

Blatt 6

Platzaufgaben

Platzaufgabe 17 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke in \mathbb{C} .

(a) $(2 + 4i) + (6 - 7i)$

(b) $(1 + i)(1 - i)$

(c) $\frac{1}{1 - i}$

(d) $\frac{2}{1 - 4i} + \frac{2}{4 - i}$

Platzaufgabe 18

(a) Gilt $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Gilt $1 + 1 = 0$ in \mathbb{F}_4 ?

(b) Bestimmen Sie die Multiplikationstabellen für $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und für \mathbb{F}_4 .

Wie kann man an diesen Tabellen erkennen, welcher der beiden kommutativen Ringe ein Körper ist?

(c) Berechnen Sie $(1 + \alpha)^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha}$ in \mathbb{F}_4 .

(d) Berechnen Sie $\frac{(1 + \beta)^2}{\beta} + \beta^2$ in \mathbb{F}_8 .

Platzaufgabe 19

(a) Berechnen Sie $(1 + \iota)(1 - \iota)$ in \mathbb{F}_9 .

(b) Berechnen Sie $\frac{1}{1 - \iota}$ in \mathbb{F}_9 .

(c) Seien

$$f(X) := X^3 - X^2 - 1$$

$$g(X) := X^2 + \iota X + (-1 + \iota)$$

in $\mathbb{F}_9[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X) \in \mathbb{F}_9[X]$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X)$$

ist.

Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{F}_3$ mit $f(a) = 0$. Bestimmen Sie ein $b \in \mathbb{F}_9 \setminus \mathbb{F}_3$ mit $f(b) = 0$.

Blatt 6

Hausaufgaben

Hausaufgabe 21

(a) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{5}\right) \frac{(4 + 12i)i}{3 - 2i} + \frac{1}{2 + i}$ in \mathbb{C} .

(b) Seien

$$f(X) := X^4 - (1 + 2i)X^3 + (-1 + 2i)X^2 + (8 - 5i)X + 5$$

$$g(X) := iX + (2 - i)$$

in $\mathbb{C}[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

Hausaufgabe 22 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.(a) Seien $x, y \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Es gilt $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.(b) Seien $x, y \in \mathbb{F}_9$. Es gilt $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ in \mathbb{F}_9 .(c) Ist $x \in \mathbb{F}_9$ mit $x^3 = 1$, so ist $x = 1$.(d) $X^6 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_9[X]$.**Hausaufgabe 23** Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{x \in \mathbb{F}_4 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + \beta = 0\}$

(d) $D := \{x \in \mathbb{F}_9 : x^3 = x\}$

Hausaufgabe 24

(a) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{1 + \beta^2} + \beta^2\right)^5$ in \mathbb{F}_8 .

(b) Seien

$$f(X) := (1 + \beta^2)X^5 + (1 + \beta^2)X^2 + (1 + \beta + \beta^2)X + \beta$$

$$g(X) := X^2 + \beta$$

in $\mathbb{F}_8[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{F}_8[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.