Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 11

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 41 Sei $d := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Sei $\delta : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ die Drehung um die Gerade $\langle d \rangle$ um den Winkel π.

(a) Finden Sie $x, y \in \mathbb{R}^{3\times 1} \smallsetminus \{0\}$ mit x orthogonal zu d und mit y orthogonal zu x und d.

(b) Sei $C := (d, x, y)$. Bestimmen Sie ${}_C\delta_C$.

(c) Sei $B := (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Bestimmen Sie ${}_B\mathrm{id}_C$ und ${}_C\mathrm{id}_B$.

(d) Bestimmen Sie ${}_B\delta_B$.

Lösung.

(a) Es ist $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $U := \{x \in \mathbb{R}^{3\times 1} : x \text{ ist orthogonal zu } d\} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir wählen $x := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ und berechnen $y := d \times x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Da die Drehung δ um den Winkel π den Vektor d auf der Drehachse festhält, den Vektor x auf $-x$ abbildet und den Vektor y auf $-y$ abbildet, gilt

$$\begin{array}{rcr} \delta(d) & = & d \\ \delta(x) & = & -x \\ \delta(y) & = & -y. \end{array}$$

Also ist ${}_C\delta_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Es ist ${}_B\mathrm{id}_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen ${}_C\mathrm{id}_B = ({}_B\mathrm{id}_C)^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Also ist ${}_C\mathrm{id}_B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) Es ist

$$\begin{array}{rcl} {}_B\delta_B & = & {}_B\mathrm{id}_C \cdot {}_C\delta_C \cdot {}_C\mathrm{id}_B \\ & = & \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Hausaufgabe 42 Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sei $V_{x,y,z} := \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $\det(V_{x,y,z})$ und $\det(x \cdot V_{x,y,z})$.

(b) Seien

$$\begin{aligned} B &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : V_{x,y,z} \text{ ist nicht invertierbar}\} \\ B' &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)\} . \end{aligned}$$

Ist $B = B'$?

(c) Skizzieren Sie die Menge $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1) \in B\}$.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$\begin{aligned} \det(V_{x,y,z}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2 - x^2 \\ 0 & z-x & z^2 - x^2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} y-x & y^2 - x^2 \\ z-x & z^2 - x^2 \end{pmatrix} \\ &= (y-x)(z^2 - x^2) - (z-x)(y^2 - x^2) \\ &= (y-x)(z+x)(z-x) - (z-x)(y+x)(y-x) \\ &= (y-x)(z-x)(z-y) \end{aligned}$$

Damit wird $\det(x \cdot V_{x,y,z}) = x^3 \cdot \det(V_{x,y,z}) = x^3(y-x)(z-x)(z-y)$.

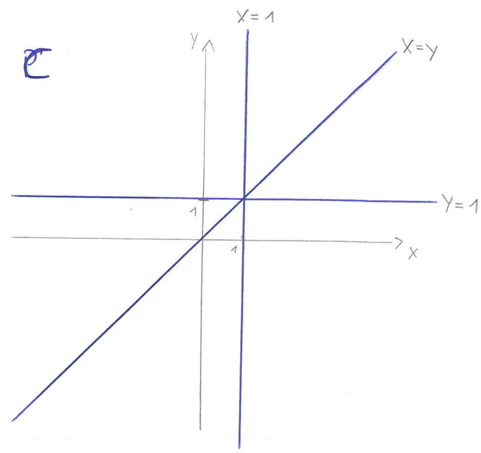
(b) Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(x, y, z) \in B \iff \det(V_{x,y,z}) = 0 \overset{\text{(a)}}{\iff} (y-x)(z-x)(z-y) = 0 \iff (x, y, z) \in B'.$$

Also ist $B = B'$.

(c) Es gilt $C \overset{\text{(b)}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, 1) \in B'\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = y) \vee (x = 1) \vee (y = 1)\}$.

Dies ergibt folgende Skizze.



