Homologische Algebra

Matthias Künzer

Universität Bremen

17. Januar 2025

Inhalt

Verzeichnis der Sätze und einiger Lemmata

Vorwort

Die Homologische Algebra ist ein Werkzeug für die Algebraische Topologie, für die Gruppentheorie, für die Kommutative Algebra etc.

Technisch gesprochen ist die Homologische Algebra die Lehre der abelschen Kategorien und der additiven Funktoren zwischen diesen. Zunächst wird also der Begriff der abelschen Kategorie einzuführen sein. Es bilden e.g. die abelschen Gruppen eine solche abelsche Kategorie – und daher entlehnt sich auch der Name.

Die meisten der in der Natur auftretenden additiven Funktoren zwischen solchen abelschen Kategorien haben Defekte; sie sind teils nur linksexakt, wie etwa Homfunktoren; teils nur rechtsexakt, wie etwa Tensorfunktoren. Diese Defekte versucht man aufzufangen, indem man die gegebenen Funktoren ableitet und die gegebenen und die abgeleiteten Funktoren über eine lang exakte Sequenz verbindet.

Auf Übungen und Lösungen wird im Skript manchmal Bezug genommen, sie sind daher als Bestandteil des Skripts anzusehen.

Vorausgesetzt wird Lineare Algebra, insbesondere die Begriffe der abelschen Gruppe, des Körpers und des Vektorraums. Zorns Lemma wird an einer Stelle verwandt, bei der Konstruktion von Injektiven; für einen Beweis wird e.g. auf den Anhang von [**7**] verwiesen.

Für Korrekturen und Vereinfachungen danke ich Sebastian Thomas ([1]).

Bremen, den 07.04.2010

Matthias Künzer

Für zahlreiche Korrekturen und Vorschläge danke ich Andreas Bächle und Elias Schwesig. Für Korrekturen und Vorschläge danke ich Daniela-Maria Cococeanu, Moritz Gösling, Liviu-Lucian Ionesi, Markus Jedlitschky, Maximilian Kehrer, Simon Paridon, Nicolas Rau, Mathias Ritter, Nico Stein und Alexander Thumm. Für Aufgabe 77 danke ich Carsten Dietzel.

Für weitere Hinweise auf Fehler und Unklarheiten bin ich dankbar.

Stuttgart, den 20.07.2010 (und später)

Matthias Künzer

[1]Student der Universität Bremen, nicht identisch mit Sebastian Thomas von der RWTH Aachen.

Konventionen.

- Sind x und y Elemente einer Menge, so setzen wir $\partial_{x,y} := 1$, falls $x = y$, und $\partial_{x,y} := 0$, falls $x \neq y$.
- Sprechen wir davon, daß x und y zwei Elemente einer Menge sind, so kann dennoch $x = y$ oder $x \neq y$ sein. Etc.
- Die identische Abbildung auf einer Menge X wird id_X, 1_X, oder, falls keine Verwechslungsgefahr besteht, id oder 1 geschrieben.
- Ist R ein Ring und $k \geqslant 0$, so bezeichnet $\mathrm{E}_k := (\partial_{i,j})_{i,j} \in R^{k\times k}$ die Einheitsmatrix.
- Wir schreiben $X \sqcup Y$ für die disjunkte Vereinigung von Mengen X und Y.
- Wir schreiben $|X|$ für die Kardinalität einer Menge X.
- Wir schreiben $\mathrm{Pot}(X) = \{Y \;:\; Y \subseteq X\}$ für die Potenzmenge einer Menge X.
- Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen, und ist $x \in X$, so schreiben wir das Bild von x unter f als xf. Ihr Bild wird $Xf := \{xf \;:\; x \in X\}$ geschrieben.
- Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Morphismen in einer Kategorie, so schreiben wir ihr Kompositum $X \xrightarrow{fg} Z$ oder $X \xrightarrow{f\cdot g} Z$ (2).
- Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen, und sind $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ derart, daß $X'f \subseteq Y'$, dann schreiben wir $f|_{X'}^{Y'} : X' \longrightarrow Y'$, $x' \longmapsto x'f$ für die im Urbild- und Bildbereich eingeschränkte Abbildung. Falls $Y' = Y$, dann schreiben wir auch $f|_{X'} := f|_{X'}^{Y}$. Falls $X' = X$, dann schreiben wir auch $f|^{Y'} = f|_X^{Y'}$.
- Es *kommutiert* ein Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & X' \arrow[d, "x'"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

  in einer Kategorie, falls $fx' = xg$. Allgemeiner *kommutiert* ein Diagramm in einer Kategorie, wenn der zusammengesetzte Morphismus von einem seiner Objekte in ein anderes vom gewählten Weg unabhängig ist.
- Ist $a \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $\mathbf{Z}_{\geqslant a} := \{z \in \mathbf{Z} \;:\; z \geqslant a\}$, etc.
- Sind $a,\, b \in \mathbf{Z}$, so schreiben wir $[a, b] := \{z \in \mathbf{Z} \;:\; a \leqslant z \leqslant b\}$ für das ganzzahlige Intervall.
- Ist R ein kommutativer Ring, und sind $a,\, b,\, c \in R$, so schreiben wir $a \equiv_c b$, gesprochen "a kongruent modulo c zu b", falls es ein $x \in R$ mit $a - b = cx$ gibt.
- Ist R ein kommutativer Ring und $a \in R$, so schreiben wir oft $R/a := R/aR$. Cf. Bemerkung 6.(2).
- Mit $\hookrightarrow$ wird manchmal eine Inklusionsabbildung resp. ein Inklusionsfunktor bezeichnet.
- Ist A eine Aussage in Kategorien, so bezeichnet A° die zu A duale Aussage; cf. Bemerkung 77.
- Für $n \geqslant 0$ haben wir die Kategorie $\Delta_n := \{0, 1, \ldots, n\}^{\mathrm{k}}$; cf. Aufgabe 42.(1). I.e. $\mathrm{Ob}\,\Delta_n := \{0, 1, \ldots, n\}$, und $|{}_{\Delta_n}(i,j)| = 1$, falls $i \leqslant j$, sowie $|{}_{\Delta_n}(i,j)| = 0$, falls $i > j$.
- In einer Kategorie wird mit $\rightarrowtail$ ein Monomorphismus bezeichnet, mit $\twoheadrightarrow$ ein Epimorphismus, mit $\xrightarrow{\sim}$ ein Isomorphismus.

---

[2] Diese natürliche Schreibweise erleichtert das Lesen größerer Diagramme. Funktoren werden wir hingegen in traditioneller Schreibweise links notieren, cf. §2.2.

Kapitel 1

Ringe und Moduln

Die Kategorie der Moduln über einem Ring wird unser Standardbeispiel einer abelschen Kategorie darstellen; cf. Beispiel 121.(1) unten. Hierbei ist der Begriff des Moduls über einem Ring die direkte Verallgemeinerung des Begriffs des Vektorraums über einem Körper.

1.1 Ringe

Ein paar grundlegende Dinge über Ringe. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in [**6,** Kap. 1].

1.1.1 Definition Ringe

Definition 1 Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ aus einer Menge R und aus Abbildungen $R \times R \xrightarrow{(+)} R$, $(r, s) \longmapsto r + s$ (*Addition*) und $R \times R \xrightarrow{(\cdot)} R$, $(r, s) \longmapsto r \cdot s$ (*Multiplikation*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(Ring 1) Es ist $(R, +)$ eine abelsche Gruppe.

(Ring 2) Es ist $(\cdot)$ assoziativ, i.e. es ist $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$ für $r,\ s,\ t\ \in\ R$.

(Ring 3) Es gibt ein Element $1 = 1_R \in R$ mit $r \cdot 1_R = r = 1_R \cdot r$ für $r \in R$.

(Ring 4) Es ist $(+, \cdot)$ distributiv, i.e. es ist $(r+r')\cdot s = (r\cdot s)+(r'\cdot s)$ und $r\cdot(s+s') = r\cdot s+r\cdot s'$ für $r,\ r',\ s,\ s'\ \in\ R$.

Oft schreiben wir kurz $R = (R, +, \cdot)$. Oft schreiben wir $rs := r \cdot s$ für $r,\ s\ \in\ R$.

Es gelte die Punkt-vor-Strich-Regel, nach der e.g. $r \cdot s + t = (r \cdot s) + t$ zu lesen ist, wobei $r,\ s,\ t\ \in\ R$.

Wir schreiben $0 = 0_R \in R$ für das bzgl. $(+)$ neutrale Element, i.e. $r + 0 = r = 0 + r$ für $r \in R$.

Ist $r \cdot s = s \cdot r$ für $r,\, s \,\in\, R$, so heißt der Ring R *kommutativ.*

Bemerkung 2

(1) *Das Element* $1 \in R$ *ist durch* (Ring 3) *eindeutig festgelegt.*

(2) *Es ist* $0 \cdot r = 0 = r \cdot 0$ *für* $r \in R$.

(3) *Es ist* $(-r) \cdot s = -(r \cdot s) = r \cdot (-s)$ *für* $r,\, s \,\in\, R$.

Beweis.

(1) Ist $1' \in R$ mit $r \cdot 1' = r = 1' \cdot r$ für $r \in R$, so folgt $1' = 1' \cdot 1 = 1$.

(2) Es ist $0 \cdot r = 0 \cdot r + 0 \cdot r - 0 \cdot r = (0+0) \cdot r - 0 \cdot r = 0 \cdot r - 0 \cdot r = 0$. Analog $r \cdot 0 = 0$.

(3) Siehe Aufgabe 1.

$\square$

Beispiel 3

(1) Es ist $\mathbf{Z}$ ein kommutativer Ring.

(2) Ein Körper ist ein kommutativer Ring, in welchem $0 \neq 1$ ist und jedes Element ungleich 0 ein multiplikativ Inverses besitzt. Insbesondere sind die Körper $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{C}$ auch kommutative Ringe.

(3) Es gibt einen Ring $0 = \{0\}$, in welchem $0 = 1$ ist, genannt der *Nullring.*

(4) Sei R ein Ring. Sei $n \geqslant 1$. Es bildet die Menge $R^{n\times n}$ der $n\times n$-Matrizen mit Einträgen in R, der Matrixaddition $(+)$ und der Matrixmultiplikation $(\cdot)$ einen Ring. Dieser ist für $n \geqslant 2$ nicht kommutativ, falls $0 \neq 1$ in R. Cf. Aufgabe 2.

(5) Seien R und S Ringe. Dann ist $R \times S = \{(r,s) \;:\; r \in R,\, s \in S\}$, ausgestattet mit $(r,s) + (r',s') = (r+r', s+s')$ und $(r,s) \cdot (r',s') = (r \cdot r', s \cdot s')$ für $r,\, r' \,\in\, R$ und $s,\, s' \,\in\, S$, ein Ring. Hierbei ist $1_{R\times S} = (1_R\,, 1_S)$ und $0_{R\times S} = (0_R\,, 0_S)$. Ferner ist $-(r,s) = (-r,-s)$.

1.1.2 Ideale, Teilringe und Faktorringe

Sei R ein Ring.

Definition 4

(1) Eine additive Untergruppe S von R heißt *Teilring (mit Eins),* falls $1 \in S$, und falls $ss' \in S$ für alle $s,\, s' \,\in\, S$.

(2) Eine additive Untergruppe I von R heißt *Ideal,* falls $rx \in I$ und $xr \in I$ für alle $x \in I$ und alle $r \in R$.

Beispiel 5

(1) Ist R ein kommutativer Ring und $a \in R$, so ist $aR := \{ar \ : \ r \in R\}$ ein Ideal in R, das zu a gehörige *Hauptideal.*

(2) Es sind $0 := \{0\}$ und R Ideale in R.

(3) Sei I ein Ideal in R. Es ist $I = R$ genau dann, wenn $1 \in I$.

(4) Sei R ein Ring. Es sind $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \ : \ a \in R\}$, $\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \ : \ a, d \in R\}$ und $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \ : \ a, b, d \in R\}$ Teilringe von $R^{2\times 2}$.

Bemerkung 6

(1) *Ist $S \subseteq R$ ein Teilring, so ist S mit den vererbten Operationen, also genauer gesagt $\big(S, (+)|^S_{S\times S}\,, (\cdot)|^S_{S\times S}\big)$, wieder ein Ring.*

(2) *Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Schreibe $r + I := \{r + x \ : \ x \in I\} \subseteq R$ für die* Restklasse *von $r \in R$ modulo I. Beachte, daß $r + I = r' + I$ genau dann, wenn $r - r' \in I$. Sei*

$$R/I \ := \ \{r + I \ : \ r \in R\}$$

der Faktorring *von R modulo I. Es ist R/I mit der Addition $(r + I) + (r' + I) := (r + r') + I$ und der Multiplikation $(r + I) \cdot (r' + I) = (r \cdot r') + I$ ein Ring. Hierbei sind $0_{R/I} = 0_R + I$ und $1_{R/I} = 1_R + I$.*

Ist R kommutativ und $a \in R$, so schreiben wir oft $R/a := R/aR$.

Beweis. Zu (2), siehe Aufgabe 3. ▫

Beispiel 7 Jedes Ideal in $\mathbf{Z}$ ist von der Form $n\mathbf{Z}$ für ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es ist $\mathbf{Z}/n = \{0 + n\mathbf{Z}, 1 + n\mathbf{Z}, \ldots, (n-1) + n\mathbf{Z}\}$, aber auch e.g. $\mathbf{Z}/n = \{-2 + n\mathbf{Z}, \ldots, (n-3) + n\mathbf{Z}\}$.

Ist aus dem Kontext ersichtlich, daß wir in $\mathbf{Z}/n$ rechnen, so schreiben wir auch $k := k + n\mathbf{Z}$, repräsentiert von $k \in \mathbf{Z}$. Man muß dann aufpassen, daß mit $k = k'$ in Wahrheit $k \equiv_n k'$ gemeint ist, wobei $k, k' \in \mathbf{Z}$. Aber ansonsten würden die Notation recht schwerfällig aussehen; insbesondere, wenn man an Matrizen mit Einträgen in $\mathbf{Z}/n$ denkt.

Wir können e.g. in $\mathbf{Z}/27$ berechnen, daß $25 \cdot 26 = 650 = 648 + 2 = 2$, oder, einfacher, $25 \cdot 26 = (-2) \cdot (-1) = 2$.

Es ist $\mathbf{Z}/n$ ein Körper genau dann, wenn n eine Primzahl ist. Siehe Aufgabe 4.

Beispiel 8 Seien R und S Ringe. Es ist $R \times 0 := \{(r, 0) \ : \ r \in R\}$ ein Ideal in $R \times S$. In $(R \times S)/(R \times 0)$ ist e.g. $(r, s) + R \times 0 = (r', s) + R \times 0$ für $r, r' \in R$ und $s \in S$.

1.1.3 Ringmorphismen

Seien R, S und T Ringe.

Definition 9 Eine Abbildung $R \xrightarrow{f} S$ heißt *Ringmorphismus*, falls $1_R f = 1_S$, falls $(r + r')f = rf + r'f$ und falls $(r \cdot r')f = rf \cdot r'f$ für $r, r' \in R$.

Diesenfalls setzen wir folgendes.

Sei $\operatorname{Kern} f := \{r \in R \ : \ rf = 0\} \subseteq R$ der *Kern* von f.

Sei $\operatorname{Im} f := Rf = \{rf \ : \ r \in R\} \subseteq S$ das *Bild* von f.

Bemerkung 10 *Seien* $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$ *Ringmorphismen.*

(1) *Es ist* id_R *ein Ringmorphismus. Es ist das Kompositum* $R \xrightarrow{fg} T$ *ein Ringmorphismus.*

(2) *Ist* $I \subseteq R$ *ein Ideal, so ist die Restklassenabbildung* $R \xrightarrow{\rho} R/I$, $r \longmapsto r + I$ *ein Ringmorphismus.*

(3) *Ist* $\tilde{R} \subseteq R$ *ein Teilring, so ist die Inklusionsabbildung* $\tilde{R} \xhookrightarrow{\iota} R$ *ein Ringmorphismus.*

(4) *Es ist* $0_R f = 0_S$. *Es ist* $(-r)f = -(rf)$ *für* $r \in R$.

(5) *Es ist* $\operatorname{Kern} f \subseteq R$ *ein Ideal. Es ist* $\operatorname{Im} f \subseteq S$ *ein Teilring.*

(6) *Es ist* f *injektiv genau dann, wenn* $\operatorname{Kern} f = 0$.

Beweis.

Zu (4). Es ist $0f = 0f + 0f - 0f = (0+0)f - 0f = 0$. Es ist $(-r)f = (-r)f + rf - rf = ((-r) + r)f - rf = 0f - rf = -(rf)$.

Zu (5).

Wir zeigen, daß $\operatorname{Kern} f \subseteq R$ ein Ideal ist. Es ist $\operatorname{Kern} f$ eine additive Untergruppe. Seien ferner $x \in \operatorname{Kern} f$ und $r \in R$. Dann ist $(rx)f = rf \cdot xf = 0$, und also $rx \in \operatorname{Kern} f$. Analog ist auch $xr \in \operatorname{Kern} f$.

Wir zeigen, daß $\operatorname{Im} f \subseteq S$ ein Teilring ist. Es ist $\operatorname{Im} f$ eine additive Untergruppe. Es ist $1_S = 1_R f \in \operatorname{Im} f$. Sind $s, s' \in \operatorname{Im} f$, so gibt es $r, r' \in R$ mit $rf = s$ und $r'f = s'$, und also ist $ss' = rf \cdot r'f = (rr')f \in \operatorname{Im} f$.

Zu (6).

Ist f injektiv, so ist $\operatorname{Kern} f = 0$, da bereits $0_R f = 0_S$.

Ist umgekehrt $\operatorname{Kern} f = 0$, und ist $rf = r'f$ für $r, r' \in R$, dann ist $(r - r')f = 0$, und folglich $r - r' = 0$, i.e. $r = r'$. □

Definition 11 Ein bijektiver Ringmorphismus heißt *Ringisomorphismus* oder *Isomorphismus (von Ringen)*, symbolisch oft $R \xrightarrow{\sim} S$ geschrieben.

Existiert ein Isomorphismus von R nach S, so sagen wir, R ist *isomorph* zu S, geschrieben $R \simeq S$. Cf. Aufgabe 8.(1).

Beispiel 12

(1) Es ist $(R \times S)/(R \times 0) \xrightarrow{\sim} S$, $(r, s) + R \times 0 \longmapsto s$ ein Isomorphismus; cf. Beispiel 8.

(2) Schreibe $\kappa : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, $a + b\,\mathrm{i} \longmapsto a - b\,\mathrm{i}$, wobei $a,\ b \in \mathbf{R}$, für die komplexe Konjugation. Es ist κ ein Ringisomorphismus.

Bemerkung 13 (Universelle Eigenschaft Faktorring) *Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Sei $R \xrightarrow{f} S$ ein Ringmorphismus mit $If = 0$. Dann gibt es genau einen Ringmorphismus $R/I \xrightarrow{\bar{f}} S$ so, daß $(R \xrightarrow{\rho} R/I \xrightarrow{\bar{f}} S) = (R \xrightarrow{f} S)$. Insbesondere ist $(r + I)\bar{f} = rf$ für $r \in R$.*

$$
\begin{tikzcd}
r \arrow[d, mapsto] \\
r + I
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & S \\
R/I \arrow[ur, dotted, "\exists!\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\bar{f}$ folgt aus der Surjektivität von $R \xrightarrow{\rho} R/I$. Zeigen wir die Existenz. Setzen wir $R/I \xrightarrow{\bar{f}} S$, $r + I \longmapsto rf$, so ist dies eine wohldefinierte Abbildung, da für $r,\ r' \in R$ mit $r + I = r' + I$ folgt, daß $r - r' \in I$, und also, daß $rf - r'f = (r - r')f = 0$. Da f ein Ringmorphismus ist, gilt dies nun auch für $\bar{f}$. □

Lemma 14 (Homomorphiesatz für Ringe) *Sei $R \xrightarrow{f} S$ ein Ringmorphismus. Dann gibt es den Isomorphismus $R/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$, $r + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto rf$.*

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & S \\
R/\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Nach Bemerkung 13 gibt es den Ringmorphismus $R/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\bar{f}} S$, $r + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto rf$. Nach Konstruktion schränkt dieser im Bildbereich ein zum surjektiven Ringmorphismus $R/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\bar{f}|^{\mathrm{Im}\, f}} \mathrm{Im}\, f$, $r + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto rf$. Um zu zeigen, daß dieser auch injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß sein Kern null ist; cf. Bemerkung 10.(6). Falls aber $rf = 0$ ist, so folgt $r \in \mathrm{Kern}\, f$, und also $r + \mathrm{Kern}\, f = 0$. □

Beispiel 15

(1) Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringmorphismus von R nach 0.

