Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 12

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 45 Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{5\times 5}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des Hauptraums.

(c) Bestimmen Sie eine Jordanbasis und eine Jordansche Normalform von A.

Lösung.

(a) Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom und benutzen dabei, dass A eine obere Block-Dreiecksmatrix ist.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(A - X\cdot \mathrm{E}_5) &= \det \begin{pmatrix} 2-X & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1-X & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3-X & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-X \end{pmatrix} \\
&= (2-X)(3-X)\cdot \det \begin{pmatrix} -1-X & 3 & 0 \\ 2 & -X & 0 \\ 0 & -1 & 3-X \end{pmatrix} \\
&= (2-X)(3-X)^2 \det \begin{pmatrix} -1-X & 3 \\ 2 & -X \end{pmatrix} \\
&= (2-X)(3-X)^2(X^2+X-6) = -(X-2)^3(X-3)^2
\end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1 := 2$ und $\lambda_2 := 3$ mit $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 3$ und $\mathrm{aV}_A(3) = 2$.

(b) Wir betrachten zuerst den Eigenwert $\boxed{\lambda_1 = 2}$.

Es ist $A_{(1)} = (A - 2\mathrm{E}_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 3$ müssen wir eine Basis von $\mathrm{H}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$ finden.

Um später in Teil (c) Hauptvektorketten für eine Jordanbasis bestimmen zu können, gehen wir dabei wie folgt vor. Zuerst konstruieren wir eine Basis von $\mathrm{E}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$. Diese ergänzen wir zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ und anschließend zu einer Basis von $\mathrm{H}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$.

Zur Bestimmung von $\mathrm{E}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$ bringen wir $A_{(1)}$ auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Mit $A' := \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ ist die Zeilenstufenform von $A_{(1)}^2$ dieselbe wie die von $A' \cdot A_{(1)} = \begin{pmatrix} 0&2&3&0&0 \\ 0&2&3&0&0 \\ 0&0&-1&1&3 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$.
Um eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ zu finden, bringen wir also zuerst diese Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 0&2&3&0&0 \\ 0&2&3&0&0 \\ 0&0&-1&1&3 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&1&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&1&3 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&-1&2 \\ 0&0&1&-1&2 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&1&-1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

$$(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix})$$

Mit $A'' := \begin{pmatrix} 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&1&-1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ ist die Zeilenstufenform von $A_{(1)}^3$ dieselbe wie die von $A'' \cdot A_{(1)} = \begin{pmatrix} 0&2&-1&-1&2 \\ 0&2&-1&-1&2 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$.
Um eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$ zu finden, bringen wir also zuerst diese Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 0&2&-1&-1&2 \\ 0&2&-1&-1&2 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&1&2&2&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&1&2&2&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^3) = \mathrm{H}_A(\lambda_1)$.

$$(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\3\\1\\0\\0 \end{pmatrix})$$

Nun betrachten wir den Eigenwert $\boxed{\lambda_2 = 3}$. Es ist $A_{(2)} = (A - 3\mathrm{E}_5) = \begin{pmatrix} -1&0&0&1&1 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&2&2&0&0 \\ 0&0&-1&0&3 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

Wegen $\mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 2$ müssen wir eine Basis von $\mathrm{H}_A(\lambda_2) = \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$ finden.

Wir benutzen das gleiche Vorgehen wie bei λ_1 und bringen $A_{(2)}$ zuerst auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} -1&0&0&1&1 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&2&2&0&0 \\ 0&0&-1&0&3 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0&3 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Also ist $(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(\lambda_2) = \mathrm{Kern}(A_{(2)})$).

Mit $\tilde{A}' := \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ ist die Zeilenstufenform von $A_{(2)}^2$ dieselbe wie die von

$\tilde{A}' \cdot A_{(2)} = \begin{pmatrix} -1&0&1&1&3 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&2&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$. Um eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$ zu finden, bringen wir also zuerst diese Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} -1&0&1&1&3 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&2&2&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&-1&-1&2 \\ 0&1&3&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&2 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2) = \mathrm{H}_A(\lambda_2)$.

$$(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix})$$

(c) Wir bestimmen eine Jordanbasis von A. Diese besteht aus der Konkatenation von Hauptvektorketten. Zuerst betrachten wir beide Eigenwerte getrennt.

