Besprechung am 09.01.20

Aufgabe 33: *Lineare Abbildung*

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$

33.1 Die Bilder von $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ sind

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ für $f(x) = \mathrm{mult}_A(x)$.

33.2 Geben Sie $\mathrm{Kern}\,(f)$, $\mathrm{Rang}\,(A)$ und das Bild von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ unter f an.

Aufgabe 34: *Lineare Abbildung*

Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ sei gegeben durch

$$L\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}\colon\ (x,y,z)^{\mathrm{t}} \mapsto \begin{pmatrix}3x+5y+7z\\x+2y+3z\\x+y+z\\2x+3y+4z\end{pmatrix}$$

34.1 Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}\ (L)$. Geben Sie zwei verschiedene Basen des Kerns an.

34.2 Geben Sie einen Untervekorraum $U \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $\dim(U) = 2$ und $\mathrm{Kern}\,(L) \cap U = \{0\}$ an.

34.3 Bestimmen Sie $\dim\,(L(\mathbb{R}^{3\times 1}))$ und geben Sie eine Basis des Bildes von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ unter L an.

34.4 Sei $E = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^{4\times 1}$ und $B = \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Geben Sie die Matrix ${}_E L_B$ an.