Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 10

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 37

(a) Bestimmen Sie alle $\mathbb{F}_3$-linearen Abbildungen $\mathbb{F}_3^{2\times 1} \to \mathbb{F}_3$.

Geben Sie an, welche injektiv und welche surjektiv sind.

(b) Wir betrachten die $\mathbb{F}_2$-lineare Abbildung $f : \mathbb{F}_8 \to \mathbb{F}_8 : x \mapsto x^2 + x$.

Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $\mathrm{Kern}(f)$. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{F}_2}(f(\mathbb{F}_8))$.

Lösung.

(a) Jede $\mathbb{F}_3$-linearen Abbildungen $\mathbb{F}_3^{2\times 1} \to \mathbb{F}_3$ ist von der Form mult_A mit $A \in \mathbb{F}_3^{1\times 2}$. Daher genügt es alle solche Matrizen aufzulisten.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung mult_A zu einer Matrix A ist genau dann injektiv, falls $\mathrm{Kern}(A) = 0$. Dies ist bei keiner der Abbildungen der Fall.

Die Abbildung mult_A zu einer Matrix A ist genau dann surjektiv, falls die Spalten von A erzeugend in $\mathbb{F}_3$ sind. Dies ist nicht der Fall, wenn $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alle anderen Abbildungen sind surjektiv.

(b) Wir berechnen zuerst den Kern von f.

$$\mathrm{Kern}(f) = \{\, x \in \mathbb{F}_8 \,:\, f(x) = 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{F}_8 \,:\, x^2 + x = 0 \,\} = \{0, 1\} = {}_{\mathbb{F}_2}\langle 1 \rangle$$

Also ist (1) eine Basis des $\mathbb{F}_2$-Vektorraums $\mathrm{Kern}(f)$.

Für die Dimension des Kerns gilt folgende Gleichung.

$$\dim_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_8) = \dim_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Kern}(f)) + \dim_{\mathbb{F}_2}(f(\mathbb{F}_8))$$

Wegen $\dim_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_8) = 3$ und $\dim_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Kern}(f)) = 1$ ist also $\dim_{\mathbb{F}_2}(f(\mathbb{F}_8)) = 2$.

Alternativ können wir auch das Bild von $\mathbb{F}_8$ unter f direkt berechnen.

$$f(\mathbb{F}_8) = \{\, x^2 + x \,:\, x \in \mathbb{F}_8 \,\} = \{0, \beta, \beta^2, \beta + \beta^2\} = {}_{\mathbb{F}_2}\langle \beta, \beta^2 \rangle$$

Da (β, β^2) linear unabhängig im $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_8$ ist, erhalten wir $\dim_{\mathbb{F}_2}(f(\mathbb{F}_8)) = 2$.

Hausaufgabe 38 Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1} \; : \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Sei B die Standardbasis und $B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$.

Sei C die Standardbasis und $C' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix ${}_C f_B$.

(b) Bestimmen Sie ${}_B \operatorname{id}_{B'}$, ${}_{C'} \operatorname{id}_C$ und ${}_{C'} f_{B'}$.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(f)$.

Lösung. Wir bezeichnen die gegebenen Basisvektoren wie folgt.

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad C = (c_1, c_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B' = (b_1', b_2', b_3', b_4') = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad C' = (c_1', c_2') = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(a) Um die beschreibende Matrix von f bezüglich den Basen B und C zu bestimmen, bilden wir die Basisvektoren von B unter f ab und schreiben das Ergebnis als Linearkombination der Basisvektoren von C.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -3 \cdot c_1 + 10 \cdot c_2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot c_1 + (-3) \cdot c_2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot c_1 + (-1) \cdot c_2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot c_1 + (-4) \cdot c_2$$

Damit erhalten wir

$${}_C f_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 4 \\ 10 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir bestimmen ${}_B \operatorname{id}_{B'}$ analog zu Teil (a).

$$\operatorname{id}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot b_1 + 3 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$

$$\operatorname{id}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 8 \cdot b_3 + (-2) \cdot b_4$$

$$\operatorname{id}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 + 7 \cdot b_2 + (-1) \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$

$$\operatorname{id}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + (-4) \cdot b_3 + 1 \cdot b_4$$

