Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 5

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 17 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{(a, b) \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} : a \cdot b = 1\}$

(b) $B := \{(a, b) \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : a \cdot b = 1\}$

(c) $C := \{(a, b) \in ((\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) \times ((\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) : a \cdot b = 0\}$

(d) $D := \{(a, b) \in ((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) \times ((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) : a \cdot b = 0\}$

Lösung.

(a) Nach dem letzen Lemma aus §2.3 im Skript ist $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ein Körper. Daher gibt es für $a \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ genau ein $b \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ mit $(a, b) \in A$.

Durch Rechnung erhalten wir folgendes Ergebnis.

$$A = \{(1, 1), (2, 7), (3, 9), (4, 10), (5, 8), (6, 11), (7, 2), (8, 5), (9, 3), (10, 4), (11, 6), (12, 12)\}$$

(b) Wir rechnen nach, dass $x \cdot y \neq 1$ ist für $x \in \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ und $y \in \mathbb{Z}/12$.

Damit ist also $B \subseteq \{1, 5, 7, 11\} \times \{1, 5, 7, 11\}$. Durch Rechnung erhalten wir

$$B = \{(1, 1), (5, 5), (7, 7), (11, 11)\}.$$

(c) Nach dem letzen Lemma aus §2.3 im Skript ist $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ein Körper. Damit ist $C = \emptyset$.

(d) Wir rechnen nach, dass $x \cdot y \neq 0$ ist für $x \in \{1, 5, 7, 11\}$ und $y \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$.

Damit ist also $D \subseteq \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \times \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$. Durch Rechnung erhalten wir

$$D = \{(2, 6), (3, 4), (3, 8), (4, 3), (4, 6), (4, 9), (6, 2), (6, 4), (6, 6), (6, 8), (6, 10),\\ (8, 3), (8, 6), (8, 9), (9, 4), (9, 8), (10, 6)\}.$$

Hausaufgabe 18 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $A := \{x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : x^2 + x + 1 = 0\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} : x^2 + x + 1 = 0\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} : 2x^3 + x^2 + 1 = 0\}$

(d) $D := \{x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : 2x^3 + x^2 + 1 = 0\}$

Lösung.

(a) In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gelten folgende Gleichungen.

$$\begin{array}{rcccl} 0^2+0+1 &=& 1 &=& 1 \\ 1^2+1+1 &=& 3 &=& 0 \\ 2^2+2+1 &=& 7 &=& 1 \end{array}$$

Damit folgt $A = \{1\}$.

(b) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gelten folgende Gleichungen.

$$\begin{array}{rcccl} 0^2+0+1 &=& 1 &=& 1 \\ 1^2+1+1 &=& 3 &=& 3 \\ 2^2+2+1 &=& 7 &=& 1 \\ 3^2+3+1 &=& 13 &=& 1 \\ 4^2+4+1 &=& 21 &=& 3 \\ 5^2+5+1 &=& 31 &=& 1 \end{array}$$

Damit folgt $B = \emptyset$.

(c) In $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gelten folgende Gleichungen.

$$\begin{array}{rcccl} 2\cdot 0^3+0^2+1 &=& 1 &=& 1 \\ 2\cdot 1^3+1^2+1 &=& 4 &=& 4 \\ 2\cdot 2^3+2^2+1 &=& 2\cdot 1+4+1 &=& 0 \\ 2\cdot 3^3+3^2+1 &=& 2\cdot(-1)+2+1 &=& 1 \\ 2\cdot 4^3+4^2+1 &=& 2\cdot 1+2+1 &=& 5 \\ 2\cdot 5^3+5^2+1 &=& 2\cdot(-1)+4+1 &=& 3 \\ 2\cdot 6^3+6^2+1 &=& 2\cdot(-1)+1+1 &=& 0 \end{array}$$

Damit folgt $C = \{2, 6\}$.

(d) In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gelten folgende Gleichungen.

$$\begin{array}{rcccl} 2\cdot 0^3+0^2+1 &=& 1 &=& 1 \\ 2\cdot 1^3+1^2+1 &=& 4 &=& 0 \\ 2\cdot 2^3+2^2+1 &=& 2\cdot 0+0+1 &=& 1 \\ 2\cdot 3^3+3^2+1 &=& 2\cdot(-1)+1+1 &=& 0 \end{array}$$

Damit folgt $D = \{1, 3\}$.

