Mathematatik 1 für inf, swt, msv

Lösung 7

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 25

Bestimmen Sie die folgenden Mengen und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(z)^2\}$

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-\mathrm{i}|\}$

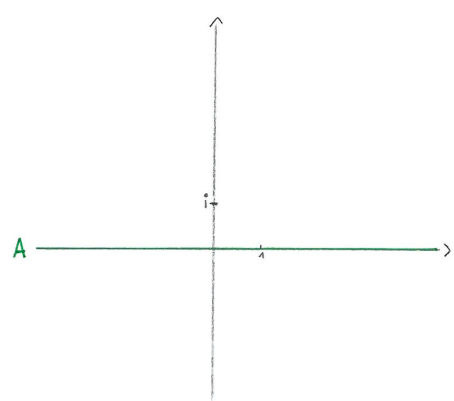
(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : z^5 = 16\sqrt{2} \cdot (1+\mathrm{i})\}$

Lösung.

(a) Sei $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.
Dann ist $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}((a+b\mathrm{i})^2) = \mathrm{Re}(a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}) = a^2 - b^2$.
Andererseits ist $\mathrm{Re}(z)^2 = \mathrm{Re}(a+b\mathrm{i})^2 = a^2$.
Aus diesen beiden Rechnungen folgt folgende Äquivalenz von Aussagen.

$$z \in A \iff \mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(z)^2 \iff a^2 - b^2 = a^2 \iff b^2 = 0 \iff b = 0 \iff \mathrm{Im}(z) = 0$$

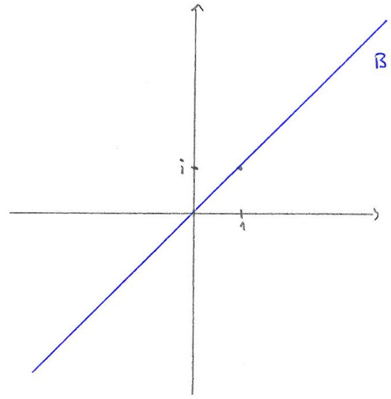
Insgesamt ist also $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$.



(b) Sei $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& |z-1| &&= |z-\mathrm{i}| \\
\iff & |z-1|^2 &&= |z-\mathrm{i}|^2 \\
\iff & (a-1)^2 + b^2 &&= a^2 + (b-1)^2 \\
\iff & a^2 - 2a + 1 + b^2 &&= a^2 + b^2 - 2b + 1 \\
\iff & -2a &&= -2b \\
\iff & a &&= b.
\end{aligned}$$

Damit ist also $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.



Anmerkung: Es ist B die Mittelsenkrechte der Punkte 1 und i in der Gaußschen Zahlenebene.

(c) Sei $w := 16\sqrt{2} \cdot (1 + \mathrm{i})$. Dann gelten folgende Gleichungen.

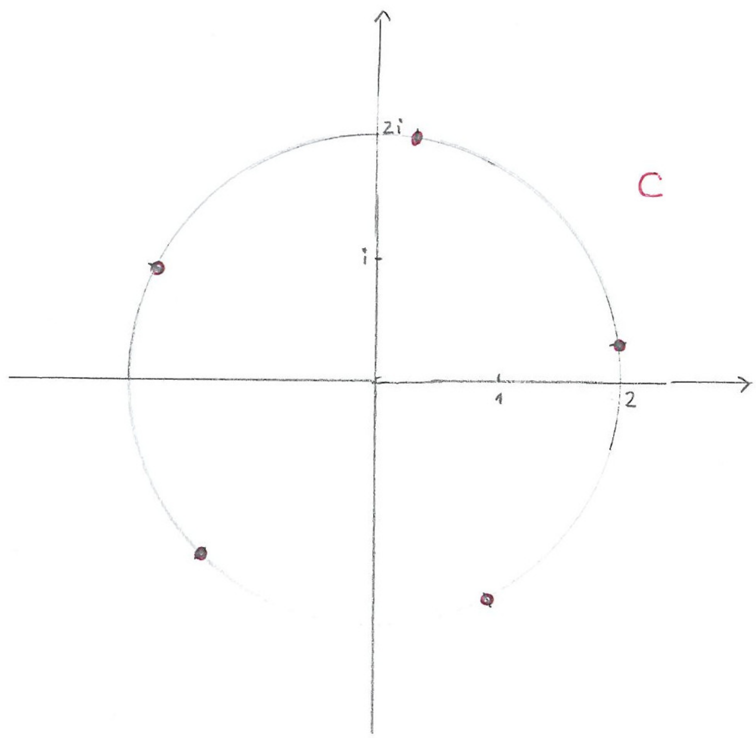
$$\begin{aligned} |w| &= |16\sqrt{2}| \cdot |1 + \mathrm{i}| = 16\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 32 \\ \arg(w) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} r &:= \sqrt[5]{|w|} = \sqrt[5]{32} = 2 \\ \varphi &:= \frac{\arg(w)}{5} = \frac{\pi}{20} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} C &= \{r \cdot (\cos(\varphi + k \cdot \tfrac{2\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\varphi + k \cdot \tfrac{2\pi}{5})) : k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\} \\ &= \{2(\cos(\tfrac{\pi}{20}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{20})), 2(\cos(\tfrac{9\pi}{20}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{9\pi}{20})), \\ &\qquad 2(\cos(\tfrac{17\pi}{20}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{17\pi}{20})), 2(\cos(\tfrac{5\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{5\pi}{4})), 2(\cos(\tfrac{33\pi}{20}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{33\pi}{20}))\} \end{aligned}$$



Anmerkung: Zur Zeichnung empfiehlt es sich die vorliegenden Winkel vom Bogenmaß in das Gradmaß umzurechnen.