(2) Für jeden Ring R gibt es genau einen Ringmorphismus von $\mathbf{Z}$ nach R. Dieser schickt $\pm(1_{\mathbf{Z}} + 1_{\mathbf{Z}} + \cdots + 1_{\mathbf{Z}})$ nach $\pm(1_R + 1_R + \cdots + 1_R)$. Sein Kern ist von der Form $n\mathbf{Z}$ für ein $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$; cf. Aufgabe 4.(1). Dieses n heißt *Charakteristik* von R, geschrieben $\operatorname{char} R := n$. Gemäß Lemma 14 hat R also einen Teilring isomorph zu $\mathbf{Z}/\operatorname{char} R$.

1.2 Moduln

1.2.1 Definition Linksmoduln

Sei R ein Ring.

Definition 16 Ein *R-Linksmodul* ist ein Tripel $(M, +, \cdot)$ aus einer Menge M, einer Abbildung $M \times M \xrightarrow{(+)} M$, $(m, m') \longmapsto m + m'$ (*Addition*) und einer Abbildung $R \times M \xrightarrow{(\cdot)} M$, $(r, m) \longmapsto r \cdot m$ (*Skalarmultiplikation*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(LMod 1) Es ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe.

(LMod 2) Es ist $(\cdot)$ assoziativ, i.e. es ist $r \cdot (s \cdot m) = (r \cdot s) \cdot m$ für $r,\ s \in R$ und $m \in M$.

(LMod 3) Es ist $1 \cdot m = m$ für $m \in M$.

(LMod 4) Es ist $(+, \cdot)$ distributiv, i.e. es ist $(r + r') \cdot m = (r \cdot m) + (r' \cdot m)$ und $r \cdot (m + m') = (r \cdot m) + (r \cdot m')$ für $r,\ r' \in R$ und $m,\ m' \in M$.

Oft schreiben wir kurz $M = {}_R M = (M, +, \cdot)$. Oft schreiben wir $rm := r \cdot m$ für $r \in R$ und $m \in M$.

Es gelte die Punkt-vor-Strich-Regel, nach der e.g. $r \cdot m + m' = (r \cdot m) + m'$ zu lesen ist, wobei $r \in R$ und $m,\ m' \in M$.

Wir schreiben $0 = 0_M \in M$ für das bzgl. $(+)$ neutrale Element, i.e. $m + 0 = m = 0 + m$ für $m \in M$.

Ist R kommutativ, so nennt man einen R-Linksmodul auch kurz einen *R-Modul*; cf. Bemerkung 44.

Bemerkung 17 Sei M ein R-Linksmodul. Für $r \in R$ und $m \in M$ ist $0 \cdot m = 0 \cdot m + 0 \cdot m - 0 \cdot m = 0$ und $(-r) \cdot m = (-r) \cdot m + r \cdot m - r \cdot m = -r \cdot m$, ferner $r \cdot 0 = 0$ und $r \cdot (-m) = -r \cdot m$.

Beispiel 18

(1) Ist R ein Körper, so ist ein R-Modul gerade ein R-Vektorraum.

(2) Eine abelsche Gruppe M trägt eine eindeutige $\mathbf{Z}$-Modul-Struktur. Denn notwendigerweise ist $(\pm(1_{\mathbf{Z}} + \cdots + 1_{\mathbf{Z}}))m = \pm(m + \cdots + m)$. Dies definiert umgekehrt auch eine $\mathbf{Z}$-Modul-Struktur. Man sagt auch, eine abelsche Gruppe *ist* ein $\mathbf{Z}$-Modul.

Es sind e.g. (die unterliegenden abelschen Gruppen von) $\mathbf{Z}/12$ und $\mathbf{Q}$ beides $\mathbf{Z}$-Moduln.

(3) Es ist R selbst vermöge der auf R definierten Multiplikation ein R-Linksmodul, oft ${}_R R$ geschrieben.

(4) Es ist $0 := \{0\}$ ein R-Linksmodul.

(5) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{Q}^{2\times 2} \;:\; a,\, b,\, d \,\in\, \mathbf{Q}\}$; cf. Beispiel 5.(4).

Es ist $\mathbf{Q}^{2\times 1} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ ein $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-Linksmodul vermöge $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} am+bn \\ dn \end{smallmatrix}\right)$, wobei $a,\, b,\, d,\, m,\, n \,\in\, \mathbf{Q}$. Dies folgt aus den Gesetzen der Matrixmultiplikation, angewandt auf die hier auftretenden Matrizen.

Genauso ist auch $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-Linksmodul.

1.2.2 Teilmoduln und Faktormoduln

Sei R ein Ring. Sei M ein R-Linksmodul.

Definition 19 Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt *Teilmodul* oder (seltener) *Teil-R-Linksmodul*, falls $0 \in N$ und $rn + r'n' \in N$ für $r,\, r' \,\in\, R$ und $n,\, n' \,\in\, N$.

In anderen Worten, $N \subseteq M$ ist Teilmodul, falls N eine additive Untergruppe von M ist, die unter Multiplikation mit R abgeschlossen ist.

Beispiel 20

(1) Ist $m \in M$, so ist $Rm := \{rm \;:\; r \in R\} \subseteq M$ ein Teilmodul.

(2) Es sind $0 := \{0\}$ und M Teilmoduln von M.

(3) Ist R ein Körper, so ist ein Teilmodul gerade ein Teilraum.

(4) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \subseteq \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ ein Teilmodul.

Bemerkung 21

(1) *Ist $N \subseteq M$ ein Teilmodul, so ist N mit den vererbten Operationen, also genauer gesagt $(N, (+)|^N_{N\times N}, (\cdot)|^N_{R\times N})$, wieder ein R-Linksmodul.*

(2) *Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul. Schreibe $m + N := \{m + n \ : n \in N\}$ für die* Restklasse *von $m \in M$ modulo N. Beachte, daß $m + N = m' + N$ genau dann, wenn $m - m' \in N$. Sei*

$$M/N \ := \ \{m + N \ : \ m \in M\}$$

der Faktormodul *von M modulo N. Mit der Addition $(m + N) + (m' + N) := (m + m') + N$ und der Skalarmultiplikation $r \cdot (m + N) := (r \cdot m) + N$ wird M/N ein R-Linksmodul.*

Beweis. Zu (2), siehe Aufgabe 7.

Beispiel 22

(1) Sei $R = \mathbf{Z}$. Ein Teilmodul ist dann dasselbe wie eine additive Untergruppe.

(2) Sei $R = \mathbf{Z}$. Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Es ist $n\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}$ ein Teilmodul. Es ist $\mathbf{Z}/n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ der Faktormodul.

(3) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$. Wir können den Faktormodul $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ bilden. Darin ist dann e.g. $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir können darin e.g. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ rechnen, oder aber $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Definition 23 Sei $X \subseteq M$ eine Teilmenge. Sei

$${}_R\langle X \rangle \ := \ \left\{ \textstyle\sum_{x \in X} r_x x \ : \ r_x \in R, \ \{x \in X : r_x \neq 0\} \text{ endlich} \right\}$$

das *Erzeugnis* von X. Ist $X = \{x_i : i \in I\}$ für eine Indexmenge I und $x_i \in M$, so schreiben wir auch ${}_R\langle X \rangle = {}_R\langle \{x_i : i \in I\} \rangle =: {}_R\langle x_i : i \in I \rangle$, etc.

Es ist ${}_R\langle X \rangle$ ein Teilmodul von M, der X enthält.

Umgekehrt enthält jeder Teilmodul von M, der X enthält, auch ${}_R\langle X \rangle$.

Es ist e.g. $Rm = {}_R\langle m \rangle$ für $m \in M$; cf. Beispiel 20.(1).

1.2.3 R-lineare Abbildungen

Sei R ein Ring. Seien M, N und P drei R-Linksmoduln.

Definition 24 Eine Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ heiße *R-linear* oder *Morphismus von R-Linksmoduln,* falls $(rm + r'm')f = r(mf) + r'(m'f)$ für $r, r' \in R$ und $m, m' \in M$.

Diesenfalls setzen wir folgendes.

Sei $\operatorname{Kern} f := \{m \in M \ : \ mf = 0\} \subseteq M$ der *Kern* von f.

Sei $\operatorname{Im} f := Mf = \{mf \ : \ m \in M\} \subseteq N$ das *Bild* von f.

Sei $\operatorname{Cokern} f := N/\operatorname{Im} f$ der *Cokern* von f; cf. Bemerkung 25.(5) unten.

Bemerkung 25

(1) Es ist $\mathrm{id}_M = 1_M = 1 : M \longrightarrow M$, $m \longmapsto m$ eine R-lineare Abbildung.

Ferner ist $0_{M,N} = 0 : M \longrightarrow N$, $m \longmapsto 0$ eine R-lineare Abbildung.

(2) Sind $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ beide R-linear, so auch $M \xrightarrow{fg} P$.

(3) Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul.

Dann sind die Inklusionabbildung $M' \xrightarrow{\iota = \iota_{M'}} M$, $m' \longmapsto m'$ und die Restklassenabbildung $M \xrightarrow{\rho = \rho_{M/M'}} M/M'$, $m \longmapsto m + M'$ beides R-lineare Abbildungen.

(4) Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung.

Es ist $0f = 0$. Es ist $(-m)f = -(mf)$ für $m \in M$.

(5) Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung.

Es ist $\mathrm{Kern}\, f \subseteq M$ ein Teilmodul. Es ist $\mathrm{Im}\, f \subseteq N$ ein Teilmodul.

(6) Es ist f injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}\, f = 0$.

Es ist f surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{Cokern}\, f = 0$.

(7) Sind $M \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$ beide R-linear, dann auch $M \xrightarrow{f+f'} N$, $m \longmapsto m(f+f') := mf + mf'$ und $M \xrightarrow{-f} N$, $m \longmapsto m(-f) := -mf$. Es ist $f + (-f) = 0$. Sind $M \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} P$ alle R-linear, so ist $(f+f')(g+g') = fg + fg' + f'g + f'g'$.

Beispiel 26

(1) Ist R ein Körper, so erhalten wir in Definition 24 den Begriff der R-linearen Abbildung zwischen Vektorräumen aus der Linearen Algebra.

(2) Ist $R = \mathbf{Z}$, so reduziert sich die definierende Bedingung in Definition 24 auf $(m + m')f = mf + m'f$ für $m,\, m' \in M$. Eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung ist also dasselbe wie ein Morphismus abelscher Gruppen.

(3) Sei $R = \mathbf{Z}$. Seien $m,\, n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei $a \in \mathbf{Z}$ so, daß $am \equiv_n 0$.

Es ist $\mathbf{Z}/m \longrightarrow \mathbf{Z}/n$, $z + m\mathbf{Z} \longmapsto az + n\mathbf{Z}$ ein Morphismus abelscher Gruppen, i.e. eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung, geschrieben $\mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/n$.

Wir haben e.g. die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{12} \mathbf{Z}/16$. Diese hat den Kern $\{0 + 8\mathbf{Z},\, 4 + 8\mathbf{Z}\}$ und das Bild $\{0 + 16\mathbf{Z},\, 4 + 16\mathbf{Z},\, 8 + 16\mathbf{Z},\, 12 + 16\mathbf{Z}\}$.

In diesem Zusammenhang sei $\mathbf{Z}/0$ mit $\mathbf{Z}$ identifiziert.

Definition 27 Eine bijektive R-lineare Abbildung $M \longrightarrow N$ heißt auch *Isomorphismus (von R-Linksmoduln)*, symbolisch $M \xrightarrow{\sim} N$ geschrieben.

Existiert ein Isomorphismus von M nach N, so sagen wir, M ist *isomorph* zu N, geschrieben $M \simeq N$. Cf. Aufgabe 8.(2).

Beispiel 28 Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$. Es gibt keinen Isomorphismus von $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Denn sei $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{f} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine R-lineare Abbildung. Schreibe $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) f =: \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) f \;=\; \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) f \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) f\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 0\,.$$

Folglich ist f nicht injektiv.

Bemerkung 29 (Universelle Eigenschaft Faktormodul) *Sei $M' \subseteq M$ ein Teilmodul. Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung mit $M'f = 0$.*

Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $M/M' \xrightarrow{\bar f} N$ so, daß $(M \xrightarrow{\rho} M/M' \xrightarrow{\bar f} N) = (M \xrightarrow{f} N)$. Insbesondere ist $(m + M')\bar f = mf$ für $m \in M$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & N \\
M/M' \arrow[ur, dotted, "\exists ! \bar f"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\bar f$ folgt aus der Surjektivität von $M \xrightarrow{\rho} M/M'$. Zeigen wir die Existenz. Setzen wir $M/M' \xrightarrow{\bar f} N$, $m + M' \longmapsto mf$, so ist dies eine wohldefinierte Abbildung, da für m, $\tilde m \in M$ mit $m + M' = \tilde m + M'$ folgt, daß $m - \tilde m \in M'$, und also, daß $mf - \tilde m f = (m - \tilde m)f = 0$. Da f eine R-lineare Abbildung ist, gilt dies nun auch für $\bar f$. $\square$

Lemma 30 (Homomorphiesatz für Moduln) *Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung. Dann gibt es den Isomorphismus $\tilde f : M/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$, $m + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto mf$.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_{M/\mathrm{Kern}\, f}"'] & N \\
M/\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\tilde f", "\sim"'] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "\iota_{\mathrm{Im}\, f}"']
\end{tikzcd}$$

Insgesamt haben wir also

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Cokern}\, \iota_{\mathrm{Kern}\, f} \arrow[dd, "\tilde f", "\wr"'] & & \\
\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\iota_{\mathrm{Kern}\, f}"] & M \arrow[ur, "\rho"] \arrow[rr, "f", crossing over] & & N \arrow[r, "\rho_{\mathrm{Cokern}\, f}"] & \mathrm{Cokern}\, f \\
 & & \mathrm{Kern}\, \rho_{\mathrm{Cokern}\, f} \arrow[ur, "\iota"'] & &
\end{tikzcd}$$

mit $\rho\tilde{f}\iota = f$.

Beweis. Nach Bemerkung 29 gibt es die R-lineare Abbildung $M/\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\bar{f}} N$, $m + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto mf$. Wir schränken diese im Bildbereich ein zur surjektiven R-linearen Abbildung $\tilde{f} := \bar{f}|^{\mathrm{Im}\, f} : M/\mathrm{Kern}\, f \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$, $m + \mathrm{Kern}\, f \longmapsto mf$. Um zu zeigen, daß diese auch injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß ihr Kern null ist; cf. Bemerkung 25.(6). Falls aber $mf = 0$ ist, so folgt $m \in \mathrm{Kern}\, f$, und also $m + \mathrm{Kern}\, f = 0$. ▫

1.2.4 Direkte Summen und Matrizen

Sei R ein Ring.

Seien α, β, $\gamma \geqslant 0$.

Gegeben seien R-Linksmoduln $M_1, \ldots, M_\alpha$; $N_1, \ldots, N_\beta$ und $P_1, \ldots, P_\gamma$.

Definition 31 Sei

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \;=\; M_1 \oplus \cdots \oplus M_\alpha \;:=\; \{(m_1, \ldots, m_\alpha) \;:\; m_i \in M_i \text{ für } i \in [1,\alpha]\}$$

die *direkte Summe* von $(M_i)_{i\in[1,\alpha]}$.

Via $(m_1, \ldots, m_\alpha) + (m'_1, \ldots, m'_\alpha) := (m_1 + m'_1, \ldots, m_\alpha + m'_\alpha)$ und $r(m_1, \ldots, m_\alpha) := (rm_1, \ldots, rm_\alpha)$ für $r \in R$, $m_i, m'_i \in M_i$, $i \in [1,\alpha]$, wird $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ zu einem R-Linksmodul.

Wir schreiben auch $M^{\oplus n} := \bigoplus_{i\in[1,n]} M$ für $n \geqslant 0$ und einen R-Linksmodul M. Wir identifizieren $M^{\oplus 0} = 0$ und $M^{\oplus 1} = M$.

Definition 32 Gegeben seien R-lineare Abbildungen $f_{i,j} : M_i \longrightarrow N_j$ für $i \in [1,\alpha]$ und $j \in [1,\beta]$. Setze

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i & \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\alpha,1} & \cdots & f_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}} & \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j \\ (m_1, \ldots, m_\alpha) & \longmapsto & (\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,1}, \ldots, \sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,\beta}) \end{array}$$

Dies ist eine R-lineare Abbildung.

Ist $\beta = 1$, so schreiben wir auch $(f_{i,j})_{i,j} =: (f_i)_i$ (eine Spalte).

Ist $\alpha = 1$, so schreiben wir auch $(f_{i,j})_{i,j} =: (f_j)_j$ (eine Zeile).

Für $s \in [1,\alpha]$ schreiben wir $\iota_s := (\partial_{s,i})_i = (0 \ldots 0\, 1\, 0 \ldots 0) : M_s \longrightarrow \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$, $m_s \longmapsto (0, \ldots, 0, m_s, 0, \ldots, 0)$.

Für $t \in [1,\beta]$ schreiben wir $\pi_t := (\partial_{t,j})_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j \longrightarrow N_t$, $(n_1, \ldots, n_\beta) \longmapsto n_t$.

Bemerkung 33 *Jede R-lineare Abbildung von $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ nach $\bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j$ ist von der Form $(f_{i,j})_{i,j}$ für gewisse R-lineare Abbildungen $f_{i,j}\,:\,M_i \longrightarrow N_j$ für $i\in[1,\alpha]$ und $j\in[1,\beta]$.*

Beweis. Sei g eine R-lineare Abbildung von $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ nach $\bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j$. Setze $f_{i,j} := \iota_i g \pi_j : M_i \longrightarrow N_j$ für $i\in[1,\alpha]$ und $j\in[1,\beta]$. Sei $(m_1\,,\ldots,m_\alpha)\in\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl}
(m_1\,,\ldots,m_\alpha)(f_{i,j})_{i,j} & = & (\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,1}\,,\ldots,\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,\beta}) \\
& = & (\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i\iota_i g\pi_1\,,\ldots,\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i\iota_i g\pi_\beta) \\
& = & ((m_1\,,\ldots,m_\alpha)g\pi_1\,,\ldots,(m_1\,,\ldots,m_\alpha)g\pi_\beta) \\
& = & (m_1\,,\ldots,m_\alpha)g\ ,
\end{array}$$

mithin $(f_{i,j})_{i,j} = g$. □

Bemerkung 34 (Matrixmultiplikation) *Seien R-lineare Abbildungen*

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,\beta]} N_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,\gamma]} P_k$$

gegeben. Ihr Kompositum ergibt sich zu

$$\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{(\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j}g_{j,k})_{i,k}} \bigoplus_{k\in[1,\gamma]} P_k$$

Beweis. Sei $(m_1\,,\ldots,m_\alpha)\in\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$. Wir erhalten

$$\begin{array}{rl}
& (m_1\,,\ldots,m_\alpha)(f_{i,j})_{i,j}(g_{j,k})_{j,k} \\
= & (\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,1}\,,\ldots,\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,\beta})(g_{j,k})_{j,k} \\
= & (\sum_{j\in[1,\beta]}\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,j}g_{j,1}\,,\ldots,\sum_{j\in[1,\beta]}\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i f_{i,j}g_{j,\gamma}) \\
= & (\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i(\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j}g_{j,1})\,,\ldots,\sum_{i\in[1,\alpha]} m_i(\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j}g_{j,\gamma})) \\
= & (m_1\,,\ldots,m_\alpha)(\sum_{j\in[1,\beta]} f_{i,j}g_{j,k})_{i,k}\ .
\end{array}$$

□

Beispiel 35 Sei $R=\mathbf{Z}$. Es wird

$$\begin{array}{rl}
& (\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&4\\1&6\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&-1\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8\oplus\mathbf{Z}/4) \\
= & (\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}12&-4\\16&-6\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8\oplus\mathbf{Z}/4) \\
= & (\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}4&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8\oplus\mathbf{Z}/4)\ .
\end{array}$$

1.2.5 Produkt und Coprodukt

Sei R ein Ring. Sei I eine (nicht notwendig endliche) Menge. Sei für jedes $i \in I$ ein R-Linksmodul M_i gegeben.