Wir beginnen wieder mit $\boxed{\lambda_1 = 2}$ und starten mit der aus Teil (b) bekannten Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ des Hauptraumes $\mathrm{H}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$. Wir geben den Basisvektoren Bezeichnungen, die mit dem vorderen Index andeuten, in welchem Schritt wir sie hinzugefügt haben.

$$\begin{aligned}
x_{1,1} &:= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(1)}) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)\\
x_{2,1} &:= \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(1)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)\\
x_{3,1} &:= \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)
\end{aligned}$$

Alle Basisvektoren, die wir im letzten Schritt hinzugefügt haben, sind Teil einer Hauptvektorkette und damit Teil einer Jordanbasis. Hier war dies nur ein Basisvektor und für diesen setzen wir $y_{3,1} := x_{3,1}$.

Wir berechnen $A_{(1)} \cdot y_{3,1} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ um die Hauptvektorkette fortzusetzen.

Wir betrachten das Tupel $(x_{1,1},\ A_{(1)}y_{3,1})$, welches aus den Basisvektoren von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ und den eben berechneten Vektoren besteht. Dieses Tupel müssen wir mit einer Auswahl von $(x_{2,1})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$ ergänzen. In unserem Fall ist dies aber nicht mehr nötig, da das Tupel bereits aus $2 = \dim(\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2))$ Vektoren besteht.

Wir rechnen weiter $A_{(1)}^2 \cdot y_{3,1} = A_{(1)} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Wir betrachten das Tupel $(A_{(1)}^2 y_{3,1})$, welches wir mit einer Auswahl von $(x_{1,1})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ ergänzen müssen. Da $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ eindimensional ist, ist dies hier wieder nicht nötig.

Insgesamt erhalten wir damit eine einzelne Hauptvektorkette der Länge 3 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

$$(A_{(1)}^2 y_{3,1},\ A_{(1)}y_{3,1},\ y_{3,1}) = \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right).$$

Nun betrachten wir den zweiten Eigenwert $\boxed{\lambda_2 = 3}$. Aus Teil (b) kennen wir die Basis

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2) = \mathrm{H}_A(\lambda_2)$. Wir bezeichnen die Basisvektoren wie oben.

$$x_{1,1} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(2)}) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$$
$$x_{2,1} := \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$$

Im letzten Schritt haben wir nur einen Basisvektor hinzugefügt. Für diesen setzen wir $y_{2,1} := x_{2,1}$, da er Teil einer Jordanbasis ist.

Wir berechnen $A_{(2)} \cdot y_{2,1} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$.

Es ist nun $(A_{(2)}y_{2,1})$ mit einer Auswahl von $(x_{1,1})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)})$ zu ergänzen. Da $\mathrm{Kern}(A_{(2)})$ eindimensional ist, ist dieser Schritt auch hier nicht nötig.

Insgesamt erhalten wir damit eine einzelne Hauptvektorkette der Länge 2 zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$.

$$(A_{(1)}y_{2,1},\, y_{2,1}) = \left(\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Um eine Jordanbasis von A zu bestimmen, setzen wir nun alle während der Konstruktion aufgetretenen Hauptvektorketten zusammen. Dabei treffen wir eine Wahl, in welcher Reihenfolge verschiedene Hauptvektorketten auftreten. Innerhalb einer Hauptvektorkette ist die Reihenfolge vorgegeben. Wir erhalten folgende Jordanbasis von A.

$$\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}\Bigg)$$

Für jede dieser Hauptvektorketten besitzt eine Jordansche Normalform einen Jordanblock zum zugehörigen Eigenwert. Die Länge der Hauptvektorkette gibt dabei die Größe des Jordanblocks an.

In unserem Fall haben wir eine Hauptvektorkette der Länge 3 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und eine Hauptvektorkette der Länge 2 zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$. Die Reihenfolge der Blöcke ist durch die gewählte Reihenfolge der Hauptvektorketten in der Jordanbasis vorgegeben. Wir erhalten folgende Jordansche Normalform von A.

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 46 Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$$

mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = (2 - X)(-1 - X)^5$.

(a) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des Hauptraums.

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Lösung.

(a) Wir lesen aus dem charakteristischem Polynom die Eigenwerte $\lambda_1 := 2$ und $\lambda_2 := -1$ mit $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 1$ und $\mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 5$ ab.