Hausaufgabe 43 Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{6\times 6}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums sowie die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$
\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_6) \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -X & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1-X & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-X & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1-X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-X & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 1 & -1 & 1 \\ 0 & X & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X)X \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -X & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X)X \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X)X(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-X & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= -(1-X)X \cdot \det \begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 & X \\ 0 & -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X)^2X^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= (X-1)^2X^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -X & -X \\ 0 & -1 & -1-X \end{pmatrix} \\
&= -(X-1)^2X^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1-X \end{pmatrix} \\
&= -(X-1)^2X^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -X \end{pmatrix} \\
&= (X-1)^2X^4
\end{aligned}
$$

Also hat A die Eigenwerte 0 und 1.

(b) **Eigenwert** $\lambda_1 = 0$. Wir lesen die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(0) = 4$ aus $\chi_A(X)$ ab.

Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Kern}(A - 0 \cdot \mathrm{E}_6) = \mathrm{Kern}(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(0)$.

Damit gilt $\mathrm{gV}_A(0) = \dim_{\mathbb{F}_3}(\mathrm{E}_A(0)) = 2$ für die geometrische Vielfachheit.

Eigenwert $\lambda_2 = 1$.Wir lesen die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(1) = 2$ aus $\chi_A(X)$ ab.

Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot \mathrm{E}_6)$.

$$A - \mathrm{E}_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(1)$.

Damit gilt $\mathrm{gV}_A(1) = \dim_{\mathbb{F}_3}(\mathrm{E}_A(1)) = 2$ für die geometrische Vielfachheit.

Hausaufgabe 44 Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{7\times 7}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ und die Eigenwerte von A.

(b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums sowie die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

(c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A^2}(X)$ und die Eigenwerte von A^2.

(d) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von A^2 eine Basis des zugehörigen Eigenraums sowie die algebraische und die geometrische Vielfachheit.

Lösung.

(a) Wir rechnen.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(A - X \cdot \mathrm{E}_7) \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-X & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1-X \end{pmatrix} \\
&= (1-X)^3 \cdot (-1-X)^4 \\
&= -(X-1)^3 (X+1)^4
\end{aligned}$$

Also hat A die Eigenwerte 1 und -1.

(b) **Eigenwert** $\lambda_1 = 1$.Wir lesen die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(1) = 3$ aus $\chi_A(X)$ ab.

Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot \mathrm{E}_7)$.

$$A - \mathrm{E}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist (e_1) eine Basis von $\mathrm{E}_A(1)$.

Damit gilt $\mathrm{gV}_A(1) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{E}_A(1)) = 1$ für die geometrische Vielfachheit.

Eigenwert $\lambda_2 = -1$.Wir lesen die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_A(-1) = 4$ aus $\chi_A(X)$ ab.

Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_A(-1) = \mathrm{Kern}(A - (-1) \cdot \mathrm{E}_7) = \mathrm{Kern}(A + \mathrm{E}_7)$.

$$A + \mathrm{E}_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $(\mathrm{e}_4, \mathrm{e}_7)$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(-1)$.

Damit gilt $\mathrm{gV}_A(-1) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{E}_A(-1)) = 2$ für die geometrische Vielfachheit.

(c) Es ist $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir rechnen.

$$\begin{aligned} \chi_{A^2}(X) &= \det(A^2 - X \cdot \mathrm{E}_7) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-X & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-X & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-X & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix} \\ &= (1-X)^7 = -(X-1)^7 \end{aligned}$$

Also ist 1 der einzige Eigenwert von A^2.

(d) Wir lesen die algebraische Vielfachheit $\mathrm{aV}_{A^2}(1) = 7$ aus $\chi_{A^2}(X)$ ab.

Wir berechnen eine Basis des Eigenraums $\mathrm{E}_{A^2}(1) = \mathrm{Kern}(A^2 - 1 \cdot \mathrm{E}_7)$.

$$A^2 - \mathrm{E}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_4, \mathrm{e}_7)$ eine Basis von $\mathrm{E}_{A^2}(1)$.

Damit gilt $\mathrm{gV}_{A^2}(1) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{E}_{A^2}(1)) = 3$ für die geometrische Vielfachheit.