Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 4

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 13 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq j \leq 2n+1$ wahr sind.

(a) $a_1 \cdot \prod_{k=4}^{n+3} a_{2k-5} = \prod_{k=0}^{n} a_{2k+1}$

(b) $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}$

(c) $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n}^{2n+1} a_k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k$

(d) $\sum_{k=0}^{2n+1} \left((-1)^k a_k + 2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 a_k \right) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k$

Lösung.

(a) Wir zeigen die Aussage durch Ausschreiben des Produktes.

$$a_1 \cdot \prod_{k=4}^{n+3} a_{2k-5} = a_1 \cdot a_{8-5} \cdot a_{10-5} \cdots a_{2(n+3)-5} = a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdots a_{2n+1} = \prod_{k=0}^{n} a_{2k+1}$$

(b) Wir zeigen die Aussage durch Ausschreiben der Summe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) \\
&= a_1 + a_2 - a_2 + a_3 + a_4 - a_4 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n} + a_{2n+1} \\
&= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}
\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n}^{2n+1} a_k &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n+1}) \\
&= a_n + (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_{2n-1} + a_{2n+1}) \\
&= a_n + \sum_{k=0}^{2n+1} a_k\,.
\end{aligned}$$

Also zeigen wir, dass die gegebene Aussage nicht wahr ist. Für ein Gegenbeispiel setzen wir $a_j = 1$ für $0 \leq j \leq 2n+1$. Wir erhalten mit der Umformung von oben

$$\sum_{k=0}^{n} 1 + \sum_{k=n}^{2n+1} 1 = 1 + \sum_{k=0}^{2n+1} 1 = 2n+3$$
$$\sum_{k=0}^{2n+1} 1 = 2n+2\,.$$

Damit ist die Aussage widerlegt.

(d) Es ist

$$2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 = \begin{cases} 2(-1)^2 = 2 & \text{für } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \text{ mit } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \text{ mit } k \text{ gerade} \end{cases}.$$

Damit können wir die Aussage durch Umformen der Summe zeigen.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2n+1}\left((-1)^k a_k + 2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 a_k\right) \\
&\quad = (a_0+0) + (-a_1+2a_1) + (a_2+0) + (-a_3+2a_3) + \cdots + (a_{2n}+0) + (-a_{2n+1}+2a_{2n+1}) \\
&\quad = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} + a_{2n+1} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 14

(a) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}$. Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}}{2^{k+1}}$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $a^n - b^n = (a-b)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k}\right)$.

Lösung.

(a) Es ist $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}}{2^{k+1}} = \sum_{k=3}^{n} -\frac{\sqrt{k}}{2^k} + \frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}}{2^{k+1}} \\
&\quad = -\frac{\sqrt{3}}{2^3} + \left(\frac{\sqrt{4}}{2^4} - \frac{\sqrt{4}}{2^4}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}}{2^5} - \frac{\sqrt{5}}{2^5}\right) + \cdots + \left(\frac{\sqrt{n}}{2^n} - \frac{\sqrt{n}}{2^n}\right) + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \\
&\quad = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen die Gleichung durch Umformen der rechten Seite.

$$\begin{aligned}
(a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}b^{n-k}\right) &= a\left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}b^{n-k}\right) - b\left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}b^{n-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a^{k}b^{n-k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}b^{n-k+1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a^{k}b^{n-k}\right) - \left(\sum_{l=0}^{n-1} a^{l}b^{n-l}\right) && (l = k-1) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a^{k}b^{n-k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{k}b^{n-k}\right) && \text{(umbenennen)} \\
&= a^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{k}b^{n-k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{k}b^{n-k}\right) - b^n && \text{(abspalten)} \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 15

(a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1173, 555)$ mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus.
Finden Sie $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(1173, 555) = s \cdot 1173 + t \cdot 555$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(1173, 555)$ mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k\right)$.

Lösung.