Zuerst betrachten wir den Eigenwert $\boxed{\lambda_1 = 2}$.

Es ist $A_{(1)} := (A - 2\mathrm{E}_6) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Wegen $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 1$ müssen wir eine Basis von $\mathrm{H}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$ finden. Dazu bringen wir $A_{(1)}$ auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(\lambda_1) = \mathrm{H}_A(\lambda_1)$.

Als nächstes betrachten wir den Eigenwert $\boxed{\lambda_2 = -1}$.

Es ist $A_{(2)} := (A + 1 \cdot \mathrm{E}_6) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $\mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 5$ müssen wir eine Basis von $\mathrm{H}_A(\lambda_2) = \mathrm{Kern}(A_{(2)}^5)$ finden. Dieser hat Dimension $\mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 5$.

Wie in Hausaufgabe 45 bestimmen wir die Basis durch schrittweises Ergänzen. Dazu bringen wir zunächst $A_{(2)}$ auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}) = \mathrm{E}_A(\lambda_2)$.

Mit $A' := \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$ ist die Zeilenstufenform von $A_{(2)}^2$ dieselbe wie die von $A' \cdot A_{(2)} = \begin{pmatrix}3&0&0&0&0&3\\0&1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$. Um eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$ zu finden, bringen wir also zuerst diese Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix}3&0&0&0&0&3\\0&1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$.

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Mit $A'' := \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&-1&0&0&0\end{pmatrix}$ ist die Zeilenstufenform von $A_{(1)}^3$ dieselbe wie die von $A'' \cdot A_{(1)} = \begin{pmatrix}3&0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$. Diese Matrix besitzt die Zeilenstufenform $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$. Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$.

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Da $\mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 5$ ist, hat $\mathrm{H}_A(\lambda_2)$ die Dimension 5. Es hat aber bereits $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$ die Dimension 5, daher gilt $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^3) = \mathrm{Kern}(A_{(2)}^5) = \mathrm{H}_A(\lambda_2)$. Also ist die obere Basis auch eine Basis des Hauptraums zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$.

(b) Wir bestimmen eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{6\times 6}$ so, dass $J := S^{-1}AS$ eine Jordansche Normalform von A ist. Die Spalten von S bestehen aus Hauptvektorketten. Zuerst betrachten wir beide Eigenwerte getrennt.

Wir beginnen wieder mit $\boxed{\lambda_1 = 2}$ und starten mit der aus Teil (a) bekannten Basis $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ des Hauptraumes $\mathrm{H}_A(\lambda_1) = \mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Da bereits $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ der gesamte Hauptraum zu diesem Eigenwert ist, erhalten wir für jeden Basisvektor eine Hauptvektorkette der Länge 1. In unserem Fall setzen wir also $y_{1,1} := x_{1,1} := \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ und erhalten eine Hauptvektorkette der Länge 1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

$$(y_{1,1}) = \left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Nun betrachten wir den zweiten Eigenwert $\boxed{\lambda_2 = -1}$. Aus Teil (a) kennen wir die Basis
$\left(\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{H}_A(\lambda_2) = \mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$.

Wir geben den Basisvektoren Bezeichnungen, die mit dem vorderen Index andeuten, in welchem Schritt wir sie hinzugefügt haben.

$$x_{1,1} := \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\\frac{1}{2}\\1\\0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(2)}) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$$

$$x_{1,2} := \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(2)}) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$$

$$x_{2,1} := \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$$

$$x_{2,2} := \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2) \subseteq \mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$$

$$x_{3,1} := \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(A_{(2)}^3)$$

Alle Basisvektoren, die wir im letzten Schritt hinzugenommen haben, sind Teil einer Hauptvektorkette und damit Teil einer Jordanbasis. Hier war dies nur ein Basisvektor und für diesen setzen wir $y_{3,1} := x_{3,1}$.

Wir berechnen $A_{(2)} \cdot y_{3,1} = \begin{pmatrix} -1\\1\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$ um die Hauptvektorkette fortzusetzen.

