Mathematik 1 für inf, swt, msv

# Lösung 3

## Lösungen zu den Hausaufgaben

**Hausaufgabe 9** Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt.

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 3k^2 + k) \;=\; n^3(n+1)$$

*Lösung.* Wir führen eine Induktion über $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, nach dem speziellen Induktionsprinzip.
Induktionsanfang. Für $n = 1$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$\sum_{k=1}^{1}(4k^3 - 3k^2 + k) \;=\; 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 \;=\; 2 \;=\; 1^3(1+1)$$

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 2$. Als Induktionsvoraussetzung verwenden wir

$$\sum_{k=1}^{n-1}(4k^3 - 3k^2 + k) \;=\; (n-1)^3 n\,.$$

Daraus haben wir

$$\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 3k^2 + k) \;\overset{!}{=}\; n^3(n+1)$$

zu folgern.
In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 3k^2 + k) \;&=\; \sum_{k=1}^{n-1}(4k^3 - 3k^2 + k) + 4n^3 - 3n^2 + n \\
&\overset{\text{IV}}{=}\; (n-1)^3 n + 4n^3 - 3n^2 + n \\
&=\; (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)n + 4n^3 - 3n^2 + n \\
&=\; n^4 + n^3 \\
&=\; n^3(n+1)\,.
\end{aligned}$$

**Hausaufgabe 10** Finden Sie das minimale $s \in \mathbb{N}$, für welches folgende Aussage gilt.

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant s}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $n = 5a + 7b$.

Zeigen Sie dazu auch diese Aussage für das gefundene minimale $s$.

*Lösung.*
**Schritt 1.** Wir zeigen, dass $s \leqslant 24$ gilt. Dazu haben wir folgende Aussage zu zeigen.

Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 24}$ existieren $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $n = 5a + 7b$.

Wir führen eine Induktion über $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 24}$, nach dem allgemeinen Induktionsprinzip.
Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 24}$ gegeben.
Induktionsvoraussetzung. Für $n' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 24}$ mit $n' < n$ existieren $a', b' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $n' = 5a' + 7b'$.
*Fall* $n \leqslant 28$. Es gelten in der Tat folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned}
24 &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\
25 &= 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 \\
26 &= 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \\
27 &= 4 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \\
28 &= 0 \cdot 5 + 4 \cdot 7
\end{aligned}$$

*Fall* $n \geqslant 29$. Dann ist $n - 5 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 24}$ mit $n - 5 < n$.
Nach Induktionsvoraussetzung existieren also $a', b' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $n - 5 = 5a' + 7b'$. Damit ist

$$n = n - 5 + 5 = 5a' + 7b' + 5 = 5(a' + 1) + 7b'.$$

Wir können also $a := a' + 1$ und $b := b'$ wählen und haben so die Behauptung für $n$ gezeigt.
**Schritt 2.** Wir zeigen, dass $s \geqslant 24$ gilt. Insgesamt folgt dann $s = 24$.
Dazu zeigen wir, dass es keine $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $23 = 5a + 7b$ gibt.
*Annahme.* Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $23 = 5a + 7b$.
Wegen $5 \cdot 5 = 25 > 23$ und $4 \cdot 7 = 28 > 23$, ist dann $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $b \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Durch Nachrechnen stellen wir fest, dass für alle diese Möglichkeiten $5a + 7b \neq 23$ gilt; im *Widerspruch* zur Annahme.

**Hausaufgabe 11** Gegeben sei folgende Funktion.

$$f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,n) \longmapsto f(x,n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ xf(x, n-1) & \text{falls } n \geqslant 1 \text{ und } n \equiv_2 1 \\ f(x^2, \frac{n}{2}) & \text{falls } n \geqslant 2 \text{ und } n \equiv_2 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(x,n) = x^n$ ist für $(x,n) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

*Lösung.* Wir führen eine Induktion über $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, nach dem allgemeinen Induktionsprinzip.
Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ gegeben.
Induktionsvoraussetzung. Für $n' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $n' < n$ und $y \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt $f(y, n') = y^{n'}$.
*Fall* $n = 0$. Für $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$f(x,0) \; = \; 1 \; = \; x^0$$

*Fall* $n \geqslant 1$ *und* $n \equiv_2 1$. Für $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$f(x,n) \; = \; xf(x, n-1) \; \overset{\text{IV}}{=} \; xx^{n-1} \; = \; x^n \, .$$

*Fall* $n \geqslant 1$ *und* $n \equiv_2 0$. Für $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$f(x,n) \; = \; f\Big(x^2, \frac{n}{2}\Big) \; \overset{\text{IV}}{=} \; (x^2)^{\frac{n}{2}} \; = \; x^n \, .$$

**Hausaufgabe 12** Wir betrachten die Fibonaccifolge

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \longmapsto f(n) := f_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 1 & \text{falls } n = 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{falls } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $(m,n) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2} \times \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt.

$$f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$$

*Lösung.* Wir führen eine Induktion über $n \in \mathbb{N}$, nach dem allgemeinen Induktionsprinzip.
Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben.
Induktionsvoraussetzung. Für $n' \in \mathbb{N}$ mit $n' < n$ und $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ gilt

$$f_{m+n'} = f_m f_{n'+1} + f_{m-1} f_{n'} \, .$$

*Fall* $n = 1$. Für $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$f_m f_{1+1} + f_{m-1} f_1 \; = \; f_m + f_{m-1} \; = \; f_{m+1}$$

*Fall* $n = 2$. Für $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$f_m f_{2+1} + f_{m-1} f_2 \; = \; 2f_m + f_{m-1} \; = \; f_m + f_{m+1} \; = \; f_{m+2}$$

*Fall* $n \geqslant 3$. Für $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ gilt in der Tat folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} f_{m+n} &= f_{m+n-1} + f_{m+n-2} \\ &\overset{\text{IV}}{=} f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1} + f_m f_{n-1} + f_{m-1} f_{n-2} \\ &= f_m (f_n + f_{n-1}) + f_{m-1}(f_{n-1} + f_{n-2}) \\ &= f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n \end{aligned}$$