Aufgabe 6 (2 Punkte) Seien A, B und C Aussagen.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Aussage $D := (A \Rightarrow (\neg B \wedge C))$ auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
D	f	f	w	f	w	w	w	w

(b) Drücken Sie die Aussage D durch Verknüpfung der Aussagen A, B und C mit $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus.

$$\neg A \vee (\neg B \wedge C)$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-2)^2 - 5$.

Bestimmen Sie: $f^{-1}(\{1\}) =$ $\{2+\sqrt{6}, 2-\sqrt{6}\}$

Sei auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $(\sim)$ definiert durch $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse: $[10]_\sim =$ $\{10, -6\}$

(b) Sei $M := \{3, 4, 5\}$. Bestimmen Sie die von $\{(3,4), (4,4)\}$ auf M erzeugte Äquivalenzrelation:

	3	4	5
3	×	×	
4	×	×	
5			×

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/4	/3	/3	/3	/2	/3	/ 20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 1

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unzulässig.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie: $\operatorname{ggT}(686, 532) =$ 14

(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{5-k} \cdot 3^k =$ 2^{10}

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien $f(X) := 5X^2 + 4X + 3$ und $g(X) := 2X + 5$ in $\mathbb{F}_7[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{F}_7[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ und mit $f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$.

$h(X) = \boxed{6X + 1}$, $r(X) = \boxed{5}$

(b) Sei $c(X) := X^3 + \frac{4}{3}X^2 + \frac{4}{3}X + \frac{1}{3} \in \mathbb{C}[X]$.

Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen von $c(X)$: $\boxed{-\frac{1}{3}}$

Zerlegen Sie $c(X)$ in ein Produkt aus Faktoren von Grad 1:

$c(X) = \boxed{(X + \frac{1}{3})(X + \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})(X + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

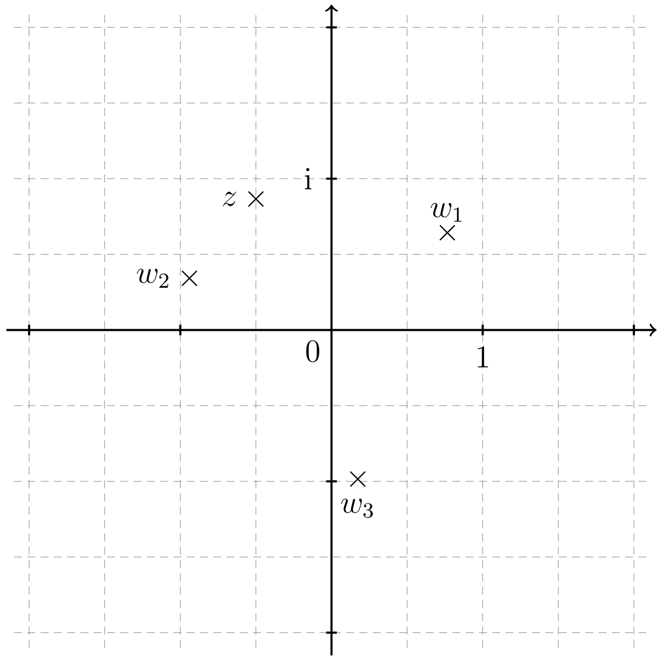
Sei $z := -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

(a) Berechnen Sie den Betrag und das Argument von z:

$|z| = \boxed{1}$, $\arg(z) = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$

(b) Zeichnen Sie z und die Menge $\{\, w \in \mathbb{C} : w^3 = z \,\}$ in die Gaußsche Zahlenebene.

Sei dazu $\{w_1, w_2, w_3\} := \{\, w \in \mathbb{C} : w^3 = z \,\}$. In der Skizze sind die Punkte zu bezeichnen.



Scheinklausur 1 **Mathematik 1 für inf, swt, msv** **21. 12. 2019**

Aufgabe 4 (3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{\, x \in \mathbb{F}_4 : x^3 + \alpha x^2 + (1+\alpha)x + 1 = 0 \,\} = \boxed{\{\alpha\}}$

(b) $\{\, x \in \mathbb{F}_8 : x^2 \cdot (\beta + \beta^2) = 1 \,\} = \boxed{\{1 + \beta + \beta^2\}}$

(c) $\{\, x \in \mathbb{F}_9 : (x + 1 + \iota)^3 = 1 \,\} = \boxed{\{-\iota\}}$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n}(3k^2 + 9k - 3) \;=\; (n+1)(n^2 + 5n - 3)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mittels Induktion.

