Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 6

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 21

(a) Berechnen Sie $\left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{5}\right)\frac{(4+12\mathrm{i})\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} + \frac{1}{2+\mathrm{i}}$ in $\mathbb{C}$.

(b) Seien

$$\begin{aligned} f(X) &:= X^4 - (1+2\mathrm{i})X^3 + (-1+2\mathrm{i})X^2 + (8-5\mathrm{i})X + 5 \\ g(X) &:= \mathrm{i}X + (2-\mathrm{i}) \end{aligned}$$

in $\mathbb{C}[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X)$, $r(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

Lösung.

(a) Wir führen folgende Rechnung in $\mathbb{C}$ durch.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{5}\right)\frac{(4+12\mathrm{i})\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} + \frac{1}{2+\mathrm{i}} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{5}\right)\frac{(4+12\mathrm{i})\mathrm{i}(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})} + \frac{2-\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{5}\right)\frac{-44-12\mathrm{i}}{13} + \frac{2-\mathrm{i}}{5} \\ &= -\frac{44+12\mathrm{i}}{26} - \frac{12-44\mathrm{i}}{65} + \frac{2-\mathrm{i}}{5} \\ &= -\frac{22+6\mathrm{i}}{13} - \frac{12-44\mathrm{i}}{65} + \frac{2-\mathrm{i}}{5} \\ &= -\frac{110+30\mathrm{i}}{65} - \frac{12-44\mathrm{i}}{65} + \frac{26-13\mathrm{i}}{65} = \frac{-96+\mathrm{i}}{65} \end{aligned}$$

(b) Wir führen eine Polynomdivision in $\mathbb{C}[X]$ durch

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl} X^4 & - & (1+2\mathrm{i})X^3 & + & (-1+2\mathrm{i})X^2 & + & (8-5\mathrm{i})X & + & 5 & = g(X)\cdot h(X) + r(X) \\ -\big(X^4 & - & (1+2\mathrm{i})X^3\big) & & & & & & & \\ \hline & & 0 & + & (-1+2\mathrm{i})X^2 & + & (8-5\mathrm{i})X & & & \\ & & & - & \big((-1+2\mathrm{i})X^2 & + & 5X\big) & & & \\ \hline & & & & & & (3-5\mathrm{i})X & + & 5 & \\ & & & & & - & \big((3-5\mathrm{i})X & + & (-13-\mathrm{i})\big) & \\ \hline & & & & & & & & 18+\mathrm{i} & \end{array}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} h(X) &= -\mathrm{i}X^3 + (2+\mathrm{i})X - (5+3\mathrm{i}) \\ r(X) &= 18+\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 22 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

(a) Seien $x, y \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Es gilt $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{F}_9$. Es gilt $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ in $\mathbb{F}_9$.

(c) Ist $x \in \mathbb{F}_9$ mit $x^3 = 1$, so ist $x = 1$.

(d) $X^6 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_9[X]$.

Lösung.

(a) Wir widerlegen die Aussage durch ein Gegenbeispiel. In $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ gilt

$$(1+1)^3 = 8 \neq 2 = 1^3 + 1^3.$$

(b) Wir zeigen die Aussage mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und nutzen aus, dass $3 = 0$ in $\mathbb{F}_9$ gilt. Seien dazu $x, y \in \mathbb{F}_9$.

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}x^0y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$$

(c) Wir zeigen die Aussage wieder mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes. Sei dazu $x = (a + b\iota) \in \mathbb{F}_9$ mit $(a + b\iota)^3 = 1$ und $a, b \in \mathbb{F}_3$.

$$(a + b\iota)^3 = a^3 + 3a^2b\iota + 3a(b\iota)^2 + (b\iota)^3 = a^3 + (b\iota)^3 = a^3 - b^3\iota$$

Aus der Bedingung $(a^3 - b^3\iota) = 1$ folgt nun $a^3 = 1$ und $-b^3 = 0$. Also ist $a = 1$ und $b = 0$ in $\mathbb{F}_3$. Damit erhalten wir $x = (a + b\iota) = (1 + 0\iota) = 1$.

Alternativ kann man $x^3 = 1$ zu $x^3 - 1 = 0$ umformen und mit Hilfe der Aussage aus (b) direkt rechnen

$$0 = x^3 - 1 = x^3 + (-1)^3 = (x-1)^3.$$

Daraus folgt ebenfalls $x = 1$.

(d) Wir widerlegen die Aussage mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes. Wir berechnen das folgende Produkt in $\mathbb{F}_9[X]$.

$$(X^2+1)^3 = X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1 = X^6 + 1.$$

Also ist $X^6 + 1$ nicht irreduzibel.