Definition 36

(1) Sei
$$\textstyle\prod_{i\in I} M_i \;:=\; \{(m_i)_i \;:\; m_i \in M_i \text{ für } i \in I\}\,,$$
was, ausgestattet mit $(m_i)_i + (m'_i)_i := (m_i + m'_i)_i$ und $r(m_i)_i := (rm_i)_i$ für $(m_i)_i\,, (m'_i)_i \in \prod_{i\in I} M_i$ und $r \in R$, ein R-Linksmodul ist, genannt das *Produkt* von $(M_i)_i$.

Für $j \in I$ haben wir die R-lineare Abbildung $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j\,,\ (m_i)_i \longmapsto m_j$.

(2) Sei
$$\textstyle\coprod_{i\in I} M_i \;:=\; \{(m_i)_i \;:\; m_i \in M_i \text{ für } i \in I, \text{ wobei } \{i \in I \;:\; m_i \neq 0\} \text{ endlich}\}\,,$$
was, ausgestattet mit $(m_i)_i + (m'_i)_i := (m_i + m'_i)_i$ und $r(m_i)_i := (rm_i)_i$ für $(m_i)_i\,, (m'_i)_i \in \coprod_{i\in I} M_i$ und $r \in R$, ein R-Linksmodul ist, genannt das *Coprodukt* von $(M_i)_i$.

Beachte hierbei, daß $\{i \in I \;:\; m_i + m'_i \neq 0\} \subseteq \{i \in I \;:\; m_i \neq 0\} \cup \{i \in I \;:\; m'_i \neq 0\}$.

Für $j \in I$ haben wir die R-lineare Abbildung $\iota_j : M_j \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i\,,\ m_j \longmapsto (x_i)_{i\in I}$ mit $x_j := m_j$ und $x_i := 0$ für $i \in I \smallsetminus \{j\}$.

Allgemein ist somit das Coprodukt ein Teilmodul des Produktes, $\coprod_{i\in I} M_i \subseteq \prod_{i\in I} M_i$.

Ist I hingegen endlich, so stimmen Produkt, Coprodukt und direkte Summe überein.

1.2.6 Ein paar universelle Eigenschaften

Sei R ein Ring.

Bemerkung 37 (Universelle Eigenschaften der direkten Summe)
Sei $\alpha \geqslant 0$. Seien R-Linksmoduln M_i gegeben für $i \in [1, \alpha]$.

(1) *Sei X ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $X \xrightarrow{x_i} M_i$ gegeben für $i \in [1, \alpha]$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{x} \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i$ mit $x\pi_i = x_i$ für alle $i \in [1, \alpha]$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & M_1 \\
X \arrow[urr, "x_1"] \arrow[r, dotted, "\exists! x"] \arrow[drr, "x_\alpha"'] & \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_\alpha"] & \vdots \\
 & & M_\alpha
\end{tikzcd}$$

(2) *Sei Y ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $M_i \xrightarrow{y_i} Y$ gegeben für $i \in [1, \alpha]$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \xrightarrow{y} Y$ mit $\iota_i y = y_i$ für alle $i \in [1, \alpha]$.*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[dr, "\iota_1"'] \arrow[drr, "y_1"] & & \\
\vdots & \bigoplus_{i\in[1,\alpha]} M_i \arrow[r, dotted, "\exists! y"] & Y \\
M_\alpha \arrow[ur, "\iota_\alpha"] \arrow[urr, "y_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Beweis.

Zu (1). Wir können $x = (\, x_1 \cdots x_\alpha \,)$ nehmen, was die Existenz zeigt. Die Eindeutigkeit folgt, da die Komposita mit den π_i alle Matrixeinträge von x festlegen; cf. Bemerkung 33.

Zu (2). Wir können $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\alpha \end{pmatrix}$ nehmen, was die Existenz zeigt. Die Eindeutigkeit folgt, da die Komposita mit den ι_i alle Matrixeinträge von y festlegen; cf. Bemerkung 33. $\square$

Bemerkung 38 (Universelle Eigenschaften von Produkt und Coprodukt)
Sei I eine Menge. Seien R-Linksmoduln M_i gegeben für $i \in I$.

(1) *Sei X ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $X \xrightarrow{x_i} M_i$ gegeben für $i \in I$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{x} \prod_{i\in I} M_i$ mit $x\pi_i = x_i$ für alle $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
& & \vdots \\
& & M_j \\
X \arrow[urr, "x_j"] \arrow[drr, "x_{j'}"'] \arrow[r, dotted, "\exists! x"] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[ur, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_{j'}"] & \vdots \\
& & M_{j'} \\
& & \vdots
\end{tikzcd}$$

(2) *Sei Y ein R-Linksmodul. Seien R-lineare Abbildungen $M_i \xrightarrow{y_i} Y$ gegeben für $i \in I$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\coprod_{i\in I} M_i \xrightarrow{y} Y$ mit $\iota_i y = y_i$ für alle $i \in I$.*

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & & \\
M_j \arrow[dr, "\iota_j"'] \arrow[drr, "y_j"] & & \\
\vdots & \coprod_{i\in I} M_i \arrow[r, dotted, "\exists! y"] & Y \\
M_{j'} \arrow[ur, "\iota_{j'}"] \arrow[urr, "y_{j'}"'] & & \\
\vdots & &
\end{tikzcd}
$$

Beweis.

Zu (1). Wir können und müssen $\xi x := (\xi x_i)_i$ setzen für $\xi \in X$.

Zu (2). Beachte, daß für $(m_i)_i \in \coprod_{i\in I} M_i$ stets $(m_i)_i = \sum_{i\in I} m_i \iota_i$ ist. Also müssen und können wir $(m_i)_i y = \sum_{i\in I} m_i \iota_i y := \sum_{i\in I} m_i y_i$ setzen. □

Bemerkung 39 (Universelle Eigenschaften von Kern und Cokern)
Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln.

(1) *Es ist $\iota_{\mathrm{Kern}\, f} f = 0$.*

Sei X ein R-Linksmodul. Sei $X \xrightarrow{x} M$ eine R-lineare Abbildung so, daß $xf = 0$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{x'} \mathrm{Kern}\, f$ mit $x' \iota_{\mathrm{Kern}\, f} = x$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\iota_{\mathrm{Kern}\, f}"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
X \arrow[u, dotted, "\exists! x'"] \arrow[ur, "x"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(2) *Es ist $f \rho_{\mathrm{Cokern}\, f} = 0$.*

Sei Y ein R-Linksmodul. Sei $N \xrightarrow{y} Y$ eine R-lineare Abbildung so, daß $fy = 0$. Dann gibt es genau eine R-lineare Abbildung $\mathrm{Cokern}\, f \xrightarrow{y'} Y$ mit $\rho_{\mathrm{Cokern}\, f} y' = y$.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & N \arrow[r, "\rho_{\mathrm{Cokern}\, f}"] \arrow[dr, "y"] & \mathrm{Cokern}\, f \arrow[d, dotted, "\exists! y'"] \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

Beweis.

Zu (1). Da $xf = 0$, können wir $x' := x|^{\mathrm{Kern}\, f}$ wählen. Da $\iota_{\mathrm{Kern}\, f}$ injektiv ist, ist dies die einzige Möglichkeit.

Zu (2). Da $fy = 0$, ist $(\mathrm{Im}\, f)y = 0$. Da $\mathrm{Cokern}\, f = N/\mathrm{Im}\, f$, folgt die Behauptung aus der universellen Eigenschaft des Faktormoduls; cf. Bemerkung 29. ▫

1.2.7 R/I-Linksmoduln

Sei R ein Ring. Sei I ein Ideal in R.

Bemerkung 40

(1) *Sei M ein R-Linksmodul, für welchen*

$$IM \ := \ \{\textstyle\sum_{i\in[1,k]} x_i m_i \ : \ k \geqslant 0,\ x_i \in I,\ m_i \in M\} \ = \ 0$$

ist. Dann wird $(M,+)$ mittels $(r+I)\cdot m := rm$ für $r \in R$ und $m \in M$ ein R/I-Linksmodul.

(2) *Sei N ein R/I-Linksmodul. Dann wird $(N,+)$ mittels $r \cdot n := (r+I)n$ für $r \in R$ und $n \in N$ ein R-Linksmodul, für welchen $IN = 0$.*

(3) *Seien M und N zwei R-Linksmoduln mit $IM = 0$ und $IN = 0$. Zwischen M und N ist eine R-lineare Abbildung dasselbe wie eine R/I-lineare Abbildung.*

Beweis. Zu (1). Es ist $(r+I)\cdot m := rm$ wohldefiniert, da aus $r + I = r' + I$ folgt, daß $(r - r')m = 0$ und also $rm = r'm$. Die Linksmoduleigenschaften vererben sich von der R-Operation auf die R/I-Operation. ▫

Wir dürfen und werden also die R/I-Linksmoduln mit den R-Linksmoduln M, für welche $IM = 0$ ist, identifizieren.

Beispiel 41 Es sind $\mathbf{Z}/3$ und $\mathbf{Z}/2$ beides $\mathbf{Z}/12$-Linksmoduln, kurz: $\mathbf{Z}/12$-Moduln. Hingegen ist $\mathbf{Z}/8$ kein $\mathbf{Z}/12$-Linksmodul.

1.2.8 Rechts- und Bimoduln

1.2.8.1 Definition Rechtsmoduln

Sei R ein Ring. Analog zu Links- führen wir Rechtsmoduln ein.

Definition 42 Ein *R-Rechtsmodul* ist ein Tripel $(M,+,\cdot)$ aus einer Menge M, einer Abbildung $M \times M \xrightarrow{(+)} M$, $(m,m') \longmapsto m + m'$ (*Addition*) und einer Abbildung $M \times R \xrightarrow{(\cdot)} M$, $(m,r) \longmapsto m \cdot r$ (*Skalarmultiplikation*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(RMod 1) Es ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe.

(RMod 2) Es ist $(\cdot)$ assoziativ, i.e. es ist $(m \cdot r) \cdot s = m \cdot (r \cdot s)$ für $m \in M$ und $r,\, s \,\in\, R$.

(RMod 3) Es ist $m \cdot 1 = m$ für $m \in M$.

(RMod 4) Es ist $(+, \cdot)$ distributiv, i.e. es ist $m \cdot (r + r') = (m \cdot r) + (m \cdot r')$ und $(m + m') \cdot r = (m \cdot r) + (m' \cdot r)$ für $m,\, m' \,\in\, M$ und $r,\, r' \,\in\, R$.

Oft schreiben wir kurz $M = M_R = (M, +, \cdot)$. Oft schreiben wir $mr := m \cdot r$ für $m \in M$ und $r \in R$.

Eine Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ zwischen R-Rechtsmoduln heißt *R-linear* oder *Morphismus von R-Rechtsmoduln,* falls $(mr + m'r')f = (mf)r + (m'f)r'$ für $m,\, m' \,\in\, M$ und $r,\, r' \,\in\, R$.

Alle Aussagen, Begriffe und Konstruktionen für R-Linksmoduln und deren R-lineare Abbildungen gelten entsprechend für R-Rechtsmoduln und deren R-lineare Abbildungen.

Beispiel 43 Es sind $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ Rechtsmoduln über $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$.

In folgendem Sinne muß für kommutative Ringe nicht zwischen Links- und Rechtsmoduln unterschieden werden.

Bemerkung 44 Sei R ein kommutativer Ring. Sei $M = (M, +, \cdot)$ ein R-Linksmodul. Dann ist $(M, +, *)$ via $m * r := r \cdot m$ für $m \in M$ und $r \in R$ ein R-Rechtsmodul.

1.2.8.2 Definition Bimoduln

Seien R und S Ringe.

Definition 45 Ein *R-S-Bimodul* ist ein Quadrupel $(M, +, \cdot, *)$ aus einer Menge M, einer Abbildung $M \times M \xrightarrow{(+)} M$, $(m, m') \longmapsto m + m'$ (*Addition*), einer Abbildung $R \times M \xrightarrow{(\cdot)} M$, $(r, m) \longmapsto r \cdot m$ (*Skalarmultiplikation links*) und einer Abbildung $M \times S \xrightarrow{(*)} M$, $(m, s) \longmapsto m * s$ (*Skalarmultiplikation rechts*) derart, daß folgende Axiome gelten.

(BiMod 1) Es ist $(M, +, \cdot)$ ein R-Linksmodul.

(BiMod 2) Es ist $(M, +, *)$ ein S-Rechtsmodul.

(BiMod 3) Es ist $r \cdot (m * s) = (r \cdot m) * s$ für $r \in R$, $m \in M$ und $s \in S$.

Oft schreiben wir kurz $M = {}_R M_S = (M, +, \cdot, *)$. Oft schreiben wir $rms = r \cdot m * s := (r \cdot m) * s = r \cdot (m * s)$ für $r \in R$, $m \in M$ und $s \in R$.

Eine Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ zwischen R-S-Bimoduln heißt *R-S-linear* oder *Morphismus von R-S-Bimoduln,* falls $(rms + r'm's')f = r(mf)s + r'(m'f)s'$ für $r,\, r' \in R$, $m,\, m' \in M$ und $s,\, s' \in S$.

Alle Aussagen, Begriffe und Konstruktionen für R-Linksmoduln und deren R-lineare Abbildungen gelten entsprechend für R-S-Bimoduln und deren R-S-lineare Abbildungen. Cf. auch Aufgabe 28.(2).

Ein R-Linksmodul ${}_R M$ ist auf eindeutige Weise ein R-$\mathbf{Z}$-Bimodul; entsprechend für R-lineare Abbildungen. Ein S-Rechtsmodul M_S ist auf eindeutige Weise ein $\mathbf{Z}$-S-Bimodul; entsprechend für S-lineare Abbildungen. Jede Aussage für Bimoduln beinhaltet also durch Spezialisierung Aussagen für Links- und Rechtsmoduln.

Beispiel 46

(1) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ ein $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & 0 & 0 \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-$\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-Bimodul.

(2) Die Ideale von R sind genau die Teil-R-R-Bimoduln von ${}_R R_R$.

(3) Sei $R = S = \mathbf{C}$. Sei κ die komplexe Konjugation auf $\mathbf{C}$; cf. Beispiel 12.(2).

Wir haben zum einen die $\mathbf{C}$-$\mathbf{C}$-Bimodulstruktur auf $\mathbf{C}$, die durch $r \cdot z * s := rzs$ definiert ist, wobei $r,\, z,\, s \in \mathbf{C}$; dieser Bimodul heiße $\mathbf{C}_{\mathrm{id}}$.

Zum anderen haben wir die $\mathbf{C}$-$\mathbf{C}$-Bimodulstruktur auf $\mathbf{C}$, die durch $r \cdot z * s := rz(s\kappa)$ definiert ist, wobei $r,\, z,\, s \in \mathbf{C}$; dieser Bimodul heiße $\mathbf{C}_\kappa$.

Wir behaupten, daß ${}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_{\mathrm{id}})_{\mathbf{C}} \not\simeq {}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}_\kappa)_{\mathbf{C}}$. Sei dazu eine $\mathbf{C}$-$\mathbf{C}$-lineare Abbildung $\mathbf{C}_{\mathrm{id}} \xrightarrow{f} \mathbf{C}_\kappa$ betrachtet. Es wird

$$\mathrm{i}f \;=\; (\mathrm{i}\cdot 1)f \;=\; \mathrm{i}\cdot(1f) \;=\; \mathrm{i}(1f) \;=\; (1f)\mathrm{i} \;=\; (1f)*(-\mathrm{i}) \;=\; (1*(-\mathrm{i}))f \;=\; (-\mathrm{i})f\,.$$

Somit ist f nicht injektiv.

1.2.9 Exakte Sequenzen

Sei R ein Ring.

Definition 47 Seien $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ zwei R-lineare Abbildungen zwischen R-Linksmoduln, auch *Sequenz* genannt.

(1) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *exakt bei M* oder *exakt in der Mitte,* falls $\operatorname{Im} f = \operatorname{Kern} g$.

(2) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *linksexakt,* falls sie exakt in der Mitte ist und f injektiv ist.

(3) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *rechtsexakt,* falls sie exakt in der Mitte ist und g surjektiv ist.

(4) Die Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ heiße *kurz exakt,* falls sie exakt in der Mitte ist, f injektiv ist und g surjektiv ist.

Entsprechend für Rechts- und Bimoduln.

Beispiel 48

(1) Die Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ von $\mathbf{Z}$-Moduln ist kurz exakt.
Die Sequenz $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ von $\mathbf{Z}$-Moduln ist exakt in der Mitte.

(2) Ist $M \xrightarrow{f} N$ eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln, dann ist die Sequenz $\operatorname{Kern} f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f} N$ linksexakt und die Sequenz $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} f$ rechtsexakt.
Ferner sind $\operatorname{Kern} f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f|^{\operatorname{Im} f}} \operatorname{Im} f$ und $\operatorname{Im} f \xrightarrow{\iota} N \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} f$ kurz exakt.

1.2.10 Hom **und Tensorprodukt**

1.2.10.1 Hom

Seien R, S und T Ringe. Seien $M = {}_R M_S$ und $N = {}_R N_T$ Bimoduln.

Definition 49 Setze

$$\operatorname{Hom}_R(M,N) \;=\; {}_R(M,N) \;:=\; \{M \xrightarrow{f} N \;:\; f \text{ ist } R\text{-linear}\}\,.$$

Bemerkung 50

(1) *Es ist* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *zusammen mit der wie in Bemerkung* 25.(7) *durch* $m(f+g) := mf + mg$ *für* $f, g \in \operatorname{Hom}_R(M,N)$ *und* $m \in M$ *definierten Addition eine abelsche Gruppe.*

(2) *Auf der abelschen Gruppe* $\operatorname{Hom}_R(M,N) = \operatorname{Hom}_R({}_R M_S\,,\, {}_R N_T)$ *ist wie folgt eine* S-T-*Bimodulstruktur definiert. Für* $s \in S$, $f \in \operatorname{Hom}_R({}_R M_S\,,\, {}_R N_T)$ *und* $t \in T$ *setzen wir für gegebenes* $m \in M$

$$m(s \cdot f * t) \;:=\; ((m * s)f) * t\,.$$

(3) *Ist* $N = {}_R N_T$ *ein* R-T-*Bimodul, so ist* $\operatorname{Hom}_R({}_R R_R\,,\, {}_R N_T) \longrightarrow {}_R N_T\,,\; f \longmapsto 1f$ *ein Isomorphismus von* R-T-*Bimoduln.*

Beweis.

Zu (2). Die resultierende Abbildung $s \cdot f * t$ ist R-linear, da sie mit der Addition verträglich ist und da

$$(r \cdot m)(s \cdot f * t) \overset{\text{def}}{=} ((r \cdot m) * s)f * t = (r \cdot (m * s))f * t = r \cdot (m * s)f * t \overset{\text{def}}{=} r \cdot (m(s \cdot f * t))$$

für $r \in R$.