Wir betrachten das Tupel $(x_{1,1},\ x_{1,2},\ A_{(2)}y_{3,1})$, welches aus den Basisvektoren von $\mathrm{Kern}(A_{(2)})$ und den eben berechneten Vektoren besteht. Dieses Tupel müssen wir mit einer Auswahl von $(x_{2,1},\ x_{2,2})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$ ergänzen. Es ist

$$x_{2,1} = A_{(2)} \cdot y_{3,1} - x_{1,2}.$$

und wir erhalten $x_{2,1} \in \langle x_{1,1},\ x_{1,2},\ A_{(2)}y_{3,1},\ x_{2,2}\rangle$.

Also ist $\langle x_{1,1},\ x_{1,2},\ A_{(2)}y_{3,1},\ x_{2,2}\rangle = \mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$. Da auch die Dimension von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$ mit der Anzahl der Vektoren im Tupel übereinstimmt, ist $(x_{1,1},\ x_{1,2},\ A_{(2)}y_{3,1},\ x_{2,2})$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2)$.

Alle Basisvektoren, die wir in diesem Schritt hinzugenommen haben, sind Teil einer neuen Hauptvektorkette. Hier war dies nur ein Basisvektor und für diesen setzen wir $y_{2,1} := x_{2,2}$.

Wir berechnen $A_{(2)}^2 \cdot y_{3,1} = A_{(2)} \cdot \begin{pmatrix} -1\\1\\1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$ und $A_{(2)} \cdot y_{2,1} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\-2\\-4\\0 \end{pmatrix}$ um die Hauptvektorketten fortzusetzen.

Wir betrachten das Tupel $(A_{(2)}^2 y_{3,1},\ A_{(2)}y_{2,1})$, welches aus den eben berechneten Vektoren besteht. Dieses Tupel ist nun mit einer Auswahl von $(x_{1,1},\ x_{1,2})$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(2)})$ zu ergänzen. Da $\mathrm{Kern}(A_{(2)})$ zweidimensional ist, ist dieser Schritt hier nicht nötig.

Insgesamt erhalten wir damit eine Hauptvektorkette der Länge 3 und eine Hauptvektorkette der Länge 2 zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

$$(A_{(2)}^2 y_{3,1},\ A_{(2)}y_{3,1},\ y_{3,1}) = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix})$$

$$(A_{(2)}y_{2,1},\ y_{2,1}) = (\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-2\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix})$$

Die gesuchte Matrix S besitzt nun als Spalten alle während der Konstruktion aufgetretenen Hauptvektorketten. Dabei treffen wir eine Wahl, in welcher Reihenfolge verschiedene Hauptvektorketten auftreten. Innerhalb einer Hauptvektorkette ist die Reihenfolge vorgegeben.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für jede dieser Hauptvektorketten besitzt eine Jordansche Normalform von A einen Jordanblock zum zugehörigen Eigenwert. Die Länge der Hauptvektorkette gibt dabei die Größe des Jordanblocks an.

In diesem Fall haben wir eine Hauptvektorkette der Länge 1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ und zwei Hauptvektorketten der Länge 3 bzw. 2 zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Die Reihenfolge der Blöcke ist durch die gewählte Reihenfolge der Hauptvektorketten in S vorgegeben. Daher erhalten wir folgende Jordansche Normalform J von A mit $S^{-1}AS = J$.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 47 Gegeben ist die folgende von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix.

$$A_t := \begin{pmatrix} 8 & 3t-4 & 10 \\ 0 & t & 0 \\ -5 & -t+3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_t in Abhängigkeit von t.

(b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

(c) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform von A_t in Abhängigkeit von t, gegebenenfalls mit Fallunterscheidungen.

Lösung.

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom, indem wir im ersten Schritt nach der zweiten Zeile entwickeln.

$$\chi_{A_t}(X) = \det(A_t - X \cdot \mathrm{E}_3) = \begin{pmatrix} 8-X & 3t-4 & 10 \\ 0 & t-X & 0 \\ -5 & -t+3 & -7-X \end{pmatrix}$$

$$= (t-X)\begin{pmatrix} 8-X & 10 \\ -5 & -7-X \end{pmatrix} = (t-X)(X^2-X-6) = -(X-t)(X+2)(X-3)$$

(b) Falls $t \notin \{-2, 3\}$ ist, besitzt A_t drei verschiedene Eigenwerte und ist daher diagonalisierbar. Wir müssen also noch die Fälle $t = -2$ und $t = 3$ genauer untersuchen.

