Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 9

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 33 Gegeben seien folgende Unterräume von $\mathbb{F}_3^{5\times 1}$.

$$T := {}_{\mathbb{F}_3}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad U := {}_{\mathbb{F}_3}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von T und eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $T + U$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $T \cap U$.

Lösung.

(a) Wir wollen eine Basis für T bestimmen. Wir rechnen.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&1&-1&0\\1&-1&1&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Damit ist also $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von T.

Wir wollen eine Basis für U bestimmen. Wir rechnen.

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Damit ist also $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von U.

(b, c) Wir wollen Basen von $T + U$ und $T \cap U$ bestimmen. Wir rechnen.

$$A := \begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&-1&0&0&-1&0\\1&1&-1&0&0&-1\\1&-1&1&0&0&0\\1&1&0&1&-1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&1&-1&-1&-1&-1\\0&0&1&-1&0&1\\0&1&0&-1&0&-1\\0&0&-1&0&-1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1&-1\\0&1&-1&-1&-1&-1\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&1&0&1&0\\0&0&-1&0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1&-1\\0&0&0&-1&-1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Es ist $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 3$ und $\ell_4 = 4$. Eine Basis von $T + U$ ist gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Eine Basis von $\{x \in \mathbb{F}_3^{6\times 1} : Ax = 0\}$ ist durch $\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\\\boxed{1}\\\boxed{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\\\boxed{0}\\\boxed{1}\end{pmatrix}\right)$ gegeben.

Also ist eine Basis von $T \cap U$ gegeben durch

$$\left(0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Hausaufgabe 34 Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ seien $v_t := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_t := \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die Mengen $A_1 := \{x \in \mathbb{R} : ||v_x|| = 1\}$ und $A_2 := \{x \in \mathbb{R} : ||w_x|| = 1\}$.

(b) Skizzieren Sie die Menge $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : v_x \text{ ist orthogonal zu } w_y\}$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie den Cosinus des von v_t und w_t eingeschlossenen Winkels.

Lösung.

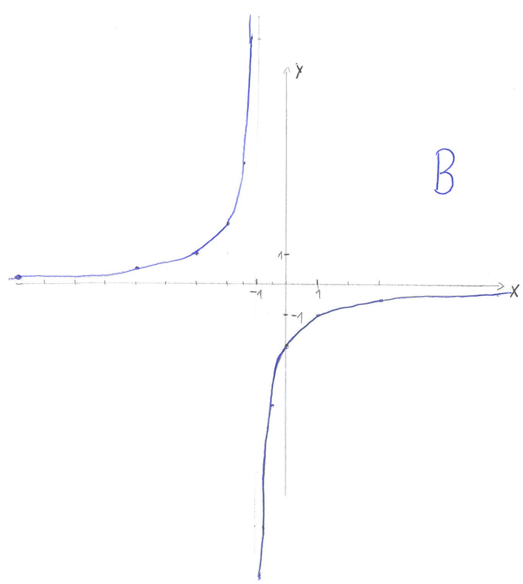
(a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $x \in A_1 \iff ||v_x|| = 1 \iff ||v_x||^2 = 1 \iff \frac{1}{4}(2 + x^2) = 1 \iff x^2 = 2$.
Also ist $A_1 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $x \in A_2 \iff ||w_x|| = 1 \iff ||w_x||^2 = 1 \iff 2x^2 + 4 = 1 \iff x^2 = -\frac{3}{2}$.
Also ist $A_2 = \emptyset$.

(b) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$(x, y) \in B \iff v_x^{\mathrm{t}} \cdot w_y = 0 \iff \frac{1}{2}(y + xy + 2) = 0 \iff (x+1)y = -2 \iff y = \frac{-2}{x+1}.$$

Im letzten Schritt konnten wir durch $x + 1$ teilen, da $(x + 1) \neq 0$ wegen $(x + 1)y = -2$.
Es ist also $B = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R} : y = \frac{-2}{x+1}\}$.



(c) Bezeichne α den von v_t und w_t eingeschlossenen Winkel. Dann gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{v_t^{\mathrm{t}} \cdot w_t}{||v_t|| \cdot ||w_t||} = \frac{\frac{1}{2}(t^2 + t + 2)}{\frac{1}{2}\sqrt{t^2 + 2} \cdot \sqrt{2t^2 + 4}} = \frac{t^2 + t + 2}{\sqrt{2(t^2 + 2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t^2 + t + 2}{t^2 + 2}.$$

Hausaufgabe 35 Sei K ein Körper. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

(a) Zeigen Sie, dass $P_n := \{f(X) \in K[X] : \deg(f(X)) \leqslant n\}$ ein Unterraum von $K[X]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ eine Basis von P_n ist. Bestimmen Sie $\dim_K P_n$.

(c) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen von P_2, die $X+1$ und X^2+1 enthalten.

Lösung.

(a) Wegen $\deg(0) = -\infty \leqslant n$ ist $0 \in P_n$.

Seien $f(X) = \sum_{j=0}^{n} f_j X^j$ und $g(X) = \sum_{j=0}^{n} g_j X^j$ in P_n gegeben. Seien $\lambda_1,\, \lambda_2 \in K$.

Dann ist

$$\lambda_1 f(X) + \lambda_2 g(X) = \lambda_1 \sum_{j=0}^{n} f_j X^j + \lambda_2 \sum_{j=0}^{n} g_j X^j = \sum_{j=0}^{n} (\lambda_1 f_j + \lambda_2 g_j) X^j.$$

Also ist $\deg(\lambda_1 f(X) + \lambda_2 g(X)) \leq n$ und es gilt $\lambda_1 f(X) + \lambda_2 g(X) \in P_n$.

