Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 2

Platzaufgaben

Platzaufgabe 5

(a) Geben Sie an, welche Eigenschaft eine Abbildung erfüllen muss, damit sie nicht injektiv beziehungsweise nicht surjektiv ist.

(b) Finden Sie eine Abbildung $f : [0, 4] \to [0, 2]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Skizzieren Sie den Graphen Ihrer Abbildung.

(c) Gegeben ist die folgende Abbildung.

$$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\} \, : \, x \mapsto 2 - \frac{1}{x-1}$$

Skizzieren Sie den Graphen von g.

Bestimmen Sie $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : y \mapsto g^{-1}(y)$.

Platzaufgabe 6 Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Für alle Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq X$ gilt $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$.

(b) Für alle Teilmengen $U \subseteq X$ gilt $U \subseteq f^{-1}(f(U))$.

Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel für die Gleichheit in (a) und (b) an.

Platzaufgabe 7 Gegeben ist die Relation $R := \{(1, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Untersuchen Sie R auf Reflexivität, Symmetrie, Identitivität und Transitivität.

(b) Bestimmen Sie die durch R erzeugte Äquivalenzrelation und deren Äquivalenzklassen.

Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 2

Hausaufgaben

Hausaufgabe 5

(a) Skizzieren Sie den Graphen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} : x \mapsto (x^2 - 4)^2$.
Untersuchen Sie f anhand der Skizze auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von $g : [1, 2] \to [0, 9] : x \mapsto (x^2 - 4)^2$.
Untersuchen Sie g anhand der Skizze auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Skizzieren Sie den Graphen von $h : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(2x)}$.
Untersuchen Sie h anhand der Skizze auf Injektivität und Surjektivität.

(d) Sei $P := \{\, X \in \operatorname{Pot}(\mathbb{N}) \,:\, X \text{ ist endlich} \,\}$.
Untersuchen Sie $\kappa : P \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : M \mapsto |M|$ auf Injektivität und Surjektivität.

Hausaufgabe 6 Gegeben ist die folgende Abbildung.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{4x}{x^2 - 4}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Abbildung f.

(b) Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob $f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}$ bijektiv ist.
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\left(f|_{\mathbb{R}_{>2}}^{\mathbb{R}_{>0}}\right)^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie $f^{-1}(\{0, 1\})$.

Hausaufgabe 7 Gegeben ist die Relation $(\sim)$ auf einer Menge M. Untersuchen Sie $(\sim)$ auf Reflexivität, Symmetrie, Identitivität und Transitivität.

(a) $M := \mathbb{N}^2$ und $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$ für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$.

(b) Sei M die Menge der Abbildungen von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{1, 2, 3\}$.
Sei $f \sim g :\Leftrightarrow f \circ g = f$ für $f, g \in M$.

Hausaufgabe 8

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)^2$ die Äquivalenzklassen $[\pi]$ und $[\frac{\pi}{2}]$.

(b) Sei auf $M := \operatorname{Pot}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\emptyset\}$ die Relation $X \approx Y :\Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$ für $X, Y \in M$ gegeben. Sei $(\sim)$ die von $(\approx)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf M. Geben Sie die Äquivalenzklassen von $(\sim)$ an.