Hausaufgabe 26

(a) Seien $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f(\overline{z}) = 0$ gilt.

(b) Zerlegen Sie $X^4 - \frac{9}{4}X^3 + \frac{7}{4}X^2 + X - \frac{3}{2} \in \mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

Lösung.

(a) Sei $f(X) = \sum_{k=0}^{n} f_k X^k$ mit $f_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \{0, \ldots, n\}$. Dann gilt folgende Gleichung.

$$f(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} f_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} f_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{f_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} f_k z^k} = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0$$

(b) Sei $g(X) := X^4 - \frac{9}{4}X^3 + \frac{7}{4}X^2 + X - \frac{3}{2} \in \mathbb{C}[X]$.

Zunächst bestimmen wir die Nullstellen von $g(X)$, die in $\mathbb{Q}$ liegen.

Dazu bestimmen wir die die Nullstellen von $4X^4 - 9X^3 + 7X^2 + 4X - 6$ der Form $\frac{u}{v}$ mit u und v aus $\mathbb{Z}$ teilerfremd.

Es ist u ein Teiler von -6, also $u \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$.

Es ist v ein Teiler von 4, also $v \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$.

Durchprobieren aller 24 Möglichkeiten für $\frac{u}{v}$ ergibt die rationalen Nullstellen $p = 1$ und $q = -\frac{3}{4}$.

Eine Polynomdivision ergibt $g(X) = (X-1)(X+\frac{3}{4}) \cdot (X^2 - 2X + 2)$.

Ferner ist $X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1 = ((X-1) - \mathrm{i})((X-1) + \mathrm{i})$.

Insgesamt ergibt sich also $g(X) = (X-1)(X+\frac{3}{4})(X-(1+\mathrm{i}))(X-(1-\mathrm{i}))$.

Hausaufgabe 27 Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ folgende Gleichung gilt.

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir führen eine Induktion über $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ nach dem speziellen Induktionsprinzip.
Induktionsanfang. Für $n = 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0\cdot\varphi) & -\sin(0\cdot\varphi) \\ \sin(0\cdot\varphi) & \cos(0\cdot\varphi) \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 1$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Als Induktionsvoraussetzung verwenden wir

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos((n-1)\varphi) & -\sin((n-1)\varphi) \\ \sin((n-1)\varphi) & \cos((n-1)\varphi) \end{pmatrix}.$$

Daraus haben wir

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^n \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$$

zu folgern.
In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} \cos((n-1)\varphi) & -\sin((n-1)\varphi) \\ \sin((n-1)\varphi) & \cos((n-1)\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos((n-1)\varphi)\cos(\varphi) - \sin((n-1)\varphi)\sin(\varphi) & -\cos((n-1)\varphi)\sin(\varphi) - \sin((n-1)\varphi)\cos(\varphi) \\ \sin((n-1)\varphi)\cos(\varphi) + \cos((n-1)\varphi)\sin(\varphi) & -\sin((n-1)\varphi)\sin(\varphi) + \cos((n-1)\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos((n-1)\varphi + \varphi) & -\sin((n-1)\varphi + \varphi) \\ \sin((n-1)\varphi + \varphi) & \cos((n-1)\varphi + \varphi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die vierte Gleichung dieser Rechnung folgt aus der fünften Bemerkung in §2.12 des Skripts.

Hausaufgabe 28 Sei K ein Körper.
Zeigen Sie, dass für $t \in K$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ folgende Gleichung gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2n(n-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir führen eine Induktion über $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ nach dem speziellen Induktionsprinzip.
Induktionsanfang. Für $n = 0$ und $t \in K$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 0 \cdot t & 2 \cdot 0(0-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 0 \cdot t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 1$ und $t \in K$. Als Induktionsvoraussetzung verwenden wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1)t & 2(n-1)(n-2)t^2 \\ 0 & 1 & 2(n-1)t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Daraus haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2n(n-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu folgern.
In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1)t & 2(n-1)(n-2)t^2 \\ 0 & 1 & 2(n-1)t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2t + 2(n-1)t & 2(n-1)t \cdot 2t + 2(n-1)(n-2)t^2 \\ 0 & 1 & 2t + 2(n-1)t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2(n-1)(2+n-2)t^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2nt & 2n(n-1)t^2 \\ 0 & 1 & 2nt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$