

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $T := \mathbb{F}_3 \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5 \times 1}$. Sei $U := \mathbb{F}_3 \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{F}_3^{5 \times 1}$.

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{5 \times 5}$ mit den angegebenen Basen von T und U als Spaltentupel.

(a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform von A :

(b) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5 \times 1}$.

Basis von $T+U$:		Basis von $T \cap U$:	
-------------------	--	------------------------	--

Aufgabe 7 (5 Punkte) Gegeben sind die Basen $B = (1, X)$ und $C = (1+2X, 3+5X)$ von $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$.

Wir betrachten die \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ mit ${}_B \varphi_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie: ${}_B \text{id}_C =$		${}_C \text{id}_B =$	
---	--	----------------------	--

(b) Bestimmen Sie: ${}_B \varphi_C =$		${}_C \varphi_C =$	
---------------------------------------	--	--------------------	--

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte	/3	/3	/5	/2	/8	/4	/5	/ 30

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Nachscheinklausur

Wintersemester 2019/20

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $D := ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$. Sei $E := (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$. Stellen Sie die folgende Wahrheitstafel auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
D								
E								
$D \Leftrightarrow E$								

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $f(X) := X^3 + X^2 - X + 2 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen von $f(X)$:

(b) Zerlegen Sie $f(X)$ in ein Produkt aus Faktoren von Grad 1:

$f(X) =$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4 \times 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\chi_A(X) =$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $E_A(1)$. (d) Wieviele Eigenvektoren zum Eigenwert 1 hat A ?

Aufgabe 4 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der eindimensionalen \mathbb{F}_3 -Unterräume von \mathbb{F}_9 :

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Basen des \mathbb{F}_2 -Vektorraums \mathbb{F}_4 :

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$.

Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(X) = -(X - 4)^4(X - 5)$ ist bekannt.

(a) Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume von $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$.

Basis von $E_A(4)$:

Basis von $H_A(4)$:

Basis von $H_A(5)$:

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

$S =$

$J =$