

Blatt 13

Platzaufgaben

Platzaufgabe 42 Welche der folgenden Basen von $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ sind Orthonormalbasen?

- (1) $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- (2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$
- (3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Platzaufgabe 43 Bestimmen Sie jeweils eine Orthonormalbasis der folgenden Unterräume.

- (1) $\mathbb{R} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 1}$.
- (2) $\mathbb{R} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{3 \times 1}$.
- (3) $\mathbb{R} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$.

Platzaufgabe 44 Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_t := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & t \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- (1) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t symmetrisch?
- (2) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t orthogonal?

Platzaufgabe 45 Welche der folgenden Basen von $\mathbb{C}^{2 \times 1}$ sind Orthonormalbasen?

- (1) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- (2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- (3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Platzaufgabe 46 Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C} \left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{3 \times 1}$.

Blatt 13

Hausaufgaben

Hausaufgabe 49 Seien $s, t \in \mathbb{C}$ Parameter. Sei $A_{s,t} := \begin{pmatrix} 3is+t & -s-it & \sqrt{2}(is-t) \\ s+it & 3is+t & -\sqrt{2}(s+it) \\ \sqrt{2}(is-t) & \sqrt{2}(s+it) & 2(is+t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$.

- (1) Für welche $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ ist $A_{s,t}$ hermitesch?
- (2) Für welche $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ ist $A_{s,t}$ unitär?

Hausaufgabe 50

- (1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$.
- (2) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{C}^{4 \times 1}$.

Hausaufgabe 51 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit

$$T^t A T = D.$$

Hausaufgabe 52 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$.

- (1) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mit

$$\bar{U}^t A U = D.$$

- (2) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $V \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ und eine Diagonalmatrix $F \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mit

$$\bar{V}^t A^3 V = F.$$