Induktionsanfang: Beide Seiten der Gleichung haben für $n = 0$ den Wert: $\boxed{-3}$

Führen Sie den Induktionsschritt durch:

Sei $n \geqslant 1$. Wir schließen von $n-1$ nach n.

Zum einen ist

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n}(3k^2 + 9k - 3) &= \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} 3k^2 + 9k - 3\right) + 3n^2 + 9n - 3 \\
&\overset{\mathrm{IV}}{=} n((n-1)^2 + 5(n-1) - 3) + 3n^2 + 9n - 3 \\
&= n(n^2 - 2n + 1 + 5n - 5 - 3) + 3n^2 + 9n - 3 \\
&= n(n^2 + 3n - 7) + 3n^2 + 9n - 3 \\
&= n^3 + 6n^2 + 2n - 3\,.
\end{aligned}$$

Zum anderen ist

$$\begin{aligned}
(n+1)(n^2 + 5n - 3) &= n^3 + 5n^2 - 3n + n^2 + 5n - 3 \\
&= n^3 + 6n^2 + 2n - 3\,.
\end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

Aufgabe 6 (2 Punkte) Seien A, B und C Aussagen.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Aussage $D := (\neg B \Rightarrow (A \wedge C))$ auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
D	w	w	w	f	w	w	f	f

(b) Drücken Sie die Aussage D durch Verknüpfung der Aussagen A, B und C mit $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus.

$B \vee (A \wedge C)$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x+1)^2 - 7$.

Bestimmen Sie: $f^{-1}(\{-2\}) =$ $\{-1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}\}$

Sei auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $(\sim)$ definiert durch $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse: $[8]_\sim =$ $\{8, -10\}$

(b) Sei $M := \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie die von $\{(1,3)\}$ auf M erzeugte Äquivalenzrelation:

	1	2	3
1	×		×
2		×	
3	×		×

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/4	/3	/3	/3	/2	/3	/ 20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 1

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unzulässig.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie: $\operatorname{ggT}(784, 608) =$ 16

(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{5-k} \cdot 5^k =$ $2^5 \cdot 3^5$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien $f(X) := 3X^2 + 2X + 1$ und $g(X) := 2X + 4$ in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ und mit $f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$.

$h(X) = \boxed{4X + 3}$, $r(X) = \boxed{4}$

(b) Sei $c(X) := X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \in \mathbb{C}[X]$.

Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen von $c(X)$: $\boxed{-\frac{1}{2}}$

Zerlegen Sie $c(X)$ in ein Produkt aus Faktoren von Grad 1:

$c(X) = \boxed{(X + \frac{1}{2})(X - \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})(X - \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

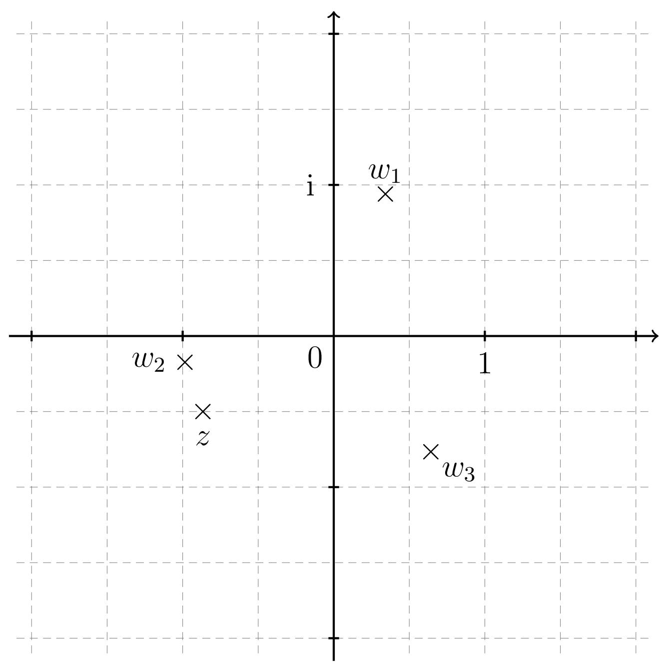
Sei $z := -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\mathrm{i}}{2} \in \mathbb{C}$.

(a) Berechnen Sie den Betrag und das Argument von z:

$|z| = \boxed{1}$, $\arg(z) = \boxed{\frac{7}{6}\pi}$

(b) Zeichnen Sie z und die Menge $\{ w \in \mathbb{C} : w^3 = z \}$ in die Gaußsche Zahlenebene.

