_1, U_2 und U_3 des $\mathbb{R}^{5\times 1}$

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \qquad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \qquad B_3 = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

40.1 Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$, also eine direkte Summe, ist.

40.2 Bestimmen Sie einen Unterraum W, so dass $U_3 \oplus W = U_1$