Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 8

Platzaufgaben

Platzaufgabe 24

(a) Schreiben Sie das folgende lineare Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 3x_2 & - & 12x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \end{array}$$

(b) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$ des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; Ax = b \,\}$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems.

Platzaufgabe 25 Invertieren Sie $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Hilfe des Gaußalgorithmus.
Vergleichen Sie mit dem via Formel erhaltenen Ergebnis aus Platzaufgabe 22 (c).

Platzaufgabe 26 Gegeben sind die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) ein erzeugendes Tupel von $\mathbb{R}^{3\times 1}$?

(b) Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig? Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$?

(c) Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$, die aus einer Auswahl der gegebenen Vektoren besteht.

Platzaufgabe 27 Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 2}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 1}.$$

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie $\{\, x \in \mathbb{F}_2^{2\times 1} \;:\; Ax = 0 \,\}$.

(c) Bestimmen Sie $\{\, x \in \mathbb{F}_2^{2\times 1} \;:\; Ax = b \,\}$.

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 8

Hausaufgaben

Hausaufgabe 29 Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -12 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 1}.$$

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Hausaufgabe 30 Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1-\iota & \iota & -\iota \\ -1 & -\iota & -1 & \iota & -1+\iota & 1 \\ \iota & -1 & -\iota & -1+\iota & \iota & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{3\times 6}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+\iota \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_9^{3\times 1}.$$

(a) Formen Sie $(A|b)$ um, bis Zeilenstufenform erreicht ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Hausaufgabe 31 Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimmen Sie in diesem Fall die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 3}$$

Hausaufgabe 32 Gegeben sind die folgenden von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_s = \begin{pmatrix} 2s \\ -6s \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist (v_1, v_2, v_3, w_s) linear abhängig?

(b) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist.

(c) Bestimmen Sie ein $w \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ so, dass (v_1, v_2, v_3, w) eine Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ ist.