Sei dazu $\{w_1, w_2, w_3\} := \{ w \in \mathbb{C} : w^3 = z \}$. In der Skizze sind die Punkte zu bezeichnen.



Scheinklausur 1 **Mathematik 1 für inf, swt, msv** **21. 12. 2019**

Aufgabe 4 (3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{ x \in \mathbb{F}_4 : x^3 + x^2 + (1+\alpha)x + (1+\alpha) = 0 \} = \boxed{\{1, \alpha\}}$

(b) $\{ x \in \mathbb{F}_8 : x^2 \cdot \beta = 1 \} = \boxed{\{1 + \beta\}}$

(c) $\{ x \in \mathbb{F}_9 : (x + 1 - \iota)^3 = 1 \} = \boxed{\{\iota\}}$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n}(6k^2 - 12k + 6) = (n+1)(2n^2 - 5n + 6)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mittels Induktion.

Induktionsanfang: Beide Seiten der Gleichung haben für $n = 0$ den Wert: $\boxed{6}$

Führen Sie den Induktionsschritt durch:

Sei $n \geqslant 1$. Wir schließen von $n - 1$ nach n.

Zum einen ist

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n}(6k^2 - 12k + 6) &= \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} 6k^2 - 12k + 6\right) + 6n^2 - 12n + 6 \\
&\overset{\text{IV}}{=} n(2(n-1)^2 - 5(n-1) + 6) + 6n^2 - 12n + 6 \\
&= n(2n^2 - 4n + 2 - 5n + 5 + 6) + 6n^2 - 12n + 6 \\
&= n(2n^2 - 9n + 13) + 6n^2 - 12n + 6 \\
&= 2n^3 - 3n^2 + n + 6\,.
\end{aligned}$$

Zum anderen ist

$$\begin{aligned}
(n+1)(2n^2 - 5n + 6) &= 2n^3 - 5n^2 + 6n + 2n^2 - 5n + 6 \\
&= 2n^3 - 3n^2 + n + 6\,.
\end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

Aufgabe 6 (2 Punkte) Seien A, B und C Aussagen.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Aussage $D := (C \Rightarrow (A \wedge \neg B))$ auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
D	f	w	w	w	f	w	f	w

(b) Drücken Sie die Aussage D durch Verknüpfung der Aussagen A, B und C mit $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus.

$$\neg C \vee (A \wedge \neg B)$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x+2)^2 - 6$.

Bestimmen Sie: $f^{-1}(\{1\}) =$ $\{-2+\sqrt{7}, -2-\sqrt{7}\}$

Sei auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $(\sim)$ definiert durch $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse: $[7]_\sim =$ $\{7, -11\}$

(b) Sei $M := \{2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie die von $\{(3,3), (3,4)\}$ auf M erzeugte Äquivalenzrelation:

	2	3	4
2	×		
3		×	×
4		×	×

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Tutors / der Tutorin:

Gruppennummer:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/4	/3	/3	/3	/2	/3	/ 20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 1

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unzulässig.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie: $\mathrm{ggT}(882, 684) =$ 18

(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung: $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{5-k} \cdot 7^k =$ 2^{15}

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien $f(X) := 5X^2 + 2X + 4$ und $g(X) := 3X + 5$ in $\mathbb{F}_7[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{F}_7[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ und mit $f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$.

$h(X) = \boxed{4X+1}$, $r(X) = \boxed{6}$

(b) Sei $c(X) := X^3 - \frac{4}{3}X^2 + \frac{4}{3}X - \frac{1}{3} \in \mathbb{C}[X]$.

Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen von $c(X)$: $\boxed{\frac{1}{3}}$

Zerlegen Sie $c(X)$ in ein Produkt aus Faktoren von Grad 1:

$c(X) = \boxed{(X - \frac{1}{3})(X - \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})(X - \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