(a) Wir berechnen $\mathrm{ggT}(1173, 555)$ mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus. Division mit Rest ergibt folgendes.

$$\begin{aligned} 1173 &= 555 \cdot 2 + 63 \\ 555 &= 63 \cdot 8 + 51 \\ 63 &= 51 \cdot 1 + 12 \\ 51 &= 12 \cdot 4 + 3 \\ 12 &= 3 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

Wir brechen also bei $l := 7$ ab und erhalten

$$\mathrm{ggT}(1173, 555) = 3.$$

Wir setzen $w_{l-1} = w_6 := 0$ und $w_{l-2} = w_5 := 1$ und erhalten weiter

$$\begin{aligned} w_4 &= 0 - 4 \cdot 1 = -4 \\ w_3 &= 1 - 1 \cdot (-4) = 5 \\ w_2 &= -4 - 8 \cdot 5 = -44 \\ w_1 &= 5 - 2 \cdot (-44) = 93. \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathrm{ggT}(1173, 555) = w_2 \cdot 1173 + w_1 \cdot 555 = -44 \cdot 1173 + 93 \cdot 555$.

(b) Die Primfaktorzerlegung von 1173 ist gegeben durch $1173 = 3 \cdot 17 \cdot 23$. Diese können wir zum Beispiel wie folgt bestimmen.

Da die Quersumme von 1173 durch 3 teilbar ist, erhalten wir

$$1173 = 3 \cdot 391\,.$$

Wir prüfen direkt, dass $2, 3, 5$ und 11 keine Teiler von 391 sind. Da 7 kein Teiler von $41 = 391 - 350$ und 13 kein Teiler von $1 = 391 - 390$ ist, sind beide auch keine Teiler von 391.

Wegen $391 = 340 + 51$ ist 17 ein Teiler von 391 und wir erhalten

$$1173 = 3 \cdot 391 = 3 \cdot 17 \cdot 23.$$

Analog finden wir die Primfaktorzerlegung von 555.

$$555 = 5 \cdot 111 = 3 \cdot 5 \cdot 37\,.$$

Also ist $\mathrm{ggT}(1173, 555) = 3$, gegeben durch den gemeinsamen Primfaktor.

(c) Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes erhalten wir die Primfaktorzerlegungen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 4^k = (1+4)^n = 5^n \,.$$

Also ist $\operatorname{ggT}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k \right) = 1$, da die beiden Zahlen keinen gemeinsamen Primfaktor besitzen.

Hausaufgabe 16 Gegeben sind $a := 1170$ und $b := 270$.

(a) Schreiben Sie a und b in Binärdarstellung und in Hexadezimaldarstellung.

(b) Bestimmen Sie Primfaktorzerlegungen von a und b und geben Sie $\mathrm{ggT}(a, b)$ an.

(c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $a^3 \cdot b^2 \cdot \binom{b}{2}$.

Lösung.

(a) Wir schreiben 1170 und 270 in Binärdarstellung und in Hexadezimaldarstellung.

$$\begin{aligned}
1170 &= 2^{10} + 2^7 + 2^4 + 2^1 = 10010010010_2 \\
1170 &= 4 \cdot 16^2 + 9 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 492_{16} \\
270 &= 2^8 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 100001110_2 \\
270 &= 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 10\mathrm{E}_{16}
\end{aligned}$$

(b) Die Primfaktorzerlegungen von 1170 und 270 sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
1170 &= 2 \cdot 585 = 2 \cdot 5 \cdot 117 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 39 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \\
270 &= 2 \cdot 135 = 2 \cdot 5 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(1170, 270) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$, gegeben durch die gemeinsamen Primfaktoren.

(c) Die Primfaktorzerlegungen von a^3 und b^2 können wir direkt aus den Primfaktorzerlegungen von a und b bestimmen.

$$\begin{aligned}
a^3 &= \left(2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13\right)^3 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 13^3 \\
b^2 &= \left(2 \cdot 3^3 \cdot 5\right)^2 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^2
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\binom{b}{2} = \frac{270!}{2! \cdot 268!} = \frac{269 \cdot 270}{2} = 269 \cdot 135 = 3^3 \cdot 5 \cdot 269.$$

Dabei ist 269 eine Primzahl. Wegen $17^2 = 289 > 269$ genügt es nachzurechnen, dass $2, 3, 5, 7, 11$ und 13 keine Teiler von 269 sind.

Zusammensetzen ergibt die Primfaktorzerlegung von $a^3 \cdot b^2 \cdot \binom{b}{2}$.

$$a^3 \cdot b^2 \cdot \binom{b}{2} = \left(2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 13^3\right) \cdot \left(2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^2\right) \cdot \left(3^3 \cdot 5 \cdot 269\right) = 2^5 \cdot 3^{15} \cdot 5^6 \cdot 13^3 \cdot 269$$