Alternativ können wir auch ausnutzen, dass wegen $\iota^2 = -1$ auch $\iota^6 = (-1)^3 = -1$ gilt. Damit besitzt $X^6 + 1$ eine Nullstelle in $\mathbb{F}_9[X]$ und ist nicht irreduzibel.

Hausaufgabe 23 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{x \in \mathbb{F}_4 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + \beta = 0\}$

(d) $D := \{x \in \mathbb{F}_9 : x^3 = x\}$

Lösung.

(a) Für $x \in \mathbb{F}_4$ erhalten wir folgende Werte für $x^2 + x + 1$.

x	$x^2 + x + 1$
0	1
1	1
α	0
$1 + \alpha$	0

Also ist $A = \{\alpha, 1 + \alpha\}$.

(b) Für $x \in \mathbb{F}_8$ erhalten wir folgende Werte für $x^2 + x + 1$.

x	$x^2 + x + 1$
0	1
1	1
β	$1 + \beta + \beta^2$
$1 + \beta$	$1 + \beta + \beta^2$
β^2	$1 + \beta$
$1 + \beta^2$	$1 + \beta$
$\beta + \beta^2$	$1 + \beta^2$
$1 + \beta + \beta^2$	$1 + \beta^2$

Also ist $B = \emptyset$.

(c) Für $x \in \mathbb{F}_8$ erhalten wir folgende Werte für $x^2 + x + \beta$.

x	$x^2 + x + \beta$
0	β
1	β
β	β^2
$1 + \beta$	β^2
β^2	0
$1 + \beta^2$	0
$\beta + \beta^2$	$\beta + \beta^2$
$1 + \beta + \beta^2$	$\beta + \beta^2$

Also ist $C = \{\beta^2, 1 + \beta^2\}$.

(d) Für $x \in \mathbb{F}_9$ erhalten wir folgende Werte für x^3.

x	x^3
0	0
1	1
-1	-1
ι	$-\iota$
$-\iota$	ι
$1 + \iota$	$1 - \iota$
$1 - \iota$	$1 + \iota$
$-1 + \iota$	$-1 - \iota$
$-1 - \iota$	$-1 + \iota$

Also ist $C = \{0, 1, -1\} = \mathbb{F}_3$.

Hausaufgabe 24

(a) Berechnen Sie $\left(\dfrac{1}{1+\beta^2}+\beta^2\right)^5$ in $\mathbb{F}_8$.

(b) Seien

$$\begin{aligned} f(X) &:= (1+\beta^2)X^5+(1+\beta^2)X^2+(1+\beta+\beta^2)X+\beta \\ g(X) &:= X^2+\beta \end{aligned}$$

in $\mathbb{F}_8[X]$ gegeben. Bestimmen Sie $h(X)$, $r(X) \in \mathbb{F}_8[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X)\cdot g(X) + r(X)$$

ist.

Lösung.

(a) Wir benutzen zur Berechnung die folgende Tabelle aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} \beta^0 &= 1 \\ \beta^1 &= \beta \\ \beta^2 &= \beta^2 \\ \beta^3 &= 1+\beta \\ \beta^4 &= \beta+\beta^2 \\ \beta^5 &= 1+\beta+\beta^2 \\ \beta^6 &= 1+\beta^2 \\ \beta^7 &= 1 \end{aligned}$$

Also ist das Inverse von $1+\beta^2=\beta^6$ gegeben durch β, denn $\beta^7=1$. Damit erhalten wir

$$\left(\frac{1}{1+\beta^2}+\beta^2\right)^5 = \left(\beta+\beta^2\right)^5 = \left(\beta^4\right)^5 = \beta^{20} = \beta^7\cdot\beta^7\cdot\beta^6 = 1+\beta^2\,.$$

(b) Wir führen eine Polynomdivision in $\mathbb{F}_8[X]$ durch

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(1+\beta^2)X^5 & & & + & (1+\beta^2)X^2 & + & (1+\beta+\beta^2)X & + & \beta & = & g(X)\cdot h(X)+r(X) \\
-\big((1+\beta^2)X^5 & + & X^3\big) & & & & & & & & \\
\hline
 & & X^3 & + & (1+\beta^2)X^2 & + & (1+\beta+\beta^2)X & & & & \\
 & - & \big(X^3 & & & + & \beta X\big) & & & & \\
\hline
 & & & & (1+\beta^2)X^2 & + & (1+\beta^2)X & + & \beta & & \\
 & & & - & \big((1+\beta^2)X^2 & & & + & 1\big) & & \\
\hline
 & & & & & & (1+\beta^2)X & + & (1+\beta) & &
\end{array}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} h(X) &= (1+\beta^2)X^3+X+(1+\beta^2) \\ r(X) &= (1+\beta^2)X+(1+\beta). \end{aligned}$$