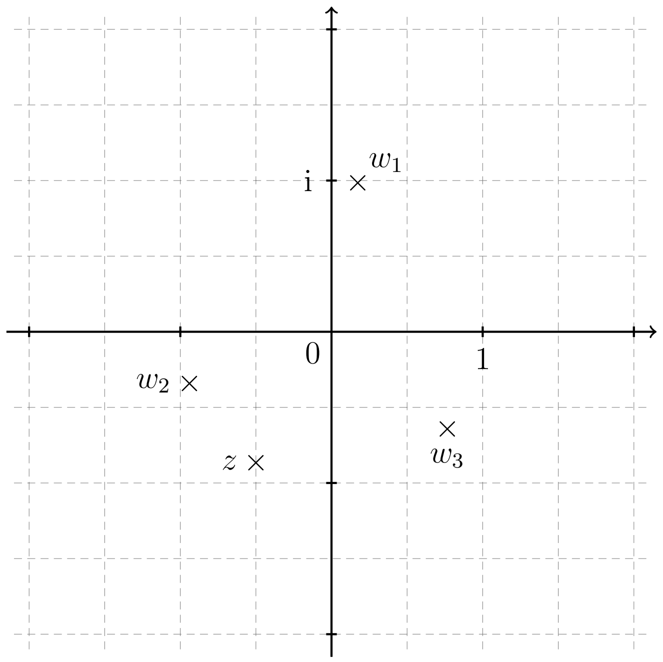
Sei $z := -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

(a) Berechnen Sie den Betrag und das Argument von z:

$|z| = \boxed{1}$, $\arg(z) = \boxed{\frac{4}{3}\pi}$

(b) Zeichnen Sie z und die Menge $\{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w^3 = z \,\}$ in die Gaußsche Zahlenebene.

Sei dazu $\{w_1, w_2, w_3\} := \{\, w \in \mathbb{C} \,:\, w^3 = z \,\}$. In der Skizze sind die Punkte zu bezeichnen.



Aufgabe 4 (3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{\, x \in \mathbb{F}_4 \,:\, x^3 + (1+\alpha)x^2 + x + (1+\alpha) = 0 \,\} = \boxed{\{1, 1+\alpha\}}$

(b) $\{\, x \in \mathbb{F}_8 \,:\, x^2 \cdot (1+\beta) = 1 \,\} = \boxed{\{\beta^2\}}$

(c) $\{\, x \in \mathbb{F}_9 \,:\, (x + 1 + \iota)^3 = -1 \,\} = \boxed{\{1 - \iota\}}$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3k^2 - 9k + 6) \;=\; (n+1)(n^2 - 4n + 6)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mittels Induktion.

Induktionsanfang: Beide Seiten der Gleichung haben für $n = 0$ den Wert: $\boxed{6}$

Führen Sie den Induktionsschritt durch:

Sei $n \geqslant 1$. Wir schließen von $n-1$ nach n.

Zum einen ist

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n}(3k^2 - 9k + 6) &= \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} 3k^2 - 9k + 6\right) + 3n^2 - 9n + 6 \\
&\overset{\mathrm{IV}}{=} n((n-1)^2 - 4(n-1) + 6) + 3n^2 - 9n + 6 \\
&= n(n^2 - 2n + 1 - 4n + 4 + 6) + 3n^2 - 9n + 6 \\
&= n(n^2 - 6n + 11) + 3n^2 - 9n + 6 \\
&= n^3 - 3n^2 + 2n + 6\,.
\end{aligned}$$

Zum anderen ist

$$\begin{aligned}
(n+1)(n^2 - 4n + 6) &= n^3 - 4n^2 + 6n + n^2 - 4n + 6 \\
&= n^3 - 3n^2 + 2n + 6\,.
\end{aligned}$$

Das ist dasselbe.

Aufgabe 6 (2 Punkte) Seien A, B und C Aussagen.

(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Aussage $D := (\neg A \Rightarrow (B \wedge C))$ auf.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
D	w	w	w	w	w	f	f	f

(b) Drücken Sie die Aussage D durch Verknüpfung der Aussagen A, B und C mit $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus.

$A \vee (B \wedge C)$

Aufgabe 7 (3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x-1)^2 - 8$.

Bestimmen Sie: $f^{-1}(\{2\}) =$ $\{1+\sqrt{10}, 1-\sqrt{10}\}$

Sei auf $\mathbb{R}$ die Äquivalenzrelation $(\sim)$ definiert durch $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse: $[9]_\sim =$ $\{9, -7\}$

(b) Sei $M := \{0, 1, 2\}$. Bestimmen Sie die von $\{(2, 0)\}$ auf M erzeugte Äquivalenzrelation:

	0	1	2
0	×		×
1		×	
2	×		×

Name, Vorname: **Matrikelnummer:**

Name des Tutors / der Tutorin: **Gruppennummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/2	/4	/3	/3	/3	/2	/3	/ 20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Scheinklausur 1

Wintersemester 2019/20

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unzulässig.
- Es wird nur die Angabe von Endergebnissen verlangt.
  Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie: $\operatorname{ggT}(588, 456) =$ 12

(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{5-k} \cdot 9^k =$ $2^5 \cdot 5^5$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien $f(X) := 2X^2 + 4X + 1$ und $g(X) := 3X + 2$ in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ und mit $f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$.

