Künzer, Nitsche, Ritter Wintersemester 2019/20

Mathematik 1 für inf, swt, msv

Lösung 1

Lösungen zu den Hausaufgaben

Hausaufgabe 1 Gegeben seien folgende Aussagen.

A	$:\Leftrightarrow$	Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $\|x - q\| < \varepsilon$.
B	$:\Leftrightarrow$	Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $q \in \mathbb{Q}$ die Ungleichung $\|x - q\| \geqslant \varepsilon$ gilt.
C	$:\Leftrightarrow$	Es gibt $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass für alle $q \in \mathbb{Q}$ die Ungleichung $\|x - q\| \geqslant \varepsilon$ gilt.
D	$:\Leftrightarrow$	Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $q \in \mathbb{Q}$ so, dass $\|x - q\| < \varepsilon$ ist.

Man finde eine dieser Aussagen, die äquivalent ist zu $\neg A$. Man finde eine dieser Aussagen, die äquivalent ist zu $\neg B$. Natürlich sind die Antworten zu begründen.

Lösung. Zunächst drücken wir die Aussagen A, B, C und D durch Quantoren aus.

$$\begin{array}{rcl}
A & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \varepsilon \\
B & \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall q \in \mathbb{Q} : |x - q| \geqslant \varepsilon \\
C & \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall q \in \mathbb{Q} : |x - q| \geq \varepsilon \\
D & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \varepsilon
\end{array}$$

Für $\neg A$ folgt unter Verwendung der Bemerkung in §1.3 des Skripts folgende Äquivalenz.

$$\begin{array}{rcl}
\neg A & \Leftrightarrow & \neg\left(\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \varepsilon\right) \\
& \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall q \in \mathbb{Q} : \neg\left(|x - q| < \varepsilon\right) \\
& \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall q \in \mathbb{Q} : |x - q| \geqslant \varepsilon \\
& \Leftrightarrow & C
\end{array}$$

Analog folgt für $\neg B$ folgende Äquivalenz.

$$\begin{array}{rcl}
\neg B & \Leftrightarrow & \neg\left(\exists x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall q \in \mathbb{Q} : |x - q| \geqslant \varepsilon\right) \\
& \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists q \in \mathbb{Q} : \neg\left(|x - q| \geqslant \varepsilon\right) \\
& \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \varepsilon \\
& \Leftrightarrow & D
\end{array}$$

Hausaufgabe 2 Skizzieren Sie folgende Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x - 1)^2 - 1\}$

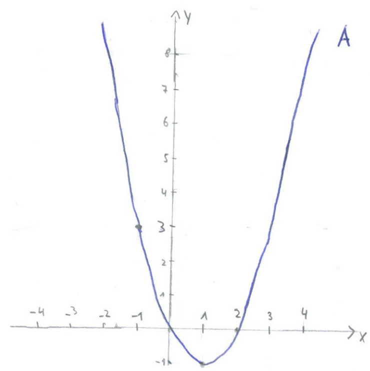
(b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0) \wedge (y \geqslant \frac{1}{x})\}$

(c) $C := (A \setminus B) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

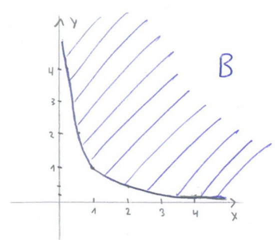
(d) $D := (A \setminus B) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Lösung.

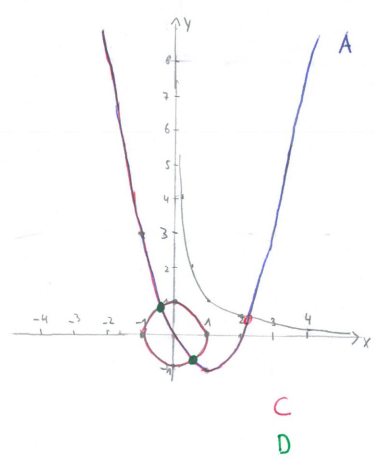
(a) Es ist A eine um 1 nach rechts und 1 nach unten verschobene Normalparabel.



(b) Es ist B die Fläche mit Rand über dem positiven Ast der Normalhyperbel.



(c, d) Es ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ein Kreis mit Radius 1 um den Ursprung. Damit ergibt sich folgende Skizze für die Mengen C und D.



Dabei gehört der Schnittpunkt von A mit der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ nicht zu C.

Hausaufgabe 3

(a) Seien A, B und C Aussagen. Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Aussage

$$D := (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge \neg(B \vee C))$$

auf. Zeigen Sie, dass D zur Aussage $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ äquivalent ist.