Sei zuerst $t = -2$. Nach Teil (a) ist dann $\mathrm{aV}_{A_{-2}}(-2) = 2$. Wir berechnen $\mathrm{gV}_{A_{-2}}(-2)$. Dazu bestimmen wir eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_{-2} + 2\mathrm{E}_3)$.

$$\begin{pmatrix} 10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Also ist $\mathrm{gV}_{A_{-2}}(-2) = 2 = \mathrm{aV}_{A_{-2}}(-2)$ und damit ist A_{-2} diagonalisierbar.

Sei jetzt $t = 3$. Nach Teil (a) ist dann $\mathrm{aV}_{A_3}(3) = 2$. Wir berechnen $\mathrm{gV}_{A_3}(3)$. Dazu bestimmen wir eine Basis von $\mathrm{Kern}(A_3 - 3\mathrm{E}_3)$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Basis $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Also ist $\mathrm{gV}_{A_3}(3) = 1 \neq \mathrm{aV}_{A_3}(3)$ und damit ist A_3 nicht diagonalisierbar.

Insgesamt ist A_t diagonalisierbar für $t \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(c) Sei zuerst $t \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$. Nach Teil (b) ist A_t in diesem Fall diagonalisierbar. Eine Jordansche Normalform von A_t ist also gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Sei jetzt $t = 3$, so dass A_3 nicht diagonalisierbar ist.

Wegen $\mathrm{aV}_{A_3}(-2) = 1$ hat der Jordanblock zum Eigenwert -2 die Größe 1×1.

Wegen $\mathrm{aV}_{A_3}(3) = 2$ kann es entweder einen Jordanblock der Größe 2×2, oder zwei Jordanblöcke der Größe 1×1 zum Eigenwert 3 geben. Im zweiten Fall wäre A_3 jedoch diagonalisierbar. Also muss der erstes Fall eintreten und A_3 besitzt die folgende Jordansche Normalform.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 48 Gegeben ist die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} -25 & -27 & 13 \\ -21 & -19 & 11 \\ -80 & -80 & 42 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Es besitzt A den Eigenwert λ_1 mit $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 2$ und $\mathrm{E}_A(\lambda_1) = {}_{\mathbb{C}}\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

(a) Bestimmen Sie den Eigenwert λ_1 und seine geometrische Vielfachheit.

(b) Bestimmen Sie alle anderen Eigenwerte von A und jeweils ihre algebraische und geometrische Vielfachheit.

(c) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(d) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform von A.

Lösung.

(a) Nach Aufgabenstellung ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor von A. Wir rechnen

$$A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Also ist $\lambda_1 = 2$. Ebenfalls nach Aufgabenstellung ist $\mathrm{E}_A(\lambda_1)$ eindimensional, daher ist $\mathrm{gV}_A(\lambda_1) = 1$.

(b) Da A eine 3×3-Matrix ist, besitzt A neben dem Eigenwert λ_1 mit $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 2$ nur noch einen weiteren Eigenwert λ_2 mit $\mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 1$.

Für diesen gilt $\mathrm{tr}(A) = 2 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2$. Also $\lambda_2 = \mathrm{tr}(A) - 2\lambda_1 = -2 - 4 = -6$.

Wegen $1 \leq \mathrm{gV}_A(\lambda_2) \leq \mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 1$ ist $\mathrm{gV}_A(\lambda_2) = 1$.

(c) Es ist $\det(A) = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^1 = 4 \cdot (-6) = -24$.

(d) Aus Teil (b) wissen wir, dass $\mathrm{gV}_A(\lambda_1) \neq \mathrm{aV}_A(\lambda_1)$. Also ist A nicht diagonalisierbar.

Wegen $\mathrm{aV}_A(\lambda_2) = 1$ hat der Jordanblock zum Eigenwert λ_2 die Größe 1×1.

Wegen $\mathrm{aV}_A(\lambda_1) = 2$ kann es entweder einen Jordanblock der Größe 2×2, oder zwei Jordanblöcke der Größe 1×1 zum Eigenwert λ_1 geben. Im zweiten Fall wäre A jedoch diagonalisierbar. Also muss der erstes Fall eintreten und A besitzt die folgende Jordansche Normalform.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$