(b) Es ist $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ eine Basis von P_n, da sich jedes Polynom $f(X)$ mit $\deg(f(X)) \leq n$ eindeutig als Linearkombination von $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ schreiben lässt.

Da $(X^0, X^1, \ldots, X^n)$ eine Basis von P_n ist, gilt $\dim_K P_n = n+1$.

(c) Wir zeigen zunächst, dass $B := (1, X+1, X^2+1)$ eine Basis von P_2 ist.

Wegen $\dim_K P_2 = 3$ genügt es zu zeigen, dass B linear unabhängig ist.
Seien dazu λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in K$ mit

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (X+1) + \lambda_3 \cdot (X^2+1) = 0$$

gegeben. Durch Koeffizientenvergleich folgt $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 0$. Insgesamt ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Also ist B linear unabhängig.

Möglichkeit 1. Sei $\tilde{B} := (X+1, X^2+1, 1)$. Dann ist $\tilde{B}$ analog zu B linear unabhängig und damit eine Basis von P_2. Außerdem ist $\tilde{B} \neq B$, da es bei Tupeln auf die Reihenfolge ankommt.

Also sind B und $\tilde{B}$ zwei verschiedene Basen von P_2, die $X+1$ und X^2+1 enthalten.

Möglichkeit 2. Wir zeigen, dass $C := (X, X+1, X^2+1)$ eine Basis von P_2 ist.

Wegen $\dim_K P_2 = 3$ genügt es zu zeigen, dass C linear unabhängig ist.
Seien dazu λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in K$ mit

$$\lambda_1 \cdot X + \lambda_2 \cdot (X+1) + \lambda_3 \cdot (X^2+1) = 0$$

gegeben. Durch Koeffizientenvergleich folgt $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 0$. Insgesamt ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Also ist C linear unabhängig.

Also sind B und C zwei verschiedene Basen von P_2, die $X+1$ und X^2+1 enthalten.

Anmerkung: Im weiteren Verlauf haben wir auch $P_n = K[X]_{\leqslant n}$ geschrieben.

Hausaufgabe 36 Wir nehmen zur Kenntnis: Es ist $\mathbb{F}_8$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, wobei das Produkt $\lambda \cdot x$ für $\lambda \in \mathbb{F}_2$ und $x \in \mathbb{F}_8$ im Körper $\mathbb{F}_8$ zu bilden ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(1, \beta, \beta^2)$ eine Basis von $\mathbb{F}_8$ als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie alle eindimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterräume von $\mathbb{F}_8$.

(c) Bestimmen Sie alle zweidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterräume von $\mathbb{F}_8$, die $1 + \beta$ enthalten. Wieviele verschiedene solche Unterräume gibt es?

Lösung.

(a) Nach §2.9 des Skripts lässt sich jedes Element von $\mathbb{F}_8$ eindeutig als $\mathbb{F}_2$-Linearkombination von $(1, \beta, \beta^2)$ schreiben. Daher ist $(1, \beta, \beta^2)$ eine Basis von $\mathbb{F}_8$ als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

(b) Jedes $x \in \mathbb{F}_8 \setminus \{0\}$ erzeugt einen eindimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterraum ${}_{\mathbb{F}_2}\langle x \rangle = \{0, x\}$ und jeder eindimensionale $\mathbb{F}_2$-Unterraum von $\mathbb{F}_8$ ist von dieser Form.

Also ist die Menge aller eindimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterräume von $\mathbb{F}_8$ gegeben durch

$$\big\{ {}_{\mathbb{F}_2}\langle x \rangle : x \in \mathbb{F}_8 \backslash \{0\} \big\} = \big\{ \{0, 1\}, \{0, \beta\}, \{0, \beta^2\}, \{0, 1+\beta\}, \{0, 1+\beta^2\}, \{0, \beta+\beta^2\}, \{0, 1+\beta+\beta^2\} \big\}.$$

(c) Nach (2) der letzten Bemerkung in §3.3.2 des Skripts hat jeder $\mathbb{F}_2$-Unterraum von $\mathbb{F}_8$, der $1 + \beta$ enthält, eine Basis, die $1 + \beta$ enthält.

Damit haben wir die folgende Menge von $\mathbb{F}_2$-Unterräumen von $\mathbb{F}_8$ zu betrachten.

$$\begin{aligned} \big\{ {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, x \rangle : x \in \mathbb{F}_8 \setminus \{0, 1 + \beta\} \big\} = \big\{ & {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, 1 \rangle, {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, 1 + \beta + \beta^2 \rangle, {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, \beta + \beta^2 \rangle, \\ & {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, 1 + \beta^2 \rangle, {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, \beta \rangle, {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, \beta^2 \rangle \big\} \end{aligned}$$

A priori passieren könnte passieren, dass nicht jeder dieser Unterräume tatsächlich zweidimensional ist. Die folgende Rechnung wird zeigen, dass dieses Phänomen nicht auftritt.

Wir berechnen alle diese Unterräume und erhalten folgende Dopplungen.

$$\begin{array}{lcccl} {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, 1 \rangle & = & \{0, 1, 1 + \beta, \beta\} & = & {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, \beta \rangle \\ {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, \beta^2 \rangle & = & \{0, 1 + \beta, \beta^2, 1 + \beta + \beta^2\} & = & {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, 1 + \beta + \beta^2 \rangle \\ {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, 1 + \beta^2 \rangle & = & \{0, 1 + \beta, 1 + \beta^2, \beta + \beta^2\} & = & {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 + \beta, \beta + \beta^2 \rangle \end{array}$$

Also gibt es 3 verschiedene zweidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Unterräume von $\mathbb{F}_8$, die $1+\beta$ enthalten.