Die Bimoduleigenschaften gelten, siehe Aufgabe 23.(1).

Zu (3). Die angeführte Abbildung ist R-T-linear, da sie mit der Addition verträglich ist und da $r \cdot f * t \longmapsto 1(r \cdot f * t) \overset{\text{def}}{=} (1 * r)f * t = (r \cdot 1)f * t = r \cdot (1f) * t$ für $r \in R$ und $t \in T$.

Sie ist injektiv, da im Falle $f \longmapsto 1f = 0$ folgt, daß $rf = (r \cdot 1)f = r \cdot (1f) = 0$ für $r \in R$ und also $f = 0$.

Bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei $n \in N$ gegeben. Setze $f : R \longrightarrow N$, $r \longmapsto r \cdot n$. Dies ist eine R-lineare Abbildung. Ferner ist $f \longmapsto 1f = 1 \cdot n = n$. □

Setzt man $m(f \cdot r) := (rm)f$ für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $r \in R$ und $m \in M$, so liefert dies deswegen im allgemeinen keine R-Rechtsmodulstruktur auf $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, weil das so definierte $f \cdot r$ im allgemeinen keine R-lineare Abbildung ist.

Bemerkung 51

Seien ${}_RM_S \xleftarrow{u} {}_RM'_S \xleftarrow{u'} {}_RM''_S$ *zwei R-S-lineare Abbildungen zwischen R-S-Bimoduln.*

Seien ${}_RN_T \xrightarrow{v} {}_RN'_T \xrightarrow{v'} {}_RN''_T$ *zwei R-T-lineare Abbildungen zwischen R-T-Bimoduln.*

(1) *Wir haben eine S-T-lineare Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R({}_RM_S\,,\, {}_RN_T) & \xrightarrow{{}_R(u,v) \,=\, \mathrm{Hom}_R(u,v)} & \mathrm{Hom}_R({}_RM'_S\,,\, {}_RN'_T) \\ f & \longmapsto & ufv\ . \end{array}$$

Wir schreiben noch ${}_R(u, N) = \mathrm{Hom}_R(u, N) := \mathrm{Hom}_R(u, \mathrm{id}_N)$ *und* ${}_R(M, v) = \mathrm{Hom}_R(M, v) := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M\,, v)$.

Manchmal wird auch kurz $(u, v) := {}_R(u, v) = \mathrm{Hom}_R(u, v)$ *geschrieben, etc.*

(2) *Es ist* $\mathrm{Hom}_R(u, v) \cdot \mathrm{Hom}_R(u', v') = \mathrm{Hom}_R(u' \cdot u, v \cdot v')$.

Es ist $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}$.

Beweis.

Zu (1). Es ist ufv als Kompositum R-linearer Abbildungen wieder R-linear. Die Abbildung $f \longmapsto ufv$ ist mit der Addition verträglich. Sind ferner $s \in S$ und $t \in T$ gegeben, so wird

$$m'(s \cdot (ufv) * t) \overset{\text{def}}{=} (m' * s)ufv * t = (((m'u) * s)f * t)v \overset{\text{def}}{=} m'(u(s \cdot f * t)v)$$

für $m' \in M'$, und also $s \cdot (ufv) * t = u(s \cdot f * t)v$.

Zu (2). Es wird

$$\begin{array}{rcl} f\,\mathrm{Hom}_R(u,v)\,\mathrm{Hom}_R(u',v') & = & (ufv)\,\mathrm{Hom}_R(u',v') \\ & = & u'(ufv)v' \\ & = & (u'u)f(vv') \\ & = & f\,\mathrm{Hom}_R(u'u, vv')\ . \end{array}$$

□

Lemma 52

(1) *Sei $N' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{q} N''$ eine kurz exakte Sequenz von R-T-Bimoduln. Sei M ein R-S-Bimodul. Dann ist die Sequenz*

$${}_R(M,N') \xrightarrow{{}_R(M,j)} {}_R(M,N) \xrightarrow{{}_R(M,q)} {}_R(M,N'')$$

von S-T-Bimoduln linksexakt.

(2) *Sei $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ eine kurz exakte Sequenz von R-S-Bimoduln. Sei N ein R-T-Bimodul. Dann ist die Sequenz*

$${}_R(M',N) \xleftarrow{{}_R(i,N)} {}_R(M,N) \xleftarrow{{}_R(p,N)} {}_R(M'',N)$$

von S-T-Bimoduln linksexakt.

Beweis.

Zu (1). Zur Injektivität von ${}_R(M,j)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{f'} N'$ mit $0 = f'\,{}_R(M,j) = f'j$ gegeben. Da j injektiv ist, folgt $f' = 0$.

Zu $\mathrm{Im}\,{}_R(M,j) \overset{!}{\subseteq} \mathrm{Kern}\,{}_R(M,q)$. Es ist ${}_R(M,j)\,{}_R(M,q) = {}_R(M,jq) = {}_R(M,0) = 0$.

Zu $\mathrm{Im}\,{}_R(M,j) \overset{!}{\supseteq} \mathrm{Kern}\,{}_R(M,q)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{f} N$ mit $0 = f\,{}_R(M,q) = fq$ gegeben. Die universelle Eigenschaft von $\mathrm{Kern}\,q$ aus Bemerkung 39.(1) gibt eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{\tilde f} \mathrm{Kern}\,q$ mit $\tilde f \iota = f$, sowie eine R-lineare Abbildung $N' \xrightarrow{\tilde j} \mathrm{Kern}\,q$ mit $\tilde j \iota = j$. Da j injektiv ist, gilt dies auch für $\tilde j$. Zeigen wir die Surjektivität von $\tilde j$. Sei $n \in \mathrm{Kern}\,q$. Es ist $n \in \mathrm{Im}\,j$ wegen der Exaktheit von $N' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{q} N''$ bei N. Somit gibt es ein $n' \in N'$ mit $n = n'j = n'\tilde j$. Insgesamt ist $\tilde j$ also bijektiv. Setze $f' := \tilde f\,\tilde j^{-1} : M \longrightarrow N'$. Es wird

$$f'\,{}_R(M,j) \;=\; f'j = (\tilde f\,\tilde j^{-1})(\tilde j \iota) \;=\; \tilde f \iota \;=\; f\ .$$

Also ist $f \in \mathrm{Im}\,{}_R(M,j)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}\,q \arrow[dr, "\iota"] & M \arrow[l, "\tilde f"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & \\
N' \arrow[u, "\tilde j", "\wr"'] \arrow[r, "j"] & N \arrow[r, "q"] & N''
\end{tikzcd}$$

Zu (2). Zur Injektivität von ${}_R(p,N)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M'' \xrightarrow{g''} N$ mit $0 = g''\,{}_R(p,N) = pg''$ gegeben. Da p surjektiv ist, folgt $g'' = 0$.

Zu $\mathrm{Im}\;{}_R(p,N) \overset{!}{\subseteq} \mathrm{Kern}\;{}_R(i,N)$. Es ist ${}_R(p,N)\,{}_R(i,N) = {}_R(ip,N) = {}_R(0,N) = 0$.

Zu $\mathrm{Im}\;{}_R(p,N) \overset{!}{\supseteq} \mathrm{Kern}\;{}_R(i,N)$. Sei eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{g} N$ mit $0 = g\,{}_R(i,N) = ig$ gegeben. Die universelle Eigenschaft von $\mathrm{Cokern}\, i$ aus Bemerkung 39.(2) gibt eine R-lineare Abbildung $\mathrm{Cokern}\, i \xrightarrow{\tilde{g}} N$ mit $\rho\tilde{g} = g$, sowie eine R-lineare Abbildung $\mathrm{Cokern}\, i \xrightarrow{\tilde{p}} M''$ mit $\rho\tilde{p} = p$. Da p surjektiv ist, gilt dies auch für $\tilde{p}$. Zeigen wir die Injektivität von $\tilde{p}$. Sei $m \in M$ mit $0 = (m + \mathrm{Im}\, i)\tilde{p} = mp$. Somit ist $m \in \mathrm{Kern}\, p$, wegen der Exaktheit von $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ bei M also $m \in \mathrm{Im}\, i$. Es folgt $m + \mathrm{Im}\, i = 0$. Insgesamt ist $\tilde{p}$ also bijektiv. Setze $g'' := \tilde{p}^{-1}\tilde{g} : M'' \longrightarrow N$. Es wird

$$g''\,{}_R(p,N) \;=\; pg'' \;=\; (\rho\tilde{p})(\tilde{p}^{-1}\tilde{g}) \;=\; \rho\tilde{g} \;=\; g\;.$$

Also ist $g \in \mathrm{Im}\;{}_R(p,N)$.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\rho"] & M'' \\
 & N & \mathrm{Cokern}\, i \arrow[l, "\tilde{g}"] \arrow[u, "\tilde{p}"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Beispiel 53

(1) Im allgemeinen ist die Sequenz aus Lemma 52.(1) nicht kurz exakt. So etwa ist für die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ von $\mathbf{Z}$-Moduln die unter ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,-)$ resultierende Sequenz

$${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\;{}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,2)\;} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\;{}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,1)\;} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$$

nicht kurz exakt. In der Tat ist ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}) \simeq 0$, aber ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2) \simeq \mathbf{Z}/2$.

(2) Im allgemeinen ist die Sequenz aus Lemma 52.(2) nicht kurz exakt. So etwa ist für die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ von $\mathbf{Z}$-Moduln die unter ${}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Z}/2)$ resultierende Sequenz

$${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \xleftarrow{\;{}_{\mathbf{Z}}(2,\mathbf{Z}/2)\;} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \xleftarrow{\;{}_{\mathbf{Z}}(1,\mathbf{Z}/2)\;} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/2,\mathbf{Z}/2)$$

nicht kurz exakt. In der Tat ist ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \simeq \mathbf{Z}/2$; desweiteren schickt die von $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ induzierte Abbildung ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2) \xleftarrow{{}_{\mathbf{Z}}(2,\mathbf{Z}/2)} {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/2)$ den nichtverschwindenden Morphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ auf $(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2) = (\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2)$. Somit ist diese induzierte Abbildung nicht surjektiv.

1.2.10.2 Tensorprodukt

Das Tensorprodukt versteht man besser über seine universelle Eigenschaft aus untigem Lemma 56 als über seine nun folgende Definition 54.

Sei R ein Ring. Sei M_R ein R-Rechtsmodul. Sei ${}_R N$ ein R-Linksmodul.

Definition 54 Schreibe $e_{m,n} := 1\iota_{(m,n)} \in \coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z}$ für $m \in M$ und $n \in N$; i.e. $e_{m,n}$ ist das Tupel, das an der Stelle (m,n) den Eintrag 1 und an allen anderen Stellen den Eintrag 0 hat.

Setze

$$\begin{array}{rcl} U & := & {}_{\mathbf{Z}}\left\langle \begin{array}{l} \{e_{m+m',\,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} - e_{m',n} - e_{m',n'} \;:\; m,\, m' \in M,\; n,\, n' \in N\} \\ \cup\;\; \{e_{mr,n} - e_{m,rn} \;:\; m \in M,\; n \in N,\; r \in R\} \end{array} \right\rangle \\ & \subseteq & \coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z}\,. \end{array}$$

Definiere das *Tensorprodukt* von M mit N über R als $\mathbf{Z}$-Modul

$$M \underset{R}{\otimes} N \;=\; M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N \;:=\; (\textstyle\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z})/U\,.$$

Schreibe $m \otimes n := e_{m,n} + U \in M \underset{R}{\otimes} N$ für $m \in M$ und $n \in N$. Wir haben also eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} M & \times & N & \xrightarrow{\tau} & M & \underset{R}{\otimes} & N \\ (m & , & n) & \longmapsto & m & \otimes & n\,. \end{array}$$

Ein Element der Form $m \otimes n$ in $M \underset{R}{\otimes} N$ heißt auch *Elementartensor.*

Man darf sich unter $m \otimes n$ ein "noch auszuführendes Produkt von m mit n" vorstellen; cf. auch Lemma 56.

Bemerkung 55

(1) Jedes Element von $\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z}$ ist von der Form $\sum_{(m,n)\in M\times N} z_{m,n} e_{m,n}$ mit $z_{m,n} \in \mathbf{Z}$ und $\{(m,n) \in M \times N \;:\; z_{m,n} \neq 0\}$ endlich.

Also ist jedes Element von $M \underset{R}{\otimes} N$ von der Form $\sum_{(m,n)\in M\times N} z_{m,n}\,(m \otimes n)$ mit $z_{m,n} \in \mathbf{Z}$ und $\{(m,n) \in M \times N \;:\; z_{m,n} \neq 0\}$ endlich.

In anderen Worten, es ist $M \underset{R}{\otimes} N = {}_{\mathbf{Z}}\langle m \otimes n \;:\; m \in M,\, n \in N\rangle = {}_{\mathbf{Z}}\langle (M \times N)\tau\rangle$; cf. auch Aufgabe 25.(1).

(2) Es ist $(m + m') \otimes (n + n') = e_{m+m',\,n+n'} + U = e_{m,n} + e_{m,n'} + e_{m',n} + e_{m',n'} + U = m \otimes n + m \otimes n' + m' \otimes n + m' \otimes n'$ für $m,\, m' \in M$ und $n,\, n' \in N$.

Es ist $mr \otimes n = e_{mr,n} + U = e_{m,rn} + U = m \otimes rn$ für $m \in M$, $n \in N$ und $r \in R$.

(3) Es ist $m \otimes 0 = m \otimes 0 + m \otimes 0 - m \otimes 0 = m \otimes (0+0) - m \otimes 0 = 0$ für $m \in M$.

Genauso ist $0 \otimes n = 0$ für $n \in N$.

Ferner ist $(-m)\otimes n = (-m)\otimes n + m\otimes n - m\otimes n = (-m+m)\otimes n - m\otimes n = -(m\otimes n)$ und genauso $m \otimes (-n) = -(m \otimes n)$ für $m \in M$ und $n \in N$.

Insbesondere ist jedes Element von $M \underset{R}{\otimes} N$ eine Summe von Elementartensoren.

Lemma 56 (Universelle Eigenschaft Tensorprodukt)
*Sei A ein $\mathbf{Z}$-Modul. Eine Abbildung $M \times N \xrightarrow{t} A$ heißt R-*bilinear, *falls*

$$\begin{array}{rcl}(m+m', n+n')t &=& (m,n)t + (m,n')t + (m',n)t + (m',n')t \\ (mr,n)t &=& (m,rn)t\end{array}$$

gelten für $m,\ m' \in M$, $n,\ n' \in N$ und $r \in R$.

Es ist τ eine R-bilineare Abbildung; cf. Bemerkung 55.(2).

Ist eine R-bilineare Abbildung $M \times N \xrightarrow{t} A$ gegeben, so gibt es genau eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{t'} A$ mit $\tau t' = t$. Für diese ist $(m \otimes n)t' = (m,n)t$ für $m \in M$ und $n \in N$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "t"] & \\ M \underset{R}{\otimes} N \arrow[r, dotted, "\exists ! t'"'] & A \end{tikzcd}$$

Beweis. Zur Eindeutigkeit von t'. Für $z_{m,n} \in \mathbf{Z}$ für $m \in M$ und $n \in N$ ist notwendigerweise

$$\big(\textstyle\sum_{m,\,n} z_{m,n}(m\otimes n)\big)t' \;=\; \sum_{m,\,n} z_{m,n}(m\otimes n)t' \;=\; \sum_{m,\,n} z_{m,n}(m,n)\tau t' \;=\; \sum_{m,\,n} z_{m,n}(m,n)t\ .$$

Zur Existenz von t'. Nach Bemerkung 38.(2) existiert eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $t'' : \coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z} \longrightarrow A$ mit $\iota_{(m,n)}t'' : \mathbf{Z} \longrightarrow A,\ z \longmapsto z \cdot (m,n)t$ und also insbesondere mit $e_{m,n}t'' = 1\iota_{(m,n)}t'' = (m,n)t$ für $(m,n) \in M \times N$.

Es wird

$$\begin{array}{rl} & (e_{m+m',\,n+n'} - e_{m,n} - e_{m,n'} - e_{m',n} - e_{m',n'})t'' \\ = & e_{m+m',\,n+n'}t'' - e_{m,n}t'' - e_{m,n'}t'' - e_{m',n}t'' - e_{m',n'}t'' \\ = & (m+m', n+n')t - (m,n)t - (m,n')t - (m',n)t - (m',n')t \\ = & 0 \end{array}$$

für $m,\ m' \in M$ und $n,\ n' \in N$.

Es wird

$$(e_{mr,n} - e_{m,rn})t'' \;=\; e_{mr,n}t'' - e_{m,rn}t'' \;=\; (mr,n)t - (m,rn)t \;=\; 0$$

für $m \in M$, $n \in N$ und $r \in R$.

Somit ist $Ut'' = 0$; cf. Definition 54. Die universelle Eigenschaft des Faktormoduls liefert also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $t' : M \underset{R}{\otimes} N = (\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z})/U \longrightarrow A$, die insbesondere $m\otimes n = e_{m,n} + U$ nach $e_{m,n}t'' = (m,n)t$ schickt für $m \in M$ und $n \in N$; cf. Bemerkung 29.

$$\begin{tikzcd}
(m,n) \arrow[d, mapsto] & M \times N \arrow[d] \arrow[ddr, "t"] & \\
e_{m,n} & \coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z} \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "t''"] & \\
& (\coprod_{(m,n)\in M\times N} \mathbf{Z})/U = M \underset{R}{\otimes} N \arrow[r, "t'"'] & A
\end{tikzcd}$$

$\square$

Beispiel 57

(1) Es ist $\mathbf{Z}/3 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}/2 \simeq 0$, da darin $(z + 3\mathbf{Z}) \otimes (w + 2\mathbf{Z}) = (z + 3\mathbf{Z}) \otimes 3(w + 2\mathbf{Z}) = (z + 3\mathbf{Z})3 \otimes (w + 2\mathbf{Z}) = 0 \otimes (w + 2\mathbf{Z}) = 0$; cf. Bemerkung 55.(1, 2, 3).

(2) Seien allgemeiner $m,\, n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $g := \mathrm{ggT}(m,n)$. Es ist $g = sm + tn$ für gewisse $s,\, t \in \mathbf{Z}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}/m & \times & \mathbf{Z}/n & \longrightarrow & \mathbf{Z}/g \\ (z + m\mathbf{Z} & , & w + n\mathbf{Z}) & \longmapsto & zw + g\mathbf{Z} \end{array}$$

ist wohldefiniert und $\mathbf{Z}$-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es also die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}/m & \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} & \mathbf{Z}/n & \xrightarrow{u} & \mathbf{Z}/g \\ (z + m\mathbf{Z}) & \otimes & (w + n\mathbf{Z}) & \longmapsto & zw + g\mathbf{Z} \end{array}$$

Ferner gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}/m & \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} & \mathbf{Z}/n & \xleftarrow{v} & \mathbf{Z}/g \\ (z + m\mathbf{Z}) & \otimes & (1 + n\mathbf{Z}) & \longleftarrow\!\shortmid & z + g\mathbf{Z}\,, \end{array}$$

da $(g + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (sm + tn + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (tn + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (t + m\mathbf{Z}) \otimes (n + n\mathbf{Z}) = 0$.

Offenbar ist $vu = \mathrm{id}$. Umgekehrt ist für $z,\, w \in \mathbf{Z}$ auch $((z + m\mathbf{Z}) \otimes (w + n\mathbf{Z}))uv = (zw + g\mathbf{Z})v = (zw + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) = (z + m\mathbf{Z}) \otimes (w + n\mathbf{Z})$. Somit ist $uv = \mathrm{id}$, da dies auf $\mathbf{Z}$-linearen Erzeugern nachgerechnet wurde. Also ist u ein Isomorphismus.

Bemerkung 58 *Seien R, S und T Ringe.*
Sei $M = {}_S M_R$ ein S-R-Bimodul. Sei $N = {}_R N_T$ ein R-T-Bimodul.

