Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 11

Platzaufgaben

Platzaufgabe 36 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

(a) $A := \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{2\times 2}$

(b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

(c) $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$

Entscheiden Sie jeweils auch über die Invertierbarkeit der Matrix.

Platzaufgabe 37 Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ von A.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Berechnen Sie jeweils eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(d) Bestimmen Sie jeweils die algebraische und die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts.

Platzaufgabe 38 Bestimmen Sie die Menge $\{A \in \mathbb{F}_2^{2\times 2} : A \text{ ist invertierbar}\}$.

Es gibt zwei alternative Lösungswege:

(a) Verwenden Sie die Determinante von A.

(b) Überprüfen Sie die lineare Unabhängigkeit des Spaltentupels von A.

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Blatt 11

Hausaufgaben

Hausaufgabe 41 Sei $d := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Sei $\delta : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ die Drehung um die Gerade $\langle d \rangle$ um den Winkel π.

(a) Finden Sie $x, y \in \mathbb{R}^{3\times 1} \smallsetminus \{0\}$ mit x orthogonal zu d und mit y orthogonal zu x und d.

(b) Sei $C := (d, x, y)$. Bestimmen Sie ${}_C\delta_C$.

(c) Sei $B := (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$.

(d) Bestimmen Sie ${}_B\delta_B$.

Hausaufgabe 42 Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sei $V_{x,y,z} := \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(V_{x,y,z})$ und $\det(x \cdot V_{x,y,z})$.

(b) Seien

$$\begin{array}{lcl} B & := & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : V_{x,y,z} \text{ ist nicht invertierbar}\} \\ B' & := & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)\} \, . \end{array}$$

Ist $B = B'$?

(c) Skizzieren Sie die Menge $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1) \in B\}$.

Hausaufgabe 43 Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{6\times 6}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums sowie die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

Hausaufgabe 44 Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{7\times 7}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums sowie die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

(c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A^2}(X)$ und die Eigenwerte von A^2.

(d) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A^2 eine Basis des zugehörigen Eigenraums sowie die algebraische und die geometrische Vielfachheit.