Da B die Standardbasis von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ ist, sind also die Spalten von ${}_B\operatorname{id}_{B'}$ gerade die Basisvektoren von B'. Das Gleiche gilt für ${}_C\operatorname{id}_{C'}$ und wir erhalten

$$ {}_B\operatorname{id}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad {}_C\operatorname{id}_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}. $$

Jetzt können wir ${}_{C'}\operatorname{id}_C$ als das Inverse von ${}_C\operatorname{id}_{C'}$ berechnen.

$$ {}_{C'}\operatorname{id}_C = \left({}_C\operatorname{id}_{C'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} $$

Zusammen mit ${}_C f_B$ aus Teil (a) erhalten wir daraus

$$ {}_{C'}f_{B'} = {}_{C'}\operatorname{id}_C \cdot {}_C f_B \cdot {}_B\operatorname{id}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 4 \\ 10 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

(c) Es ist $\operatorname{Kern}(f) = \{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_C f_B \cdot x = 0 \,\}$. Daher bringen wir ${}_C f_B$ aus Teil (a) auf Zeilenstufenform.

$$ \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 4 \\ 10 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{28}{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 28 \end{pmatrix} $$

Wir erhalten

$$ \operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Kern}({}_C f_B) = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -28 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. $$

Alternativ können wir $\operatorname{Kern}(f)$ auch mit Hilfe von ${}_{C'}f_{B'}$ aus Teil (b) bestimmen. Es gilt

$$ \operatorname{Kern}(f) = \{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_{B'}x \in \operatorname{Kern}({}_{C'}f_{B'}) \,\} $$

Also berechnen wir zunächst

$$ \operatorname{Kern}({}_{C'}f_{B'}) = \{\, v \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_{C'}f_{B'} \cdot v = 0 \,\} = {}_{\mathbb{R}}\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle. $$

Damit erhalten wir

$$ \begin{aligned} \operatorname{Kern}(f) &= \{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_{B'}x \in \operatorname{Kern}({}_{C'}f_{B'}) \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_{B'}x \in {}_{\mathbb{R}}\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \,\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_{B'}\operatorname{id}_B \cdot {}_B x \in {}_{\mathbb{R}}\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \,\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_B x \in {}_{\mathbb{R}}\langle {}_B\operatorname{id}_{B'} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \; {}_B\operatorname{id}_{B'} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \,\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}^{4\times 1} \;:\; {}_B x \in {}_{\mathbb{R}}\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \,\} = {}_{\mathbb{R}}\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle. \end{aligned} $$

Hausaufgabe 39 Wir betrachten die Abbildung $\kappa : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \,:\, A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass κ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie ${}_B\kappa_B$, ${}_B(\kappa\circ\kappa)_B$ und ${}_B\big((\kappa\circ\kappa)(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right))\big)$ bezüglich der Basis $B := \big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big)$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Bestimmen Sie $\Big(\kappa(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right))\Big)^2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Lösung.

(a) Seien $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ und $A, A' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Damit κ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist muss Folgendes gelten.

$$\kappa(\lambda A + \lambda' A') = \lambda\kappa(A) + \lambda'\kappa(A')$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda A + \lambda' A') &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\lambda A + \lambda' A')\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\lambda A)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\lambda' A')\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \lambda\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda'\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A' \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \lambda\kappa(A) + \lambda'\kappa(A').\end{aligned}$$

Also ist κ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(b) Wir bezeichnen die gegebenen Basisvektoren mit $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Um die beschreibende Matrix von f bezüglich der Basis B zu bestimmen, bilden wir die Basisvektoren von B unter κ ab und schreiben das Ergebnis wieder als Linearkombination der Basisvektoren von B.

$$\begin{aligned}
\kappa(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot b_1 + (-2)\cdot b_2 \\
\kappa(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot b_2 \\
\kappa(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2\cdot b_1 + (-4)\cdot b_2 + 1\cdot b_3 + (-2)\cdot b_4 \\
\kappa(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot b_2 + 1\cdot b_4
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$${}_B\kappa_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$${}_B(\kappa\circ\kappa)_B = {}_B\kappa_B \cdot {}_B\kappa_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist ${}_B\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ und wir können wir folgt rechnen.