(1) *Es gibt auf der abelschen Gruppe ${}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T$ eine S-T-Bimodulstruktur, für welche $s \cdot (m \otimes n) * t = (s \cdot m) \otimes (n * t)$ ist für $m \in M$, $n \in N$, $s \in S$ und $t \in T$.*

(2) *Es gibt den Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} {}_R R_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T & \xrightarrow{\sim} & {}_R N_T \\ r \otimes n & \longmapsto & r \cdot n \\ 1 \otimes n & \longleftarrow\!\shortmid & n \end{array}$$

von R-T-Bimoduln.

(3) *Es gibt den Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R R_R & \xrightarrow{\sim} & {}_S M_R \\ m \otimes r & \longmapsto & m * r \\ m \otimes 1 & \longleftarrow\!\shortmid & m \end{array}$$

von S-R-Bimoduln.

Beweis.
Zu (1). Seien $s \in S$ und $t \in T$ gegeben. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} M \times N & \xrightarrow{\lambda'_{s,t}} & M \underset{R}{\otimes} N \\ (m\ ,\ n) & \longmapsto & (s \cdot m) \otimes (n * t) \end{array}$$

ist R-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} M \underset{R}{\otimes} N & \xrightarrow{\lambda_{s,t}} & M \underset{R}{\otimes} N \\ m \otimes n & \longmapsto & (s \cdot m) \otimes (n * t)\ . \end{array}$$

Definiert man nun

$$\begin{array}{rcl} S \times (M \underset{R}{\otimes} N) & \xrightarrow{(\cdot)} & M \underset{R}{\otimes} N \\ (\ s\ ,\ \xi\ ) & \longmapsto & s \cdot \xi \ := \ \xi \lambda_{s,1} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} (M \underset{R}{\otimes} N) \times T & \xrightarrow{(*)} & M \underset{R}{\otimes} N \\ (\ \xi\ ,\ t\ ) & \longmapsto & \xi * t \ := \ \xi \lambda_{1,t}\ , \end{array}$$

so rechnet man nach, daß $(M \underset{R}{\otimes} N, +, \cdot, *)$ ein S-T-Bimodul mit der verlangten Eigenschaft ist; cf. Aufgabe 23.(2).

Zu (2). Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} R & \times & N & \longrightarrow & N \\ (r & , & n) & \longmapsto & r\cdot n \end{array}$$

ist R-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} R & \underset{R}{\otimes} & N & \xrightarrow{\mu} & N \\ r & \otimes & n & \longmapsto & r\cdot n \end{array}$$

Da

$$\big(r'\cdot(\sum_i r_i\otimes n_i)*t\big)\mu = \sum_i (r'\cdot r_i\otimes n_i*t)\mu = \sum_i r'\cdot r_i\cdot n_i*t = r'\cdot(\sum_i r_i\cdot n_i)*t = r'\cdot(\sum_i r_i\otimes n_i)\mu*t$$

für r', $r_i \in R$, $n_i \in N$ und $t \in T$, ist μ eine R-T-lineare Abbildung.
In entgegengesetzter Richtung gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} R & \underset{R}{\otimes} & N & \xleftarrow{\nu} & N \\ 1 & \otimes & n & \longleftarrow\!\shortmid & n \end{array}$$

Es ist $n\nu\mu = (1\otimes n)\mu = n$ für $n \in N$, also $\nu\mu = \mathrm{id}_N$. Ferner ist

$$\begin{array}{rcl} (\sum_i r_i\otimes n_i)\mu\nu & = & \sum_i (r_i\otimes n_i)\mu\nu \\ & = & \sum_i (r_i\cdot n_i)\nu \\ & = & \sum_i 1\otimes r_i\cdot n_i \\ & = & \sum_i 1 * r_i\otimes n_i \\ & = & \sum_i r_i\otimes n_i\ , \end{array}$$

wobei $r_i \in R$ und $n_i \in N$, und also $\mu\nu = \mathrm{id}_{R\underset{R}{\otimes}N}$. Somit ist μ bijektiv. ▫

Bemerkung 59 *Seien R, S und T Ringe.*
Seien ${}_SM_R \xrightarrow{u} {}_SM'_R \xrightarrow{u'} {}_SM''_R$ zwei S-R-lineare Abbildungen zwischen S-R-Bimoduln.
Seien ${}_RN_T \xrightarrow{v} {}_RN'_T \xrightarrow{v'} {}_RN''_T$ zwei R-T-lineare Abbildungen zwischen R-T-Bimoduln.

(1) *Wir haben eine S-T-lineare Abbildung*

$$\begin{array}{ccccccc} {}_SM_R & \underset{R}{\otimes} & {}_RN_T & \xrightarrow{u\underset{R}{\otimes}v} & {}_SM'_R & \underset{R}{\otimes} & {}_RN'_T \\ m & \otimes & n & \longmapsto & mu & \otimes & nv\ . \end{array}$$

Wir schreiben noch $M\underset{R}{\otimes} v := \mathrm{id}_M \underset{R}{\otimes} v$ und $u\underset{R}{\otimes} N := u\underset{R}{\otimes}\mathrm{id}_N$.

Manchmal wird auch kurz $u\otimes v := u\underset{R}{\otimes} v$ geschrieben, etc.

(2) *Es ist* $(u \underset{R}{\otimes} v)(u' \underset{R}{\otimes} v') = (uu' \underset{R}{\otimes} vv')$.

Es ist $\mathrm{id}_M \underset{R}{\otimes} \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \underset{R}{\otimes} N}$.

Beweis. Zu (1). Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} {}_S M_R & \times & {}_R N_T & \longrightarrow & {}_S M'_R & \underset{R}{\otimes} & {}_R N'_T \\ (m & , & n) & \longmapsto & mu & \otimes & nv\, . \end{array}$$

ist R-bilinear. Mit Lemma 56 gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} {}_S M_R & \underset{R}{\otimes} & {}_R N_T & \xrightarrow{u \underset{R}{\otimes} v} & {}_S M'_R & \underset{R}{\otimes} & {}_R N'_T \\ m & \otimes & n & \longmapsto & mu & \otimes & nv\, . \end{array}$$

Diese ist nun auch S-T-linear, wie man auf den Elementartensoren sieht.

Zu (2). Es genügt, die jeweiligen Abbildungen auf Elementartensoren zu vergleichen, da diese das Tensorprodukt $\mathbf{Z}$-linear erzeugen.

Für $m \in M$ und $n \in N$ wird $(m \otimes n)(u \otimes v)(u' \otimes v') = (mu \otimes nv)(u' \otimes v') = muu' \otimes nvv' = (m \otimes n)(uu' \otimes vv')$. □

Lemma 60

(1) *Gegeben eine kurz exakte Sequenz* $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ *von* S-R-*Bimoduln und ein* R-T-*Bimodul* N. *Dann ist die Sequenz*

$$M' \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{i \otimes N} M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{p \otimes N} M'' \underset{R}{\otimes} N$$

von S-T-*Bimoduln rechtsexakt.*

(2) *Gegeben ein* S-R-*Bimodul* M *und eine kurz exakte Sequenz* $N' \xrightarrow{j} N \xrightarrow{q} N''$ *von* R-T-*Bimoduln. Dann ist die Sequenz*

$$M \underset{R}{\otimes} N' \xrightarrow{M \otimes j} M \underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{M \otimes q} M \underset{R}{\otimes} N''$$

von S-T-*Bimoduln rechtsexakt.*

Beweis. Zu (1). Es ist $p \otimes N$ surjektiv, da wegen p surjektiv jeder Elementartensor von $M'' \underset{R}{\otimes} N$ im Bild von $p \otimes N$ liegt, und also, da $p \otimes N$ mit Summen vertauscht, jedes Element von $M'' \underset{R}{\otimes} N$ im Bild von $p \otimes N$ liegt.

Es ist $(i \otimes N)(p \otimes N) = ip \otimes N = 0 \otimes N = 0$. Also ist $\mathrm{Im}(i \otimes N) \subseteq \mathrm{Kern}(p \otimes N)$.

Wir haben eine Abbildung $M'' \times N \xrightarrow{f} \mathrm{Cokern}(i \otimes N)$, die $(m'', n) \longmapsto m \otimes n + \mathrm{Im}(i \otimes N)$ schickt, wobei $m \in M$ mit $mp = m''$ gewählt werde. Hierzu ist zu zeigen, daß das Bild nicht von der Wahl dieses Elements m abhängt. Seien also $m,\ \tilde{m}\in M$ mit $mp = m'' = \tilde{m}p$ gegeben. Dann ist $m-\tilde{m}\in \operatorname{Kern} p = \operatorname{Im} i$. Also gibt es ein $m'\in M'$ mit $m-\tilde{m} = m'i$. Somit ist auch $m\otimes n - \tilde{m}\otimes n = (m-\tilde{m})\otimes n = m'i\otimes n \in \operatorname{Im}(i\otimes N)$.

Diese Abbildung f ist R-bilinear. Denn seien zum einen $m'',\ \tilde{m}''\in M''$ und $n,\ \tilde{n}\in N$ gegeben. Wähle $m\in M$ mit $mp = m''$ und $\tilde{m}\in M$ mit $\tilde{m}p = \tilde{m}''$. Dann ist auch $(m+\tilde{m})p = m''+\tilde{m}''$. Somit wird

$$\begin{array}{rcl}(m''+\tilde{m}'', n+\tilde{n})f & = & (m+\tilde{m})\otimes(n+\tilde{n}) + \operatorname{Im}(i\otimes N) \\ & = & m\otimes n + m\otimes\tilde{n} + \tilde{m}\otimes n + \tilde{m}\otimes\tilde{n} + \operatorname{Im}(i\otimes N) \\ & = & (m'',n)f + (m'',\tilde{n})f + (\tilde{m}'',n)f + (\tilde{m}'',\tilde{n})f\ . \end{array}$$

Seien zum anderen $m''\in M''$, $n\in N$ und $r\in R$ gegeben. Wähle $m\in M$ mit $mp = m''$. Dann wird $(mr)p = mpr = m''r$. Somit wird

$$\begin{array}{rcl}(m''r, n)f & = & mr\otimes n + \operatorname{Im}(i\otimes N) \\ & = & m\otimes rn + \operatorname{Im}(i\otimes N) \\ & = & (m'', rn)f\ . \end{array}$$

Wir erhalten also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M''\underset{R}{\otimes} N \xrightarrow{g} \operatorname{Cokern}(i\otimes N)$ mit $(m''\otimes n)g = m\otimes n + \operatorname{Im}(i\otimes N)$, wobei $m''\in M''$, $n\in N$ und $m\in M$ so, daß $mp = m''$. Insbesondere ist für $m\in M$ und $n\in N$ auch $(m\otimes n)(p\otimes N)g = (mp\otimes n)g = m\otimes n + \operatorname{Im}(i\otimes N) = (m\otimes n)\rho$. Es folgt $(p\otimes N)g = \rho$.

Ist also $\xi\in\operatorname{Kern}(p\otimes N)$, so ist $\xi + \operatorname{Im}(i\otimes N) = \xi\rho = \xi(p\otimes N)g = 0$, i.e. $\xi\in\operatorname{Im}(i\otimes N)$. Dies zeigt $\operatorname{Im}(i\otimes N)\supseteq \operatorname{Kern}(p\otimes N)$.

Insgesamt ist $\operatorname{Im}(i\otimes N) = \operatorname{Kern}(p\otimes N)$.

$$\begin{tikzcd} M'\underset{R}{\otimes} N \arrow[r, "i\otimes N"] & M\underset{R}{\otimes} N \arrow[r, "p\otimes N"] \arrow[dr, "\rho"'] & M''\underset{R}{\otimes} N \arrow[d, "g"] \\ & & \operatorname{Cokern}(i\otimes N) \end{tikzcd}$$

$\square$

Beispiel 61 Sei $R = \mathbf{Z}$. Es ist $\mathbf{Z}\xrightarrow{2}\mathbf{Z}$ injektiv, nicht aber $\mathbf{Z}/2\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Z}\xrightarrow{\mathbf{Z}/2\otimes 2}\mathbf{Z}/2\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Z}$. In der Tat schickt unter Verwendung von Bemerkung 58.(3) das Kompositum

$$(\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Z} \xrightarrow{\mathbf{Z}/2\otimes 2} \mathbf{Z}/2\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2)$$

das Element 1 auf $1\otimes 1$, sodann auf $1\otimes 2$ und schließlich auf $1\cdot 2 = 0$.

Also resultieren in Lemma 60 im allgemeinen nur rechtsexakte, nicht aber kurz exakte Sequenzen.

1.2.10.3 Zusammenhang Hom und Tensorprodukt

Seien R, S und T Ringe.

Lemma 62
Sei ${}_R M_S \xleftarrow{f} {}_R M'_S$ *eine R-S-lineare Abbildung zwischen R-S-Bimoduln.*

Sei ${}_R N \xrightarrow{g} {}_R N'$ *eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln.*

Sei ${}_S X \xleftarrow{h} {}_S X'$ *eine S-lineare Abbildung zwischen S-Linksmoduln.*

(1) *Es gibt den Isomorphismus von* $\mathbf{Z}$*-Moduln*

$$\begin{array}{rcl} {}_R({}_R M_S \underset{S}{\otimes} {}_S X,\ {}_R N) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{X,M,N}} & {}_S({}_S X,\ {}_R({}_R M_S\,,\ {}_R N)) \\ \varphi & \longmapsto & \big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)\big) \\ (m \otimes x \mapsto m(x\psi)) & \longleftarrow\!\!\shortmid & \psi \end{array}$$

(2) *Das Viereck*

$$\begin{tikzcd} {}_R({}_R M_S \underset{S}{\otimes} {}_S X,\ {}_R N) \arrow[r, "\alpha_{X,M,N}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_R(f \underset{S}{\otimes} h,\, g)"'] & {}_S({}_S X,\ {}_R({}_R M_S\,,\ {}_R N)) \arrow[d, "{}_S(h,\, {}_R(f, g))"] \\ {}_R({}_R M'_S \underset{S}{\otimes} {}_S X',\ {}_R N') \arrow[r, "\alpha_{X',M',N'}", "\sim"'] & {}_S({}_S X',\ {}_R({}_R M'_S\,,\ {}_R N')) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Cf. auch Aufgabe 66.

Beweis.

Zu (1).

Zur Wohldefiniertheit von $\alpha_{X,M,N}$.

Sei $x \in X$ gegeben. Es ist $M \longrightarrow N$, $m \longmapsto (m \otimes x)\varphi$ eine R-lineare Abbildung, da sie mit der Addition verträglich ist und da für $r \in R$ und $m \in M$ sich

$$((rm) \otimes x)\varphi \;=\; (r(m \otimes x))\varphi \;=\; r((m \otimes x)\varphi)$$

ergibt.

Es ist ${}_S X \longrightarrow {}_R(M, N)$, $x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)$ eine S-lineare Abbildung, da sie mit der Addition verträglich ist und für $s \in S$ und $x \in X$ sich

$$(m \mapsto (m \otimes sx)\varphi) \;=\; (m \mapsto (ms \otimes x)\varphi) \;=\; s(m \mapsto (m \otimes x)\varphi)$$

ergibt.

Ferner ist $\alpha_{X,M,N}$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung.

Zur Wohldefiniertheit des angegebenen Inversen von $\alpha_{X,M,N}$.

Die Abbildung $M \times X \longrightarrow N$, $(m,x) \longmapsto m(x\psi)$ ist S-bilinear. Denn sie ist additiv in m und x; ferner ist für $m \in M$, $x \in X$ und $s \in S$

$$m((sx)\psi) \;=\; m(s(x\psi)) \;=\; (ms)(x\psi)\ .$$

Also gibt es eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M \underset{S}{\otimes} X \longrightarrow N$, $m \otimes x \longmapsto m(x\psi)$. Diese ist auch R-linear, da für $m \in M$, $x \in X$ und $r \in R$ sich

$$r(m \otimes x) \;=\; (rm) \otimes x \;\longmapsto\; (rm)(x\psi) \;=\; r(m(x\psi))$$

ergibt.

Ferner ist auch das angegebene Inverse von $\alpha_{X,M,N}$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung.

Zur gegenseitigen Inversion auf der linken Seite. Es kommt $\varphi \in {}_R({}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\ {}_RN)$ auf $\psi := \big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)\big)$, und dies wieder zurück auf

$$\big(m \otimes x \longmapsto m(x\psi) = m(m \mapsto (m \otimes x)\varphi) = (m \otimes x)\varphi\big) \;=\; \varphi\ .$$

Zur gegenseitigen Inversion auf der rechten Seite. Es kommt $\psi \in {}_S({}_SX,\ {}_R(M,N))$ auf $\varphi := (m \otimes x \mapsto m(x\psi))$, und dies wieder zurück auf

$$\big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi = m(x\psi))\big) \;=\; \big(x \mapsto x\psi\big) \;=\; \psi\ .$$

Zu (2). Siehe Aufgabe 29. □

1.2.11 Projektiv und injektiv

Sei R ein Ring.

1.2.11.1 Projektive Moduln

Definition 63 Ein R-Linksmodul P heißt *projektiv,* falls für jede surjektive R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{g} M''$ zwischen R-Linksmoduln die Abbildung

$${}_R(P,M) \xrightarrow{{}_R(P,g)} {}_R(P,M'')$$

surjektiv ist.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dotted, "\exists u"'] \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \end{tikzcd}$$

In anderen Worten, P ist projektiv, falls $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ kurz exakte Sequenzen von R-Linksmoduln in kurz exakte Sequenzen von $\mathbf{Z}$-Moduln überführt; cf. Lemma 52.(1).

Bemerkung 64

(1) *Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein projektiver R-Linksmodul P_α gegeben. Dann ist $\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha$ projektiv.*

(2) *Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ projektiv ist, dann sind auch X und Y projektiv.*

(3) *Ein R-Linksmodul X ist genau dann projektiv, wenn es eine Menge B und einen R-Linksmodul Y so gibt, daß $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta \in B} R$. Insbesondere ist also $R^{\oplus n}$ projektiv für $n \geqslant 0$.*

(4) *Für jeden R-Linksmodul M gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $P \longrightarrow M$ von einem projektiven R-Linksmodul P.*

Beweis. Siehe Aufgabe 31.

1.2.11.2 Injektive Moduln

Definition 65 Ein R-Linksmodul I heißt *injektiv,* falls für jede injektive R-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{f} M$ zwischen R-Linksmoduln die Abbildung

$$
{}_R(M', I) \xleftarrow{{}_R(f,I)} {}_R(M, I)
$$

surjektiv ist.

$$
\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dotted, "\exists v"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

In anderen Worten, I ist injektiv, falls $\mathrm{Hom}_R(-,I)$ kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen überführt; cf. Lemma 52.(2).

Bemerkung 66

(1) *Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein injektiver R-Linksmodul I_α gegeben. Dann ist $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ injektiv.*

(2) *Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ injektiv ist, dann sind auch X und Y injektiv.*

Beweis. Siehe Aufgabe 32.

Lemma 67 *Sei Q ein $\mathbf{Z}$-Modul, in welchem für jedes $q \in Q$ und jedes $k \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ ein $\tilde{q}$ mit $k\tilde{q} = q$ existiert; ein solcher $\mathbf{Z}$-Modul heißt auch* divisibel. *Es ist Q injektiv.*

Es sind e.g. $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ divisibel.

Wir werden Zorns Lemma verwenden; cf. e.g. [**7,** Anh. A].