$h(X) = \boxed{4X + 2}$, $r(X) = \boxed{2}$

(b) Sei $c(X) := X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \in \mathbb{C}[X]$.

Bestimmen Sie die rationalen Nullstellen von $c(X)$: $\boxed{\frac{1}{2}}$

Zerlegen Sie $c(X)$ in ein Produkt aus Faktoren von Grad 1:

$c(X) = \boxed{(X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})(X + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3})}$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

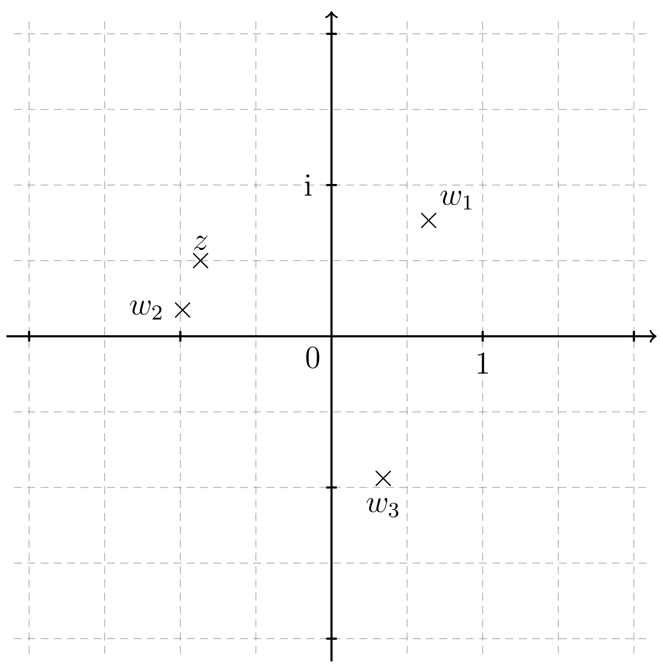
Sei $z := -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\mathrm{i}}{2} \in \mathbb{C}$.

(a) Berechnen Sie den Betrag und das Argument von z:

$|z| = \boxed{1}$, $\arg(z) = \boxed{\frac{5}{6}\pi}$

(b) Zeichnen Sie z und die Menge $\{\, w \in \mathbb{C} : w^3 = z \,\}$ in die Gaußsche Zahlenebene.

Sei dazu $\{w_1, w_2, w_3\} := \{\, w \in \mathbb{C} : w^3 = z \,\}$. In der Skizze sind die Punkte zu bezeichnen.



Scheinklausur 1 **Mathematik 1 für inf, swt, msv** **21. 12. 2019**

Aufgabe 4 (3 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{\, x \in \mathbb{F}_4 : x^3 + (1+\alpha)x^2 + \alpha x + 1 = 0 \,\} = \boxed{\{1 + \alpha\}}$

(b) $\{\, x \in \mathbb{F}_8 : x^2 \cdot (1 + \beta^2) = 1 \,\} = \boxed{\{\beta + \beta^2\}}$

(c) $\{\, x \in \mathbb{F}_9 : (x + 1 - \iota)^3 = -1 \,\} = \boxed{\{1 + \iota\}}$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(6k^2 + 12k - 18) = (n+1)(2n^2 + 7n - 18)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mittels Induktion.

Induktionsanfang: Beide Seiten der Gleichung haben für $n = 0$ den Wert: $\boxed{-18}$

Führen Sie den Induktionsschritt durch:

Sei $n \geqslant 1$. Wir schließen von $n - 1$ nach n.

Zum einen ist

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n}(6k^2 + 12k - 18) &= \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} 6k^2 + 12k - 18\right) + 6n^2 + 12n - 18 \\
&\overset{\text{IV}}{=} n(2(n-1)^2 + 7(n-1) - 18) + 6n^2 + 12n - 18 \\
&= n(2n^2 - 4n + 2 + 7n - 7 - 18) + 6n^2 + 12n - 18 \\
&= n(2n^2 + 3n - 23) + 6n^2 + 12n - 18 \\
&= 2n^3 + 9n^2 - 11n - 18\,.
\end{aligned}$$

Zum anderen ist

$$\begin{aligned}
(n+1)(2n^2 + 7n - 18) &= 2n^3 + 7n^2 - 18n + 2n^2 + 7n - 18 \\
&= 2n^3 + 9n^2 - 11n - 18\,.
\end{aligned}$$

Das ist dasselbe.