Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 7

Platzaufgaben

Platzaufgabe 20
Bestimmen Sie jeweils den Betrag und das Argument der folgenden komplexen Zahlen.

(a) $1 + \mathrm{i}$

(b) $(1 + \mathrm{i})^{-1}$

(c) $(1 + \mathrm{i})^2$

(d) $\overline{1 + \mathrm{i}}$

Platzaufgabe 21

(a) Finden Sie $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit

$$2\mathrm{i} \;=\; r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \;.$$

(b) Finden Sie $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\psi \in [0, \frac{2\pi}{3}[$ mit

$$2\mathrm{i} \;=\; r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) \;=\; \big(s(\cos(\psi) + \mathrm{i}\sin(\psi))\big)^3 \;.$$

(c) Finden Sie alle 3 Elemente $\gamma \in [0, 2\pi[$ mit

$$2\mathrm{i} \;=\; \big(s(\cos(\gamma) + \mathrm{i}\sin(\gamma))\big)^3 \;.$$

Hinweis: Wie hängen $\cos(3(\psi + \frac{2\pi}{3}))$ und $\cos(3\psi)$ zusammen?

(d) Bestimmen Sie die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : z^3 = 2\mathrm{i}\}$$

und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Platzaufgabe 22 Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$.

(a) Berechnen Sie $(A + A^{\mathrm{t}}) \cdot B$.

(b) Berechnen Sie $B^{\mathrm{t}} \cdot (A + A^{\mathrm{t}})$.

(c) Bestimmen Sie $C \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ so, dass $A \cdot C = \mathrm{E}_2$ ist.

Platzaufgabe 23 Zerlegen Sie $X^3 - \frac{1}{2}X^2 + 4X - 2 \in \mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 7

Hausaufgaben

Hausaufgabe 25
Bestimmen Sie die folgenden Mengen und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(z)^2\}$

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-\mathrm{i}|\}$

(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : z^5 = 16\sqrt{2} \cdot (1+\mathrm{i})\}$

Hausaufgabe 26

(a) Seien $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f(\overline{z}) = 0$ gilt.

(b) Zerlegen Sie $X^4 - \frac{9}{4}X^3 + \frac{7}{4}X^2 + X - \frac{3}{2} \in \mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

Hausaufgabe 27 Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ folgende Gleichung gilt.

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 28 Sei K ein Körper.
Zeigen Sie, dass für $t \in K$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ folgende Gleichung gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2n(n-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$