Beweis. Sei eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{f} M$ zwischen abelschen Gruppen gegeben. Wir haben zu zeigen, daß ${}_{\mathbf{Z}}(f, Q)$ surjektiv ist. O.E. ist $M' \subseteq M$ ein Teilmodul und f die Inklusionsabbildung. Sei eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{g'} Q$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $M \xrightarrow{g} Q$ mit $g' = g\,{}_{\mathbf{Z}}(f, Q) = fg = g|_{M'}$ existiert.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g'"'] & M \arrow[dl, dotted, "\exists g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

Sei

$$\mathcal{F} \;:=\; \{(N, h) \;:\; M' \subseteq N \subseteq M \text{ ist Teilmodul, } N \xrightarrow{h} Q \text{ ist } \mathbf{Z}\text{-linear mit } h|_{M'} = g'\}\ .$$

Zum Beispiel ist $(M', g') \in \mathcal{F}$. Es ist $\mathcal{F}$ teilgeordnet vermöge $(N_1\,,\,h_1) \leqslant (N_2\,,\,h_2) :\Longleftrightarrow N_1 \subseteq N_2$ und $h_2|_{N_1} = h_1$. Um das Lemma von Zorn auf $\mathcal{F}$ anzuwenden, haben wir zu zeigen, daß jede totalgeordnete Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$ in $\mathcal{F}$ eine obere Schranke besitzt.

O.E. ist $\mathcal{T} \neq \emptyset$. Sei $N_{\mathcal{T}} := \bigcup_{(N,h)\in\mathcal{T}} N$. Es ist $M' \subseteq N_{\mathcal{T}} \subseteq M$. Es ist $N_{\mathcal{T}} \subseteq M$ ein $\mathbf{Z}$-Teilmodul, da $0 \in N_{\mathcal{T}}$ und da für $z_1\,,\,z_2 \in \mathbf{Z}$ und $m_1\,,\,m_2 \in N_{\mathcal{T}}$ Elemente $(N_1\,,h_1)$, $(N_2\,,h_2) \in \mathcal{T}$ so existieren, daß $m_1 \in N_1$ und $m_2 \in N_2$; da o.E. $(N_1\,,h_1) \leqslant (N_2\,,h_2)$, ist also $z_1m_1 + z_2m_2 \in N_2 \subseteq N_{\mathcal{T}}$. Setze $h_{\mathcal{T}} : N_{\mathcal{T}} \longrightarrow Q$, $m \longmapsto mh_1$, wobei $(N_1\,,h_1) \in \mathcal{T}$ so gewählt ist, daß $m \in N_1$. Ist $(N_2\,,h_2) \in \mathcal{T}$ mit $m \in N_2$ eine alternative Wahl, so ist o.E. $(N_1\,,h_1) \leqslant (N_2\,,h_2)$, also $h_2|_{N_1} = h_1$ und mithin $mh_1 = mh_2$. Somit ist $h_{\mathcal{T}}$ eine wohldefinierte Abbildung. Es ist $h_{\mathcal{T}}$ auch $\mathbf{Z}$-linear, da für $m_1\,,\,m_2 \in N_{\mathcal{T}}$ Elemente $(N_1\,,h_1)$, $(N_2\,,h_2) \in \mathcal{T}$ so existieren, daß $m_1 \in N_1$ und $m_2 \in N_2$; da o.E. $(N_1\,,h_1) \leqslant (N_2\,,h_2)$, ist also für $z_1,\, z_2 \in \mathbf{Z}$

$$(z_1m_1 + z_2m_2)h_{\mathcal{T}} \;=\; (z_1m_1 + z_2m_2)h_2 \;=\; z_1(m_1h_2) + z_2(m_2h_2) \;=\; z_1(m_1h_{\mathcal{T}}) + z_2(m_2h_{\mathcal{T}})\ .$$

Schließlich ist $h_{\mathcal{T}}|_{M'} = g'$. Insgesamt ist $(N_{\mathcal{T}}, h_{\mathcal{T}}) \in \mathcal{F}$.

Ferner ist nach Konstruktion $(N, h) \leqslant (N_{\mathcal{T}}, h_{\mathcal{T}})$ für alle $(N, h) \in \mathcal{T}$.

Somit können wir Zorns Lemma anwenden und insbesondere folgern, daß das Element $(M', g') \in \mathcal{F}$ in einem maximalen Element (N, h) von $\mathcal{F}$ bezüglich $(\leqslant)$ enthalten ist.

Annahme, es ist $N \subsetneq M$. Sei $m \in M \smallsetminus N$. Sei

$$\tilde{N} \;:=\; {}_{\mathbf{Z}}\langle N \cup \{m\}\rangle = \{n + zm \;:\; n \in N,\; z \in \mathbf{Z}\}\ .$$

Es ist $M' \subseteq N \subsetneq \tilde{N} \subseteq M$.

Fall $N \cap \mathbf{Z}m = 0$. Ist $n + zm = n' + z'm$ für $n,\, n' \in N$ und $z,\, z' \in \mathbf{Z}$, so ist $n - n' = (z' - z)m \in N \cap \mathbf{Z}m = 0$, und also bereits $n = n'$. Folglich ist $\tilde{h} : \tilde{N} \longrightarrow Q$, $n + zm \longmapsto nh$ wohldefiniert. Wie h ist auch $\tilde{h}$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung. Es ist $\tilde{h}|_N = h$. Insgesamt ist $(N, h) < (\tilde{N}, \tilde{h})$ in $\mathcal{F}$. Wir sind diesenfalls bei einem *Widerspruch* angelangt.

Fall $N \cap \mathbf{Z}m \neq 0$. Es ist $\{z \in \mathbf{Z} \;:\; zm \in N\} = k\mathbf{Z}$ für ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$; cf. Aufgabe 4.(1). Nach Fallvoraussetzung ist $k \neq 0$. Wegen der Divisibilität von Q gibt es ein $\tilde{q} \in Q$ mit $k\tilde{q} = (km)h$. Setze

$$\begin{array}{rcl} \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{h}} & Q \\ n + zm & \longmapsto & nh + z\tilde{q} \end{array}$$

Sind $z,\, z' \in \mathbf{Z}$ und $n,\, n' \in N$ mit $n + zm = n' + z'm$, so ist $(z' - z)m = n - n' \in N$, also $z' - z = \ell k$ für ein $\ell \in \mathbf{Z}$, und es wird

$$\begin{array}{rcl} (nh + z\tilde{q}) - (n'h + z'\tilde{q}) & = & (n - n')h - (z' - z)\tilde{q} \\ & = & ((z' - z)m)h - (z' - z)\tilde{q} \\ & = & (\ell km)h - \ell k\tilde{q} \\ & = & \ell\big((km)h - k\tilde{q}\big) \\ & = & 0\,. \end{array}$$

Somit ist $\tilde{h}$ wohldefiniert. Da h eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung ist, gilt dies auch für $\tilde{h}$. Ferner ist $\tilde{h}|_N = h$. Insgesamt ist $(N, h) < (\tilde{N}, \tilde{h})$ in $\mathcal{F}$. Wir sind diesenfalls bei einem *Widerspruch* angelangt.

Also ist $N = M$, und wir können $g := h$ verwenden. $\square$

Satz 68 *Für jeden R-Linksmodul X gibt es eine injektive R-lineare Abbildung $X \longrightarrow I$ in einen injektiven R-Linksmodul I.*

Beweis. Sei M ein $\mathbf{Z}$-Modul. Wir *behaupten,* daß es eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von M in einen injektiven $\mathbf{Z}$-Modul gibt. O.E. ist $M \not\simeq 0$.

Sei $m \in M \smallsetminus \{0\}$. Es ist $\{z \in \mathbf{Z} \;:\; zm = 0\} = k\mathbf{Z}$ für ein $k \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$; cf. Aufgabe 4.(1).

Fall $k = 0$. Wir haben einen $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus $\mathbf{Z}m \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$, $m \longmapsto 1$; cf. Lemma 30. Wir können komponieren zu einer injektiven $\mathbf{Z}$-linearen Abbildung $\mathbf{Z}m \longrightarrow \mathbf{Q}$, $m \longmapsto 1$. Da $\mathbf{Q}$ nach Lemma 67 injektiv ist, gibt es also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $f_m : M \longrightarrow \mathbf{Q} =: Q_m$, welche auf die vorgenannte einschränkt, welche also insbesondere m nicht auf 0 abbildet.

Fall $k = 1$. Tritt wegen $m \neq 0$ nicht auf.

Fall $k \geqslant 2$. Wir haben einen $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus $\mathbf{Z}m \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/k$, $m \longmapsto 1$; cf. Lemma 30. Wir können komponieren zu einer injektiven $\mathbf{Z}$-linearen Abbildung $\mathbf{Z}m \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $m \longmapsto \frac{1}{k} + \mathbf{Z}$. Da $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ nach Lemma 67 injektiv ist, gibt es also eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $f_m : M \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} =: Q_m$, welcher auf die vorgenannte einschränkt, welche also insbesondere m nicht auf 0 abbildet.

Nach Lemma 67 und Bemerkung 66.(1) ist $\prod_{m \in M \smallsetminus \{0\}} Q_m$ injektiv. Sei $M \xrightarrow{f} \prod_{m \in M \smallsetminus \{0\}} Q_m$ mit $f\pi_m = f_m$ für $m \in M \smallsetminus \{0\}$; cf. Bemerkung 38.(1). Es ist f eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung, welche nur 0 auf 0 abbildet, da für $m \in M \setminus \{0\}$ ja $mf\pi_m = mf_m \neq 0$, welche also injektiv ist; cf. Bemerkung 38.(1). Dies zeigt die *Behauptung.*

Zurück zum gegebenen R-Linksmodul X. Mit der Behauptung können wir eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$ {}_{\mathbf{Z}}R_R \underset{R}{\otimes} {}_R X \xrightarrow{f} {}_{\mathbf{Z}}J $$

in einen injektiven $\mathbf{Z}$-Linksmodul ${}_{\mathbf{Z}}J$ wählen. Via Lemma 62.(1) erhalten wir die R-lineare Abbildung

$$ \begin{array}{rcl} {}_R X & \xrightarrow{g} & {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R\,,\ {}_{\mathbf{Z}}J) \\ x & \longmapsto & (r \longmapsto (r \otimes x)f) \end{array} $$

Für $x \in X$ bedeutet $xg = 0$ gerade, daß $(r \otimes x)f = 0$ für alle $r \in R$. Die Injektivität von f liefert also insbesondere $1 \otimes x = 0$. Die Abbildung $R \underset{R}{\otimes} X \longrightarrow X$, $r \otimes x \longmapsto rx$ aus Bemerkung 58.(2) gibt nun $x = 0$. Also ist g injektiv.

Bleibt zu zeigen, daß ${}_R I := {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R\,,\ {}_{\mathbf{Z}}J) = {}_{\mathbf{Z}}(R, J)$ ein injektiver R-Linksmodul ist. Sei $Y' \xrightarrow{j} Y$ eine injektive R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln. Bemerkung 58.(2) gibt uns ein Viereck von R-linearen Abbildungen

$$ \begin{tikzcd} R \underset{R}{\otimes} Y' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "R \underset{R}{\otimes} j"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ R \underset{R}{\otimes} Y \arrow[r, "\sim"] & Y \end{tikzcd} . $$

Dieses kommutiert. Also folgt aus der Injektivität von j die Injektivität von $R \underset{R}{\otimes} j$. Dies gilt auch noch, wenn wir von $R \underset{R}{\otimes} j$ nur als $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung betrachten, i.e. statt mit ${}_R R_R$ vielmehr mit ${}_{\mathbf{Z}}R_R$ tensorieren.

Lemma 62.(2) gibt uns folgendes kommutative Viereck von $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen.

$$ \begin{tikzcd} {}_{\mathbf{Z}}(R \underset{R}{\otimes} Y, J) \arrow[r, "\alpha_{Y,R,J}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_{\mathbf{Z}}(R \underset{R}{\otimes} j,\, J)"'] & {}_R(Y,\ {}_{\mathbf{Z}}(R, J)) \arrow[d, "{}_R(j,\, {}_{\mathbf{Z}}(R,J))"] \\ {}_{\mathbf{Z}}(R \underset{R}{\otimes} Y', J) \arrow[r, "\alpha_{Y',R,J}", "\sim"'] & {}_R(Y',\ {}_{\mathbf{Z}}(R, J)) \end{tikzcd} $$

Wegen der Injektivität von J und der Injektivität von $R \underset{R}{\otimes} j$ ist darin ${}_{\mathbf{Z}}(R \underset{R}{\otimes} j,\ J)$ surjektiv. Also ist auch ${}_R(j,\ {}_{\mathbf{Z}}(R, J)) = {}_R(j,\ {}_R I)$ surjektiv. $\square$

Beispiel 69

(1) Es ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ eine surjektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung vom projektiven $\mathbf{Z}$-Modul $\mathbf{Z}$. Cf. Bemerkung 64.(3).

(2) Es ist $\mathbf{Z}/3 \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $z + 3\mathbf{Z} \longmapsto \frac{z}{3} + \mathbf{Z}$ eine injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung in den injektiven $\mathbf{Z}$-Modul $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Cf. Lemma 67.

Kapitel 2

Kategorien, Funktoren und Transformationen

2.1 Kategorien

2.1.1 Definition Kategorien

Definition 70 Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ ist ein Tupel

$$(\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}, \mathsf{Start}, \mathsf{Identität}, \mathsf{Ziel}, \mathsf{Komposition})\ ,$$

bestehend aus Mengen ([3]) $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (*Objekte*), $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ (*Morphismen*), Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \arrow[r, shift left=2, "\mathsf{Start}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathsf{Ziel}"'] & \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \arrow[l, "\mathsf{Identität}"'] \end{tikzcd}$$

und einer Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \{(f,g) \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \;:\; f\,\mathsf{Ziel} = g\,\mathsf{Start}\} & \xrightarrow{\mathsf{Komposition}} & \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \\ (f,g) & \longmapsto & (f,g)\,\mathsf{Komposition} =: f \cdot g = fg\ . \end{array}$$

Ist ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ mit $f\,\mathsf{Start} = X$ und $f\,\mathsf{Ziel} = Y$ in $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gegeben, so schreiben wir auch $X \xrightarrow{f} Y$ oder $f : X \longrightarrow Y$ und sagen, f sei ein Morphismus *von* X *nach* Y in $\mathcal{C}$.

Für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ schreiben wir auch $\mathrm{id}_X = \mathrm{id} = 1_X = 1 := X\,\mathsf{Identität}$.

Folgende Bedingungen sollen gelten.

[3] Wir werden sich an diesen Punkt anschließende mengentheoretische Fragestellungen ignorieren. Wer sich dafür interessiert, schlage unter “Grothendieck universe” nach.

(Kat 1) Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist X Identität Start $= X$ und X Identität Ziel $= X$.
Kurz, es ist $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$.

(Kat 2) Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ ist $\mathrm{id}_X\, f = f$ und $f\,\mathrm{id}_Y = f$.

(Kat 3) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ ist (fg) Start $= f$ Start und (fg) Ziel $= g$ Ziel.
Kurz, es ist $X \xrightarrow{fg} Z$.

(Kat 4) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ ist $f(gh) = (fg)h =: fgh$.

Für gegebene Objekte $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ schreiben wir

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y) = (X,Y) := \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \ :\ f\,\mathsf{Start} = X,\ f\,\mathsf{Ziel} = Y\}$$

für die Menge der Morphismen von X nach Y.

Hom wie Homomorphismen, der alte Begriff für Morphismen.

Wir schreiben manchmal auch $(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) = (X \xrightarrow{fg} Z)$ für das Kompositum, vorausgesetzt, es ist aus dem Kontext klar, daß komponiert wird.

Man schreibt manchmal auch $(X = X) = (X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X)$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Beispiel 71

(1) Die Kategorie (Sets) der Mengen hat als Objekte die Mengen ([3]) und als Morphismen die Abbildungen zwischen Mengen. Sind X und Y Mengen, so bezeichnet also $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sets})}(X,Y) = {}_{(\mathrm{Sets})}(X,Y)$ die Menge der Abbildungen von X nach Y. Für eine Menge X ist id_X die identische Abbildung auf X. Die Operation Komposition ist die Komposition von Abbildungen, i.e. für Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ bezeichnet $X \xrightarrow{fg} Z$ das Kompositum von f und g.

(2) Die Kategorie (Rings) der Ringe hat als Objekte die Ringe ([3]) und als Morphismen die Ringmorphismen zwischen Ringen. Sind R und S Ringe, so bezeichnet also $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Rings})}(R,S) = {}_{(\mathrm{Rings})}(R,S)$ die Menge der Ringmorphismen von R nach S. Cf. §1.1.1, §1.1.3.

(3) Sei R ein Ring. Die Kategorie R-Mod der R-Linksmoduln hat als Objekte die R-Linksmoduln ([3]) und als Morphismen die R-linearen Abbildungen zwischen R-Linksmoduln. Insbesondere ist für R-Linksmoduln M und N

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-Mod}}(M,N) \;=\; \operatorname{Hom}_R(M,N) \;=\; {}_R(M,N)\ ,$$

und diese Menge trägt zudem die Struktur einer abelschen Gruppe. Cf. §1.2.1, §1.2.3, §1.2.10.1.

Sei S ein weiterer Ring. Analog haben wir die Kategorie Mod-S der S-Rechtsmoduln und der S-linearen Abbildungen. Ferner haben wir die Kategorie R-Mod-S der R-S-Bimoduln und der R-S-linearen Abbildungen. Cf. §1.2.8.

Bemerkung 72

(1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine *Teilkategorie* $\mathcal{D}$ in $\mathcal{C}$ besteht aus Teilmengen $\operatorname{Ob}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{Mor}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ so, daß für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ auch $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Mor}\mathcal{D}$ liegt, daß für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{D}$ auch $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ liegen, und daß für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{D}$ auch $X \xrightarrow{fg} Z$ in $\operatorname{Mor}\mathcal{D}$ liegt. Ferner gehören zu $\mathcal{D}$ die jeweilig eingeschränkten Operationen. Es ist $\mathcal{D}$ wieder eine Kategorie. Wir schreiben auch $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$.

E.g. gibt es in (Sets) die Teilkategorie, die als Objekte die endlichen Mengen und als Morphismen die injektiven Abbildungen zwischen endlichen Mengen hat.

Die Teilkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt *voll,* falls ${}_{\mathcal{D}}(X,Y) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Eine volle Teilkategorie ist durch Angabe der Teilmenge $\operatorname{Ob}\mathcal{D} \subseteq \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ festgelegt, da dann $\operatorname{Mor}\mathcal{D} = \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}\ :\ f\,\mathsf{Start},\ f\,\mathsf{Ziel} \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}\}$. Umgekehrt definiert jede Teilmenge von $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ so eine volle Teilkategorie von $\mathcal{C}$.

E.g. gibt es in (Sets) die volle Teilkategorie der Mengen mit Kardinalität in $\{2,5,6\}$ (als Objekte, als Morphismen dann natürlich alle Abbildungen zwischen diesen).

(2) Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ Kategorien. Wir definieren ihr *direktes Produkt* $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ via $\operatorname{Mor}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') := \operatorname{Mor}\mathcal{C} \times \operatorname{Mor}\mathcal{C}'$, via $\operatorname{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') := \operatorname{Ob}\mathcal{C} \times \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$, via $(X,X') \xrightarrow{(f,f')} (Y,Y')$ für $X \xrightarrow{f} Y$ und $X' \xrightarrow{f'} Y'$, via $\mathrm{id}_{(X,X')} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{X'})$ und via $(f,f')(g,g') = (fg, f'g')$ für $(X,X') \xrightarrow{(f,f')} (Y,Y')$ und $(Y,Y') \xrightarrow{(g,g')} (Z,Z')$. Es ist $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ wieder eine Kategorie.

2.1.2 Die entgegengesetzte Kategorie

Definition 73 Sei $\mathcal{C} = (\operatorname{Ob}\mathcal{C}, \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \mathsf{Start}, \mathsf{Identität}, \mathsf{Ziel}, (\cdot))$ eine Kategorie.