(b) Drücken Sie die durch folgende Wahrheitstafel definierten Aussagen E und F durch Verknüpfungen der Aussagen A, B und C mit $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ aus.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
E	f	w	f	f	w	w	w	f
F	f	f	w	f	f	w	f	w

Lösung.

(a) Wir stellen schrittweise die Wahrheitstabelle für D auf. Dies ergibt folgende Tabelle.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
$\neg(B \vee C)$	f	f	f	w	f	f	f	w
$A \wedge \neg B$	f	f	w	w	f	f	f	f
$B \wedge C$	w	f	f	f	w	f	f	f
$A \wedge \neg(B \vee C)$	f	f	f	w	f	f	f	f
D	w	f	w	w	w	f	f	f

Nun stellen wir schrittweise die Wahrheitstabelle für die Aussage

$$\tilde{D} := (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$$

auf. Dabei erhalten wir folgende Tabelle.

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	w	w	w	f	f
$A \vee C$	w	w	w	w	w	f	w	f
$\neg B \vee C$	w	f	w	w	w	f	w	w
$\tilde{D}$	w	f	w	w	w	f	f	f

Aus diesen beiden Tabellen lesen wir ab, dass D genau dann wahr ist, wenn $\tilde{D}$ wahr ist. Also gilt $D \Leftrightarrow \tilde{D}$.

(b) Zunächst beschreiben wir alle Spalten, in denen E wahr ist. Dies sind

$$(A \wedge B \wedge \neg C),\ (\neg A \wedge B \wedge C),\ (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \text{ und } (\neg A \wedge \neg B \wedge C).$$

Durch Verknüpfung dieser Ausdrücke mit $\vee$ erhalten wir einen Ausdruck für E. D.h. es gilt

$$E \quad \Leftrightarrow \quad (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C).$$

Analog erhalten wir

$$F \quad \Leftrightarrow \quad (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C).$$

Hausaufgabe 4 Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle Mengen A und B ist $\mathrm{Pot}(A \cap B) = \mathrm{Pot}(A) \cap \mathrm{Pot}(B)$.

(b) Für alle Mengen A und B ist $\mathrm{Pot}(A \cup B) = \mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B)$.

(c) Für alle Mengen A und B ist $\mathrm{Pot}(A \times B) = \mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B)$.

(d) Für alle Mengen A und B ist $\mathrm{Pot}(A \setminus B) = \mathrm{Pot}(A) \setminus \mathrm{Pot}(B)$.

Lösung.

(a) Diese Aussage ist wahr. Dies kann wie folgt gezeigt werden.
Sei X eine Menge. Dann gilt folgende Äquivalenz von Aussagen.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Pot}(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subseteq (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq B) \\ &\Leftrightarrow (X \in \mathrm{Pot}(A)) \wedge (X \in \mathrm{Pot}(B))) \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Pot}(A) \cap \mathrm{Pot}(B) \end{aligned}$$

Da Mengen genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente haben, folgt

$$\mathrm{Pot}(A \cap B) = \mathrm{Pot}(A) \cap \mathrm{Pot}(B).$$

(b) Diese Aussage ist falsch. Dies kann durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt werden.
Sei $A := \{1\}$ und $B := \{2\}$. Dann ist $A \cup B = \{1, 2\}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}(A \cup B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \\ \mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B) &= \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \end{aligned}$$

Insbesondere ist in diesem Fall $\mathrm{Pot}(A \cup B) \neq \mathrm{Pot}(A) \cup \mathrm{Pot}(B)$.

(c) Diese Aussage ist falsch. Dies kann durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt werden.
Sei $A := \{1\}$ und $B := \{1\}$. Dann ist $A \times B = \{(1, 1)\}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}(A \times B) &= \{\emptyset, \{(1, 1)\}\} \\ \mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B) &= \{\emptyset, \{1\}\} \times \{\emptyset, \{1\}\} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{1\})\} \end{aligned}$$

Insbesondere ist in diesem Fall $\mathrm{Pot}(A \times B) \neq \mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B)$.

(d) Diese Aussage ist falsch. Dies kann durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt werden. Sei $A := \{1\}$ und $B := \{1\}$. Dann ist $A \setminus B = \emptyset$ und es gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pot}(A \setminus B) & = & \{\emptyset\} \\ \mathrm{Pot}(A) \setminus \mathrm{Pot}(B) & = & \{\emptyset, \{1\}\} \setminus \{\emptyset, \{1\}\} = \emptyset \end{array}$$

Insbesondere ist in diesem Fall $\mathrm{Pot}(A \setminus B) \neq \mathrm{Pot}(A) \setminus \mathrm{Pot}(B)$.