$$ {}_B\big((\kappa\circ\kappa)(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right))\big) = {}_B(\kappa\circ\kappa)_B \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0&4&0\\-4&1&-16&4\\0&0&1&0\\0&0&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-32\\2\\-7\end{pmatrix} $$

(c) Es ist $\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{-1}$ und daher gilt

$$ \begin{aligned}
\Big(\kappa(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right))\Big)^2 &= \Big(\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Big)\Big(\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Big)\\
&= \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)\Big(\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Big)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\\
&= \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{E}_2\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)^2\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\0&1\end{smallmatrix}\right)\\
&= \kappa(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\4&1\end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix}9&-16\\4&-7\end{smallmatrix}\right)
\end{aligned} $$

Hausaufgabe 40 (a) Für einen Parameter $t\in\mathbb{R}$ seien $v_t := \left(\begin{smallmatrix}t\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$ und $w_t := \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\t\end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Bestimmen Sie alle $t\in\mathbb{R}$, für welche der Flächeninhalt des von v_t und w_t aufgespannten Parallelogramms gleich $2\sqrt{3}$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\left(\begin{smallmatrix}1&4&5&-3\\0&1&2&0\\-1&-4&-5&4\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^{3\times 4}$.

(c) Sei $f(X) := 3-2X-4X^2+X^3\in\mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$. Sei $B := (1+X+X^2, X+X^2, X^2)$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$. Sei $C := (1+X, X+X^2, X^2+X^3, X^3)$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$.

Sei $\varphi:\mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}\to\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit ${}_B\varphi_C = \left(\begin{smallmatrix}1&4&5&-3\\0&1&2&0\\-1&-4&-5&4\end{smallmatrix}\right)$.

Bestimmen Sie ${}_Cf(X)$, ${}_B\varphi\big(f(X)\big)$ und das Polynom $\varphi\big(f(X)\big)\in\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$.

Lösung.

(a) Der Flächeninhalt des von v_t und w_t aufgespannten Parallelogramms ist gegeben durch $||v_t\times w_t||$. Es gilt

$$ \left|\left|\begin{pmatrix}t\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}\right|\right| = \left|\left|\begin{pmatrix}2t\\3-t^2\\-2\end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{4t^2+(3-t^2)^2+4} = \sqrt{t^4-2t^2+13} $$

Wir müssen also folgende Gleichung lösen.

$$ \begin{aligned}
&\sqrt{t^4-2t^2+13} = 2\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ & t^4-2t^2+13 = 12\\
\Leftrightarrow\ & t^4-2t^2+1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & (t^2-1)^2 = 0
\end{aligned} $$

Damit erhalten wir $t\in\{-1,1\}$.

(b) Anwenden des Gaußverfahrens auf die gegebene Matrix liefert die folgende Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist nun die Anzahl der Stufenspalten und damit gleich 3.

(c) Um den Koordinatenvektor ${}_C f(X)$ zu bestimmen, schreiben wir f als Linearkombination der Basisvektoren aus C.

$$3 - 2X - 4X^2 + X^3 = \lambda_1(1+X) + \lambda_2(X+X^2) + \lambda_3(X^2+X^3) + \lambda_4 X^3, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$$

Das führt auf folgendes lineares Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 3 &= \lambda_1 \\ -2 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ -4 &= \lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 &= \lambda_3 + \lambda_4 \end{aligned}$$

Wir erhalten $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_4 = 0$. Also ist

$${}_C f(X) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Koordinatenvektor ${}_B\varphi\big(f(X)\big)$ rechnen wir

$${}_B\varphi\big(f(X)\big) = {}_B\varphi_C \cdot {}_C f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\varphi\big(f(X)\big) = (-12)\cdot(1+X+X^2) + (-3)\cdot(X+X^2) + 12\cdot X^2 = -12 - 15X - 3X^2$.