Sei $\mathcal{C}^\circ = (\operatorname{Ob}\mathcal{C}, \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \mathsf{Ziel}, \mathsf{Identität}, \mathsf{Start}, (\cdot^\circ))$ die zu $\mathcal{C}$ *entgegengesetzte* Kategorie (engl. opposite); wobei also insbesondere ${}_{\mathcal{C}^\circ}(Y,X) = {}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für $X,\ Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}^\circ$; und wobei

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\mathcal{C}^\circ}(Z,Y) & \times & {}_{\mathcal{C}^\circ}(Y,X) & \xrightarrow{(\cdot^\circ)} & {}_{\mathcal{C}^\circ}(Z,X) \\ (g & , & f) & \longmapsto & g \cdot^\circ f \ := \ f \cdot g \end{array}$$

für $X,\ Y,\ Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}^\circ$.

In anderen Worten, es wird

$$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) \qquad = \qquad (X \xrightarrow{\quad f\cdot g \quad} Z)$$

in $\mathcal{C}$ uminterpretiert zu

$$(X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z) \qquad = \qquad (X \xleftarrow{g\cdot^\circ f \,=\, f\cdot g} Z)$$

in $\mathcal{C}^\circ$. Hierbei deuten die durchgezogenen Pfeile die Interpretation als Morphismus in $\mathcal{C}$, die gepunktelten die Interpretation als Morphismus in $\mathcal{C}^\circ$ an.

Überprüfen wir pars pro toto die Assoziativität, i.e. (Kat 4). Sei ein komponierbares Tripel (h, g, f) in $\mathcal{C}^\circ$ gegeben. Also ist (f, g, h) ein komponierbares Tripel in $\mathcal{C}$. Wir erhalten

$$h \cdot^\circ (g \cdot^\circ f) \;=\; (f \cdot g) \cdot h \;=\; f \cdot (g \cdot h) \;=\; (h \cdot^\circ g) \cdot^\circ f\;.$$

Wir merken noch an, daß $\mathcal{C}^{\circ\circ} = \mathcal{C}$.

Cf. auch Aufgabe 9.

2.1.3 Eigenschaften von Morphismen

Definition 74 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. In (1-7) seien die Morphismen aus $\mathcal{C}$.

(1) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Isomorphismus,* falls es $X \xleftarrow{g} Y$ mit $fg = \mathrm{id}_X$ und $gf = \mathrm{id}_Y$ gibt. Dies legt g fest, da für $\tilde{g}$ mit $f\tilde{g} = \mathrm{id}_X$ und $\tilde{g}f = \mathrm{id}_Y$ folgt, daß $\tilde{g} = \tilde{g}fg = g$. Schreibe $f^{-1} := g$.

(2) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Retraktion,* falls es $X \xleftarrow{g} Y$ mit $gf = \mathrm{id}_Y$ gibt.

(3) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Coretraktion,* falls es $X \xleftarrow{g} Y$ mit $fg = \mathrm{id}_X$ gibt.

(4) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Epimorphismus* oder *epimorph,* falls für $X \xrightarrow{f} Y \overset{t'}{\underset{t''}{\rightrightarrows}} T$ aus $ft' = ft''$ bereits $t' = t''$ folgt.

(5) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Monomorphismus* oder *monomorph,* falls für $U \overset{u'}{\underset{u''}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$ aus $u'f = u''f$ bereits $u' = u''$ folgt.

(6) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Endomorphismus,* falls $X = Y$.

(7) Es heißt $X \xrightarrow{f} Y$ *Automorphismus,* falls $X = Y$ und f ein Isomorphismus ist.

Isomorphismen werden auch $\xrightarrow{\sim}$ geschrieben, Monomorphismen $\rightarrowtail$ und Epimorphismen $\twoheadrightarrow$. Schreibe noch $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Beispiel 75 Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Z}$-Mod. Unter den 8 Endomorphismen von $\mathbf{Z}/8$ sind 1, 3, -3 und -1 Automorphismen. Es ist $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{(3\,4)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$ eine Coretraktion. Es ist $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/4$ surjektiv, aber keine Retraktion.

Bemerkung 76 *Sei R ein Ring. Sei ${}_R M \xrightarrow{f} {}_R N$ eine R-lineare Abbildung, i.e. ein Morphismus in R*-Mod*.*

(1) *Es ist f genau dann injektiv, wenn f monomorph ist.*

(2) *Es ist f genau dann surjektiv, wenn f epimorph ist.*

Beweis.

Zu (1).

Sei f injektiv. Seien ${}_RU \overset{u'}{\underset{u''}{\rightrightarrows}} {}_RM$ zwei R-lineare Abbildungen mit $u'f = u''f$. Sei $x \in U$. Es ist $xu'f = xu''f$. Die Injektivität von f gibt $xu' = xu''$. Dies zeigt, daß $u' = u''$. Also ist f monomorph.

Sei umgekehrt f monomorph. Wir haben von $\operatorname{Kern} f$ nach M die R-linearen Abbildungen ι und 0. Es ist $\iota f = 0 = 0f$. Also ist $\iota = 0$, mithin $\operatorname{Kern} f = 0$ und also f injektiv.

Zu (2).

Sei f surjektiv. Seien ${}_RN \overset{t'}{\underset{t''}{\rightrightarrows}} {}_RT$ zwei R-lineare Abbildungen mit $ft' = ft''$. Sei $n \in N$. Schreibe $n = mf$ für ein $m \in M$. Es wird $nt' = mft' = mft'' = nt''$. Dies zeigt, daß $t' = t''$. Also ist f epimorph.

Sei umgekehrt f epimorph. Wir haben von N nach $\operatorname{Cokern} f$ die R-linearen Abbildungen ρ und 0. Es ist $f\rho = 0 = f0$. Also ist $\rho = 0$, mithin $\operatorname{Cokern} f = 0$ und also f surjektiv. □

Bemerkung 77 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Man kann Begriffe für Kategorien *dualisieren.* Ein Begriff, angewandt auf $\mathcal{C}^\circ$, liefert den dualen Begriff in $\mathcal{C}$. Dito für Aussagen in Kategorien, etc. Der Wahrheitsgehalt einer Aussage ändert sich beim Dualisieren nicht.

Stimmt ein Begriff mit seinem dualen Begriff überein, so heißt er *selbstdual.* Dito für Aussagen.

Beispiele.

(1) Ein Morphismus ist in $\mathcal{C}^\circ$ monomorph genau dann, wenn er in $\mathcal{C}$ epimorph ist. Somit ist der Begriff des Epimorphismus dual zu dem des Monomorphismus.

(2) Das Kompositum zweier Monomorphismen ist monomorph. Wendet man diese Aussage auf $\mathcal{C}^\circ$ an, so erhält man in $\mathcal{C}$ die Aussage, daß das Kompositum zweier Epimorphismen wieder epimorph ist. Letztere Aussage ist also dual zur ersteren.

(3) Der Begriff des Isomorphismus ist selbstdual. Die Aussage, daß das Kompositum zweier Isomorphismen wieder ein Isomorphismus ist, auch.

2.1.4 Eigenschaften von Objekten

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Definition 78 Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ heißen *isomorph,* geschrieben $X \simeq Y$, falls es einen Isomorphismus $X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Die Äquivalenzklasse von $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ heißt *Iso(morphie)klasse* von X, geschrieben $[X] := \{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \,:\, Y \simeq X\}$.

In der Kategorie der Linksmoduln über einem Ring stimmt dieser Isomorphiebegriff mit dem bisherigen überein; cf. Definition 27, Aufgabe 8.(2).

Dito in der Kategorie der Ringe; cf. Definition 11, Aufgabe 8.(1).

Definition 79 Sei $X_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(1) Es heißt X_0 *initial,* falls $|{}_{\mathcal{C}}(X_0, Y)| = 1$ für alle $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(2) Es heißt X_0 *terminal,* falls $|{}_{\mathcal{C}}(Y, X_0)| = 1$ für alle $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(3) Es heißt X_0 *Nullobjekt,* falls X_0 initial und terminal ist.

Beispiel 80

(1) In (Sets) ist die leere Menge initial. Jede einelementige Menge ist terminal.

(2) Sei R ein Ring. In R-Mod ist der Nullmodul 0 ein Nullobjekt.

(3) In (Rings) ist $\mathbf{Z}$ initial, der Nullring ist terminal. Cf. Beispiel 15.

Bemerkung 81 *Seien* $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(1) *Sind* X_0 *und* Y_0 *initial, so gibt es genau einen Isomorphismus von* X_0 *nach* Y_0.

(2) *Sind* X_0 *und* Y_0 *terminal, so gibt es genau einen Isomorphismus von* X_0 *nach* Y_0.

(3) *Sind* X_0 *und* Y_0 *Nullobjekte, so gibt es genau einen Isomorphismus von* X_0 *nach* Y_0.

Beweis. Zu (1). Es gibt jeweils genau einen Morphismus $X_0 \xrightarrow{f} Y_0$ und $X_0 \xleftarrow{g} Y_0$. Nun ist $fg = \mathrm{id}_{X_0}$, da auch $|{}_{\mathcal{C}}(X_0, X_0)| = 1$. Genauso ist $gf = \mathrm{id}_{Y_0}$. □

Bemerkung 82 *Existiere ein Nullobjekt* 0 *in* $\mathcal{C}$. *Sei* $(X \xrightarrow{0 = 0_{X,Y}} Y) := (X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y)$ *für* $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, *genannt der* Nullmorphismus *von* X *nach* Y. *Für* $X' \xrightarrow{f} X$ *und* $Y \xrightarrow{g} Y'$ *ist* $f\, 0_{X,Y}\, g = 0_{X',Y'}$; *kurz,* $f0g = 0$. *Der Nullmorphismus hängt nicht von der Wahl des Nullobjekts ab.*

Cf. Bemerkung 25.(1).

Beweis. Zeigen wir die Unabhängigkeit von der Wahl des Nullobjekts. Seien 0 und $0'$ Nullobjekte. Es kommutiert

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[r] & 0' \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

□

2.2 Funktoren

Funktoren werden wir auf die traditionelle Art links schreiben, da sich die Zahl der zu komponierenden Funktoren in Grenzen halten wird. Und für Hom-Funktoren und Tensorproduktfunktoren werden ohnehin eigene Schreibweisen verwendet.

Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Kategorien.

Definition 83 Ein *Funktor* $F = (\operatorname{Ob} F, \operatorname{Mor} F)$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ besteht aus Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ob}\mathcal{C} & \xrightarrow{\operatorname{Ob}F} & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \\ \operatorname{Mor}\mathcal{C} & \xrightarrow{\operatorname{Mor}F} & \operatorname{Mor}\mathcal{D}\,, \end{array}$$

welche wir links notieren, und für welche folgende Eigenschaften gelten.

(Fun 1) Es kommutieren folgende Vierecke.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor}F"] \arrow[d, "\mathsf{Start}"'] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \arrow[d, "\mathsf{Start}"] \\ \operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob}F"'] & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor}F"] \arrow[d, "\mathsf{Ziel}"'] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \arrow[d, "\mathsf{Ziel}"] \\ \operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob}F"'] & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Mor}F"] & \operatorname{Mor}\mathcal{D} \\ \operatorname{Ob}\mathcal{C} \arrow[r, "\operatorname{Ob}F"'] \arrow[u, "\mathsf{Identität}"] & \operatorname{Ob}\mathcal{D} \arrow[u, "\mathsf{Identität}"'] \end{tikzcd}$$

(Fun 2) Für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$ ist $(\operatorname{Mor} F)(f \cdot g) = (\operatorname{Mor} F)(f) \cdot (\operatorname{Mor} F)(g)$.

Ein Funktor F ist durch die Angabe von $\operatorname{Mor} F$ festgelegt, da $(\operatorname{Ob} F)(X) = (\operatorname{Ob} F)((\mathrm{id}_X)\,\mathsf{Start}) = ((\operatorname{Mor} F)(\mathrm{id}_X))\,\mathsf{Start}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Wir schreiben in der Regel $(\operatorname{Ob} F)(X) =: FX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $(\operatorname{Mor} F)(f) =: Ff$ für $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$.

Wir schreiben auch $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ oder $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ für einen Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$.

Es bedeutet (Fun 1) zum einen, daß $F(X \xrightarrow{f} Y) = FX \xrightarrow{Ff} FY$ für $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$, und zum anderen, daß $F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Es besagt (Fun 2), daß $F(fg) = (Ff)(Fg)$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{C}$.

Ein *kontravarianter Funktor* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor von $\mathcal{C}^\circ$ nach $\mathcal{D}$. Ein solcher kann auch als Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}^\circ$ aufgefaßt werden.

Bemerkung 84

(1) *Es gibt den identischen Funktor* $\mathrm{id}_\mathcal{C} = \mathrm{id}$ *auf* $\mathcal{C}$*, für welchen* $\operatorname{Ob}\mathrm{id}_\mathcal{C} = \mathrm{id}_{\operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ *und* $\operatorname{Mor}\mathrm{id}_\mathcal{C} = \mathrm{id}_{\operatorname{Mor}\mathcal{C}}$.

(2) *Seien Funktoren* $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ *gegeben. Sei* $G \circ F$ *durch* $\operatorname{Ob}(G \circ F) = (\operatorname{Ob} G) \circ (\operatorname{Ob} F)$ *und* $\operatorname{Mor}(G \circ F) = (\operatorname{Mor} G) \circ (\operatorname{Mor} F)$ *definiert. Es ist das* Kompositum $G \circ F$ *von* G *nach* F *ein Funktor von* $\mathcal{C}$ *nach* $\mathcal{E}$*. Kurz,* $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) = (\mathcal{C} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{E})$.

(3) *Ist f ein Isomorphismus, so auch Ff. Es ist $F(f^{-1}) = (Ff)^{-1}$.*

Beweis. Zu (3). Es ist $Ff\cdot F(f^{-1}) = F(f\cdot f^{-1}) = F\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$ und $F(f^{-1})\cdot Ff = F(f^{-1}\cdot f) = F\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$. $\square$

Beispiel 85 Seien R, S und T Ringe. Sei ${}_RM_S$ ein R-S-Bimodul. Die folgenden Beispiele beruhen auf den Bemerkungen 51 und 59.

(1) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccl} {}_R({}_RM_S\,,\,-) & : & R\text{-Mod} & \longrightarrow & S\text{-Mod} \\ & & g & \longmapsto & {}_R({}_RM_S\,,\,g) = \mathrm{Hom}_R({}_RM_S\,,\,g)\ . \end{array}$$

(2) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccccl} {}_R(-,=) & : & (R\text{-Mod-}S)^\circ & \times & R\text{-Mod-}T & \longrightarrow & S\text{-Mod-}T \\ & & (f & , & g) & \longmapsto & {}_R(f,g) = \mathrm{Hom}_R(f,g)\ . \end{array}$$

Cf. auch Beispiel 86.

(3) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccl} {}_RM_S \underset{S}{\otimes} - & : & S\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ & & g & \longmapsto & {}_RM_S \underset{S}{\otimes} g\ . \end{array}$$

(4) Wir haben den Funktor

$$\begin{array}{rcccccl} - \underset{S}{\otimes} = & : & R\text{-Mod-}S & \times & S\text{-Mod-}T & \longrightarrow & R\text{-Mod-}T \\ & & (f & , & g) & \longmapsto & f \underset{S}{\otimes} g\ . \end{array}$$

Verallgemeinern wir Beispiel 85.(2, 1) ein wenig.

Beispiel 86 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir haben den *Homfunktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\ {}_{\mathcal{C}}(-,=)\ } & (\text{Sets}) \\ \left(\begin{array}{c} (X,Y) \\ \big\downarrow{\scriptstyle (u,v)} \\ (X',Y') \end{array}\right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} {}_{\mathcal{C}}(X,Y) & & f \\ \big\downarrow{\scriptstyle {}_{\mathcal{C}}(u,v)} & & \big\downarrow \\ {}_{\mathcal{C}}(X',Y') & & ufv \end{array}\right) \end{array}$$

Beachte, daß $X \xleftarrow{u} X'$ und $Y \xrightarrow{v} Y'$ in $\mathcal{C}$.

Davon können wir folgende Funktoren ableiten.

Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ wird $\mathcal{C} \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(X,-)} (\text{Sets})$, $(Y \xrightarrow{v} Y') \longmapsto \big({}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(X,v)} {}_{\mathcal{C}}(X,Y'),\ f \longmapsto fv\big)$.

Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ wird $\mathcal{C}^\circ \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(-,Y)} (\text{Sets})$, $(X \xleftarrow{u} X') \longmapsto \big({}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(u,Y)} {}_{\mathcal{C}}(X',Y),\ f \longmapsto uf\big)$.

Hierbei läuft $X \xleftarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$ von X' nach X, i.e. in $\mathcal{C}^\circ$ von X nach X'.

Cf. Bemerkung 51.

Beispiel 87 Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor. Habe $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt 0. Sei $F0$ ein Nullobjekt in $\mathcal{D}$. Dann ist $F(0_{X,Y}) = 0_{FX,FY}$ für $X,\ Y\ \in\ \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Definition 88 Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor.

(1) Es heißt F *voll,* wenn die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX,FY),\ f \longmapsto Ff$ surjektiv ist für alle $X,\ Y\ \in\ \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(2) Es heißt F *treu,* wenn die Abbildung ${}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX,FY),\ f \longmapsto Ff$ injektiv ist für alle $X,\ Y\ \in\ \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

(3) Es heißt F *dicht,* wenn für alle $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mit $FX \simeq Z$ existiert.

(4) Es heißt F *strikt dicht,* wenn für alle $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mit $FX = Z$ existiert.

Beispiel 89

(1) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ eine Teilkategorie. Wir haben diesenfalls einen treuen Inklusionsfunktor $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$, der jeden Morphismus und jedes Objekt von $\mathcal{D}$ auf sich selbst schickt, gesehen in $\mathcal{C}$. Dieser Inklusionsfunktor ist voll genau dann, wenn $\mathcal{D}$ eine volle Teilkategorie von $\mathcal{C}$ ist.

(2) Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ Kategorien. Wir haben Projektionsfunktoren $\mathcal{C}\times\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, $(f,f') \longmapsto f$ und $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}'$, $(f,f') \longmapsto f'$. Falls $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ je mindestens ein Objekt enthalten, sind diese Projektionsfunktoren voll und strikt dicht.

Bemerkung 90 *Sei* $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ *ein voller und treuer Funktor. Sei* $X \xrightarrow{f} Y$ *in* $\mathcal{C}$*. Es ist* f *ein Isomorphismus genau dann, wenn* Ff *ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist* $X \simeq Y$ *genau dann, wenn* $FX \simeq FY$*.*

Beweis. Ist f ein Isomorphismus, so auch Ff; cf. Bemerkung 84.(3).

Sei umgekehrt Ff ein Isomorphismus. Sei $X \xleftarrow{g} Y$ in $\mathcal{C}$ ein Morphismus, für welchen $Fg = (Ff)^{-1}$, existent wegen F voll. Es wird $F(fg) = (Ff)(Fg) = (Ff)(Ff)^{-1} = \mathrm{id}_{FX} = F\,\mathrm{id}_X$, wegen F treu also $fg = \mathrm{id}_X$. Genauso wird $gf = \mathrm{id}_Y$.

Insbesondere folgt aus $X \simeq Y$, daß $FX \simeq FY$; und umgekehrt, aus $FX \simeq FY$, daß $X \simeq Y$, denn für einen Isomorphismus $FX \xrightarrow[\sim]{h} FY$ gibt es ein Urbild $X \xrightarrow{f} Y$ mit $Ff = h$, und wie eben gesehen ist f ein Isomorphismus. □

2.3 Transformationen

Seien Funktoren $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ gegeben.

Definition 91 Ein Tupel $a = (FX \xrightarrow{aX} GX)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ von Morphismen in $\mathcal{D}$ heißt *natürlich* (in $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$) oder eine *Transformation* von F nach G, falls das Viereck

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "aX"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "aY"] & GY \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{C}$. Wir schreiben auch $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ oder $F \xrightarrow{a} G$.

Die identische Transformation auf F wird $\mathrm{id} = \mathrm{id}_F = 1 = 1_F := (\mathrm{id}_{FX})_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ geschrieben.

