Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $T := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$. Sei $U := {}_{\mathbb{F}_3}\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ mit den angegebenen Basen von T und U als Spaltentupel.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

Basis von $T+U$: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Basis von $T \cap U$: $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Aufgabe 7 (5 Punkte) Gegeben sind die Basen $B = (1,\, X)$ und $C = (1+2X,\, 3+5X)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 1}$.

Wir betrachten die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1} \to \mathbb{R}[X]_{\leqslant 1}$ mit ${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie: ${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ${}_C\mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie: ${}_B\varphi_C = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ ${}_C\varphi_C = \begin{pmatrix} -52 & -135 \\ 20 & 52 \end{pmatrix}$

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/3	/3	/5	/2	/8	/4	/5	/ 30

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Nachscheinklausur

Wintersemester 2019/20

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $D := \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big)$. Sei $E := \big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big)$. Stellen Sie die folgende Wahrheitstafel auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
D	w	f	w	w	w	f	w	f
E	w	f	w	w	w	w	w	w
$D \Leftrightarrow E$	w	w	w	w	w	f	w	f

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $f(X) := X^3 + X^2 - X + 2 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen von $f(X)$: -2

(b) Zerlegen Sie $f(X)$ in ein Produkt aus Faktoren von Grad 1:

$$f(X) = (X+2)(X-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}))(X-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\sqrt{3}))$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_A(X) = X^2(X+1)^2$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten.

$$\mathrm{aV}_A(0) = 2, \quad \mathrm{aV}_A(1) = 2$$

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{E}_A(1)$.

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

(d) Wieviele Eigenvektoren zum Eigenwert 1 hat A?

3

Aufgabe 4 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der eindimensionalen $\mathbb{F}_3$-Unterräume von $\mathbb{F}_9$: 4

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Basen des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $\mathbb{F}_4$: 6

Nachscheinklausur | Mathematik 1 für inf, swt, msv | 14. 02. 2020

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 6&-4&-2&0&-1\\ 1&2&-2&0&-1\\ 0&0&3&0&-1\\ -1&2&0&4&0\\ 0&0&2&0&6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X-4)^4(X-5)$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5\times 1}$.

Basis von $\mathrm{E}_A(4)$: $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

Basis von $\mathrm{H}_A(4)$: $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Basis von $\mathrm{H}_A(5)$: $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$$S = \begin{pmatrix} -2&1&0&2&0\\ -1&1&0&1&0\\ 0&0&-1&0&-1\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 4&1&0&0&0\\ 0&4&1&0&0\\ 0&0&4&0&0\\ 0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&5 \end{pmatrix}$$
