Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 3

Platzaufgaben

Platzaufgabe 8 Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt.

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1) \;=\; \frac{n(n+3)}{2}$$

Platzaufgabe 9
Zeigen Sie die Aussage $A(n)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ unter Verwendung des allgemeinen Induktionsprinzips.

$A(n)$: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ mit $n \;=\; \prod_{j=1}^{k} p_j$.

Unterscheiden Sie hierbei die Fälle n prim und n nicht prim.

Zur Erinnerung: Es heißt $p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ *Primzahl*, falls $p \equiv_m 0$ mit $m \in \mathbb{N}$ nur für $m \in \{1, p\}$ gilt.

Platzaufgabe 10
Zeigen Sie folgende Aussage unter Verwendung des allgemeinen Induktionsprinzips.

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 8}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $n = 3a + 5b$.

Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $n \leqslant 10$ und $n \geqslant 11$.

Mathematatik 1 für inf, swt, msv

Blatt 3

Hausaufgaben

Hausaufgabe 9 Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt.

$$\sum_{k=1}^{n} (4k^3 - 3k^2 + k) \;=\; n^3(n+1)$$

Hausaufgabe 10 Finden Sie das minimale $s \in \mathbb{N}$, für welches folgende Aussage gilt.

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant s}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $n = 5a + 7b$.

Zeigen Sie dazu auch diese Aussage für das gefundene minimale s.

Hausaufgabe 11 Gegeben sei folgende Funktion.

$$f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,n) \longmapsto f(x,n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ x f(x, n-1) & \text{falls } n \geqslant 1 \text{ und } n \equiv_2 1 \\ f(x^2, \frac{n}{2}) & \text{falls } n \geqslant 2 \text{ und } n \equiv_2 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(x,n) = x^n$ ist für $(x,n) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Hausaufgabe 12 Wir betrachten die Fibonaccifolge

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \longmapsto f(n) := f_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 1 & \text{falls } n = 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{falls } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $(m,n) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} \times \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt.

$$f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$$