Hausaufgabe 19

(a) Seien

$$\begin{aligned} f(X) &:= 2X^5 - X^4 + 2X^3 + 5X^2 - X + 10 \\ g(X) &:= X^3 + 2X^2 + X - 3 \end{aligned}$$

in $\mathbb{Q}[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $h(X)$, $r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

(b) Seien

$$\begin{aligned} f(X) &:= X^3 + 3X^2 + 1 \\ g(X) &:= 2X^2 + 1 \end{aligned}$$

in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben.

Bestimmen Sie $h(X)$, $r(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

Lösung.

(a) Wir führen folgende Polynomdivision in $\mathbb{Q}[X]$ durch.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
2X^5 & -X^4 & +2X^3 & +5X^2 & -X & +10 & = (X^3+2X^2+X-3)\cdot(2X^2-5X+10) + (-4X^2-26X+40) \\
-(2X^5 & +4X^4 & +2X^3 & -6X^2) & & & \\
\hline
 & -5X^4 & & +11X^2 & -X & & \\
 & -(-5X^4 & -10X^3 & -5X^2 & +15X) & & \\
\hline
 & & 10X^3 & +16X^2 & -16X & +10 & \\
 & & -(10X^3 & +20X^2 & +10X & -30) & \\
\hline
 & & & -4X^2 & -26X & +40 &
\end{array}$$

Also gilt $h(X) = 2X^2 - 5X + 10$ und $r(X) = -4X^2 - 26X + 40$.

(b) Wir führen folgende Polynomdivision in $\mathbb{F}_5[X]$ durch.

$$\begin{array}{rrrrl}
X^3 & +3X^2 & & +1 & = (2X^2+1)\cdot(3X+4) + (2X+2) \\
-(X^3 & & +3X) & & \\
\hline
 & 3X^2 & +2X & +1 & \\
 & -(3X^2 & & +4) & \\
\hline
 & & 2X & +2 &
\end{array}$$

Also gilt $h(X) = 3X + 4$ und $r(X) = 2X + 2$.

Hausaufgabe 20

(a) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $f(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ mit $\deg(f(X)) \leqslant 2$.

(b) Entscheiden Sie, ob $X^6 + X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ irreduzibel ist.

Lösung.

(a) *Fall* $\deg(f(X)) = 1$. Es ist jedes normierte Polynom von Grad 1 irreduzibel.

Damit sind
$$X,\ \ X+1 \text{ und } X+2$$
die irreduziblen Polynome von Grad 1 in $\mathbb{F}_3[X]$.

Fall $\deg(f(X)) = 2$. Ist $f(X)$ nicht irreduzibel, so ist es das Produkt zweier (nicht notwendigerweise verschiedener) irreduzibler Polynome von Grad 1.

Wir bestimmen alle solchen Produkte.

$$\begin{array}{rcl} X \cdot X & = & X^2 \\ X \cdot (X+1) & = & X^2 + X \\ X \cdot (X+2) & = & X^2 + 2X \\ (X+1) \cdot (X+1) & = & X^2 + 2X + 1 \\ (X+1) \cdot (X+2) & = & X^2 + 2 \\ (X+2) \cdot (X+2) & = & X^2 + X + 1 \end{array}$$

Alle verbleibenden normierten Polynome von Grad 2 müssen irreduzibel sein. Dies sind
$$X^2 + 2X + 2,\ \ X^2 + X + 2 \text{ und } X^2 + 1.$$

Alternativ kann man auch alle normierten Polynome von Grad 2 in $\mathbb{F}_3[X]$ auf Nullstellen in $\mathbb{F}_3$ prüfen. Dies funktioniert, da normierte Polynome von Grad 2 genau dann irreduzibel sind, wenn sie keine Nullstellen haben.

(b) Es ist
$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 2) \cdot (X^2 + X + 2) \cdot (X^2 + 1)$$
nicht irreduzibel.