Sind F, G und H Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, und sind $F \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} H$ Transformationen, so ist $ab := \big((aX)(bX)\big)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ eine Transformation von F nach H.

Insgesamt erhalten wir so die *Funktorkategorie* $[\![\mathcal{C}, \mathcal{D}]\!]$, welche als Objekte die Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ enthält, und als Morphismen die Transformationen zwischen solchen Funktoren.

Eine Transformation, welche in $[\![\mathcal{C}, \mathcal{D}]\!]$ ein Isomorphismus ist, heißt auch *Isotransformation.*

Bemerkung 92 *Eine Transformation $F \xrightarrow{a} G$ ist genau dann eine Isotransformation, wenn aX ein Isomorphismus ist für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.*

Beweis. Ist a eine Isotransformation, so gibt es eine Transformation $F \xleftarrow{b} G$ mit $ab = \mathrm{id}$ und $ba = \mathrm{id}$. Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $(aX)(bX) = \mathrm{id}$ und $(bX)(aX) = \mathrm{id}$, und also aX ein Isomorphismus.

Für die umgekehrte Implikation ist die Natürlichkeit von $((aX)^{-1})_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ zu zeigen. Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Es wird

$$(aX)^{-1}(Ff) \;=\; (aX)^{-1}(Ff)(aY)(aY)^{-1} \;=\; (aX)^{-1}(aX)(Gf)(aY)^{-1} \;=\; (Gf)(aY)^{-1}\,.$$

□

Beispiel 93 Seien R und S Ringe.

(1) Sei ${}_RM_S$ gegeben. Das Tupel mit dem Eintrag

$$\begin{array}{ccc} {}_RX & \xrightarrow{eX} & {}_S({}_R({}_RX,\, {}_RM_S),\, {}_RM_S) \\ x & \longmapsto & (f \longmapsto xf) \end{array}$$

bei $X \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$ ist eine Transformation von $\mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$ nach ${}_S(\,{}_R(-,\,{}_RM_S),\,{}_RM_S)$. Zeigen wir die Natürlichkeit. Sei ${}_RX \xrightarrow{u} {}_RY$ eine R-lineare Abbildung. Wir erhalten das Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "eX"] \arrow[d, "u"'] & {}_S(\,{}_R(X,\,{}_RM_S),\,{}_RM_S) \arrow[d, "{}_S(\,{}_R(u,\,{}_RM_S),\,{}_RM_S)"] \\ Y \arrow[r, "eY"] & {}_S(\,{}_R(Y,\,{}_RM_S),\,{}_RM_S)\;. \end{tikzcd}$$

Für $x \in X$ wird einerseits

$$\begin{aligned} x(eX)\,{}_S(\,{}_R(u,\,{}_RM_S),\,{}_RM_S) &= (f \longmapsto xf)\,{}_S(\,{}_R(u,\,{}_RM_S),\,{}_RM_S) \\ &= {}_R(u,\,{}_RM_S)(f \longmapsto xf) \\ &= (g \longmapsto ug)(f \longmapsto xf) \\ &= (g \longmapsto xug)\;, \end{aligned}$$

andererseits

$$xu(eY) \;=\; (g \longmapsto xug)\;.$$

Also kommutiert dieses Viereck.

Ist $R = S = K$ ein Körper, ist ${}_RM_S = {}_KK_K$ und schränkt man noch auf die volle Teilkategorie der endlichdimensionalen Vektorräume ein, so erhält man eine Isotransformation. (Isomorphismus in den Doppeltdualen.)

(2) In Lemma 62 haben wir zwei Funktoren von $(S\text{-Mod})^\circ \times (R\text{-Mod-}S)^\circ \times R\text{-Mod}$ nach $\mathbf{Z}$-Mod betrachtet, der eine schickte ein Tripel $(\,{}_SX\,,\,{}_RM_S\,,\,{}_RN)$ nach ${}_R(\,{}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\,{}_RN)$, der andere nach ${}_S(\,{}_SX,\,{}_R(\,{}_RM_S\,,\,{}_RN))$; die Morphismen entsprechend.

Sodann haben wir eine Isotransformation $\alpha = (\alpha(X,M,N))_{(X,M,N)} := (\alpha_{X,M,N})_{(X,M,N)}$ vom ersteren in den zweiteren konstruiert; in loc. cit. (2), i.e. in Aufgabe 29, wurde ihre Natürlichkeit nachgewiesen.

Beispiel 94 Betrachte zur teilgeordneten Menge $\mathbf{Z}$ die Kategorie $\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}$; cf. Aufgabe 42. Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie mit Nullobjekt.

Sei $X \in \mathrm{Ob}\,[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$. Schreibe $Xi =: X^i$ für $i \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Z}^{\mathrm{k}} = \mathbf{Z}$. Von einem Objekt in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$ werden ohne Verlust an Information nur die Bilder d_X^i der Morphismen $i \longrightarrow i+1$ für $i \in \mathbf{Z}$ graphisch dargestellt, i.e.

$$X \;=\; (\cdots \longrightarrow X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \longrightarrow \cdots)$$

Oft schreibt man auch nur $d = d^i := d_X^i$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Umgekehrt definiert jede Wahl von Objekten X^i und von Morphismen $d_X^i : X^i \longrightarrow X^{i+1}$ für $i \in \mathbf{Z}$ ein $X \in \mathrm{Ob}\,[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$.

Seien $X,\, Y \in \mathrm{Ob}\,[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$. Die Natürlichkeitsbedingung an ein Tupel $f = (X^i \xrightarrow{f^i} Y^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ läßt sich auf die Forderung $d_X^i f^{i+1} = f^i d_Y^i$ für $i \in \mathbf{Z}$ reduzieren. In anderen Worten, ein

Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d_Y^{i+1}"] & Y^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ein *Komplex* mit Werten in $\mathcal{D}$ ist ein Objekt X in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$, für welches $i \longrightarrow i+2$ für alle $i \in \mathbf{Z}$ auf den Nullmorphismus abgebildet wird, i.e. für welches $(X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2}) = (X^i \xrightarrow{0} X^{i+2})$ für alle $i \in \mathbf{Z}$. Die volle Teilkategorie der Komplexe in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{D}]\!]$ wird $\mathrm{C}(\mathcal{D})$ geschrieben. Die Morphismen d_X^i heißen auch die *Differentiale* des Komplexes X.

2.4 Äquivalenz von Kategorien

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien.

Definition 95 Ein Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ heißt *Äquivalenz,* wenn es einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ so gibt, daß $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Existiert eine Äquivalenz von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, so heißen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ *äquivalent,* geschrieben $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[d, bend right=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"', ""{name=A}] \arrow[d, bend left=50, "G\circ F", ""'{name=B}] & & \mathcal{D} \arrow[d, bend right=50, "F\circ G"', ""{name=C}] \arrow[d, bend left=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}", ""'{name=D}] \\
\mathcal{C} & & \mathcal{D} \arrow[ll, "G"]
\arrow[Rightarrow, from=B, to=A, "\sim"']
\arrow[Rightarrow, from=C, to=D, "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Lemma 96 *Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor.*

(1) *Es ist F eine Äquivalenz genau dann, wenn F voll, treu und dicht ist.*

(2) *Es gibt einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$ mit $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ genau dann, wenn F voll, treu und strikt dicht ist.*

Beweis. Wir zeigen (1) (und erwähnen die Zusatzeigenschaften aus (2) an den entsprechenden Stellen).

Sei zum einen F eine Äquivalenz. Wähle Isomorphismen $F \circ G \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \xrightarrow[\sim]{\beta} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Zeigen wir, daß F dicht ist. Sei $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. Es ist $GY \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $FGY \xrightarrow[\sim]{\alpha Y} Y$. (Ist sogar $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, dann ist $FGY = Y$, und somit F strikt dicht.)

Zeigen wir, daß F treu ist. Seien $X, X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Wir haben zu zeigen, daß ${}_{\mathcal{C}}(X,X') \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX,FX')$, $u \longmapsto Fu$ injektiv ist. Dies folgt aus $u = (\beta X)^{-1}(GFu)(\beta X')$.

Genauso ist auch G treu.

Zeigen wir, daß F voll ist. Seien $X, X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Wir haben zu zeigen, daß ${}_{\mathcal{C}}(X,X') \longrightarrow {}_{\mathcal{D}}(FX,FX')$, $u \longmapsto Fu$ surjektiv ist. Sei $v \in {}_{\mathcal{D}}(FX,FX')$ gegeben. Es wird

$$Gv \;=\; (\beta X)\big((\beta X)^{-1}(Gv)(\beta X')\big)(\beta X')^{-1} \;=\; GF\big((\beta X)^{-1}(Gv)(\beta X')\big)\;,$$

wegen G treu also

$$v \;=\; F\big((\beta X)^{-1}(Gv)(\beta X')\big)\;.$$

Sei zum anderen F voll, treu und dicht. Vermittels Auswahlaxiom wählen wir für jedes $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ein $X_Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und einen Isomorphismus $FX_Y \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y$. (Ist F sogar strikt dicht, so wählen wir X_Y so, daß $FX_Y = Y$, und $\vartheta_Y := \mathrm{id}_Y$.)

Wir konstruieren einen Funktor $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$. Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ setzen wir $GY := X_Y$. Für einen Morphismus $Y \xrightarrow{v} Y'$ in $\mathcal{D}$ wählen wir $GY \xrightarrow{Gv} GY'$ so, daß

$$(FGY \xrightarrow{FGv} FGY') \;=\; (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{v} Y' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y'}^{-1}} FGY')\;.$$

Dies ist auf eindeutige Weise möglich, da F voll und treu ist. Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ wird

$$(FGY \xrightarrow{FG\,\mathrm{id}_Y} FGY) \overset{\text{def}}{=} (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y^{-1}} FGY) \;=\; (FGY \xrightarrow{F\,\mathrm{id}_{GY}} FGY)\;,$$

mithin $G\,\mathrm{id}_Y = \mathrm{id}_{GY}$. Für $Y \xrightarrow{v} Y' \xrightarrow{v'} Y''$ in $\mathcal{D}$ wird

$$\begin{array}{rl} & (FGY \xrightarrow{FG(vv')} FGY'') \\ \overset{\text{def}}{=} & (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{vv'} Y'' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y''}^{-1}} FGY'') \\ = & (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y \xrightarrow{v} Y' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y'}^{-1}} FGY' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y'}} Y' \xrightarrow{v'} Y'' \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{Y''}^{-1}} FGY'') \\ \overset{\text{def}}{=} & (FGY \xrightarrow{FGv} FGY' \xrightarrow{FGv'} FGY'') \\ = & (FGY \xrightarrow{F((Gv)(Gv'))} FGY'')\;, \end{array}$$

mithin $G(vv') = (Gv)(Gv')$. Somit ist nachgewiesen, daß G ein Funktor ist.

Setze $\alpha = (FGY \xrightarrow[\sim]{\alpha Y} Y)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}} := (FGY \xrightarrow[\sim]{\vartheta_Y} Y)_{Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}}$. Für $Y \xrightarrow{v} Y'$ in $\mathcal{D}$ ist in der Tat $(FGv)(\alpha Y') = (\alpha Y)v$, da nach Definition von Gv ja $(FGv)\vartheta_{Y'} = \vartheta_Y v$ gilt. Somit ist $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ nachgewiesen. (Ist F sogar strikt dicht, so war stets $\vartheta_Y = \mathrm{id}_Y$ gewählt, was hier zu $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ führt.)

Wähle $\beta = (GFX \xrightarrow{\beta X} X)_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ so, daß $F\beta_X = \vartheta_{FX}$ ist für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, was wegen F voll und treu auf eindeutige Weise möglich ist. Es ist βX stets ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 90. Zu zeigen bleibt die Natürlichkeit von β; cf. Bemerkung 92. Sei $X \xrightarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} F\big((GFu)(\beta X')\big) & = & (FGFu)\vartheta_{FX'} \\ & = & \vartheta_{FX}(Fu) \\ & = & F\big((\beta X)u\big)\;, \end{array}$$

und also $(GFu)(\beta X') = (\beta X)u$, da F treu ist. Somit ist $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ nachgewiesen.

Kapitel 3

Additive Kategorien und additive Funktoren

3.1 Additive Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie, welche ein Nullobjekt $0 = 0_{\mathcal{A}}$ besitzt. Im folgenden seien alle Morphismen aus $\mathcal{A}$.

Definition 97 Sei $m \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Eine *direkte Summe* von $(X_1, \ldots, X_m)$ ist ein Objekt $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$, zusammen mit *Inklusionsmorphismen* $X_j \xrightarrow{\iota_j} \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$ und *Projektionsmorphismen* $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{\pi_j} X_j$ für $j \in [1,m]$ so, daß folgende Axiome gelten.

(Sum 1) Für jedes $S \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und jedes Tupel von Morphismen $(S \xrightarrow{s_i} X_i)_{i\in[1,m]}$ gibt es genau einen Morphismus $S \xrightarrow{s} \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$ mit $s\pi_i = s_i$ für $i \in [1,m]$. Wir schreiben auch $s = (\, s_1 \; \cdots \; s_m \,)$.

(Sum 2) Für jedes $T \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und jedes Tupel von Morphismen $(X_i \xrightarrow{t_i} T)_{i\in[1,m]}$ gibt es genau einen Morphismus $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{t} T$ mit $\iota_i t = t_i$ für $i \in [1,m]$. Wir schreiben auch $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$.

(Sum 3) Es ist $\iota_i\pi_i = \mathrm{id}_{X_i} = 1$ für alle $i \in [1,m]$.
Es ist $\iota_i\pi_j = 0_{X_i, X_j} = 0$ für alle $i, j \in [1,m]$ mit $i \neq j$.

Bemerkung 98 Seien $m, n \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Seien direkte Summen von $(X_1, \ldots, X_m)$ und $(Y_1, \ldots, Y_n)$ existent.

(1) Sei $j \in [1,m]$.

Es ist $\iota_j = \left(\begin{smallmatrix} 0 \dots 0\,1\,0 \dots 0 \end{smallmatrix}\right) : X_j \longrightarrow \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$ mit der 1 an Position j, wie sich aus (Sum 1, 3) ergibt.

Es ist $\pi_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \longrightarrow X_j$ mit der 1 an Position j, wie sich aus (Sum 2, 3) ergibt.

(2) Seien $X_i \xrightarrow{f_{i,j}} Y_j$ gegeben für $i \in [1,m]$ und $j \in [1,n]$. Es gibt genau einen Morphismus

$$\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,n} \end{pmatrix}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$$

mit $\iota_k\,(f_{i,j})_{i,j}\,\pi_\ell = f_{k,\ell}$ für $k \in [1,m]$ und $\ell \in [1,n]$. Konstruieren kann man diesen Morphismus in zwei Schritten als $\begin{pmatrix} (f_{1,1} \cdots f_{1,n}) \\ \vdots \\ (f_{m,1} \cdots f_{m,n}) \end{pmatrix}$ (oder als $\left(\begin{pmatrix} f_{1,1} \\ \vdots \\ f_{m,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} f_{1,n} \\ \vdots \\ f_{m,n} \end{pmatrix}\right)$).

Auch die Eindeutigkeit folgt in zwei Schritten. Denn aus $\iota_k \tilde{f} \pi_\ell = f_{k,\ell}$ für $k \in [1,m]$ und $\ell \in [1,n]$ folgt $\iota_k \tilde{f} = \left(\begin{smallmatrix} f_{k,1} \cdots f_{k,n} \end{smallmatrix}\right)$ für $k \in [1,m]$, und daraus $\tilde{f} = \begin{pmatrix} (f_{1,1} \cdots f_{1,n}) \\ \vdots \\ (f_{m,1} \cdots f_{m,n}) \end{pmatrix}$.

Ferner ist $f = (\iota_i f \pi_j)_{i,j}$ für $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{j\in[1,n]} X_j$, also jeder Morphismus zwischen direkten Summen durch eine Matrix gegeben.

Wir vereinbaren noch, daß Leerstellen in Matrizen Nulleinträge bezeichnen.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ist der identische Morphismus auf $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$. Denn es ist $\iota_k \,\mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i}\, \pi_\ell = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $k,\, \ell \in [1,m]$, und dies charakterisiert die angegebene Matrix.

Eine Matrix mit nur Nulleinträgen ist der jeweilige Nullmorphismus.

(3) Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ so, daß die direkte Summe $X \oplus Y$ von (X,Y) existiert. Es ist $X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} Y \oplus X$ ein Isomorphismus, der von $Y \oplus X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} X \oplus Y$ invertiert wird. In der Tat ist $\iota_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = \iota_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \pi_1 = 1$; usf.

Definition 99 Eine Kategorie $\mathcal{A}$, welche ein Nullobjekt $0 = 0_\mathcal{A}$ besitzt, heißt *additiv,* falls folgende Axiome gelten.

(Add 1) Das Paar (X,Y) hat eine direkte Summe $X \oplus Y$, zusammen mit $\iota_1 : X \longrightarrow X \oplus Y$, $\iota_2 : Y \longrightarrow X \oplus Y$, $\pi_1 : X \oplus Y \longrightarrow X$ und $\pi_2 : X \oplus Y \longrightarrow Y$, für alle $X,\, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

(Add 2) Es ist $X \oplus X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} X \oplus X$ ein Isomorphismus für alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Beispiel 100

(1) Ist R ein Ring, so ist R-Mod eine additive Kategorie. Was (Add 1) angeht, cf. Bemerkung 37. Die in Definition 32 definierten Matrizen stimmen mit den hier definierten Matrizen überein, wie man mittels Komposition mit Inklusions- und Projektionsmorphismen überprüft. Was (Add 2) angeht, es ist $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-1&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \mathrm{id}$.

(2) Ist $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, so auch $\mathcal{A}^\circ$. Denn dank Bemerkung 98.(3) ist $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus ist, wobei diese Gleichheit wie in loc. cit. zu verifizieren ist. Letzerer Isomorphismus wird gebraucht, um (Add 2) für $\mathcal{A}^\circ$ zu zeigen, da sich beim Übergang von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}^\circ$ die Rollen von ι_i und π_i vertauschen.

(3) Die Kategorie, welche als Objekte die Mengen und als Morphismen Relationen zwischen Mengen hat, hat ein Nullobjekt und erfüllt (Add 1), nicht aber (Add 2). Cf. Aufgabe 44.

Sei im folgenden $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $0 = 0_{\mathcal{A}}$ ein darin gewähltes Nullobjekt.

Bemerkung 101 *Sei $m \geqslant 0$, seien $X_1, \ldots, X_m \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Es besitzt $(X_1, \ldots, X_m)$ eine direkte Summe.*

Beweis. Siehe Aufgabe 45.(1). $\square$

Wir wählen nun für jedes endliche Tupel $(X_1, \ldots, X_m)$ von Objekten in $\mathcal{A}$ eine direkte Summe $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i$. Für ein nullelementiges Tupel wählen wir 0 als direkte Summe. Für ein einelementiges Tupel wählen wir seinen Eintrag als direkte Summe, wobei $\iota_1 = \pi_1 = \mathrm{id}$.

Für $m \geqslant 0$ und $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ schreiben wir $X^{\oplus m} := \bigoplus_{i\in[1,m]} X$. Insbesondere wird $X^{\oplus 0} = 0$ und $X^{\oplus 1} = X$.

Definition 102 Sei $n \geqslant 0$. Seien $f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$. Setze

$$\Big(X \xrightarrow{\sum_{i\in[1,n]} f_i} Y \Big) \;:=\; \Big(X \xrightarrow{(1\,\ldots\,1)} X^{\oplus n} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{smallmatrix}\right)} Y^{\oplus n} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} Y \Big) .$$

Beachte, daß $\sum_{i\in[1,0]} f_i = 0$ und $\sum_{i\in[1,1]} f_i = f_1$. Falls $n = 2$, so schreiben wir auch

$$\textstyle\sum_{i\in[1,2]} f_i \;=:\; f_1 + f_2 \,.$$

Bemerkung 103 *Seien $\ell, m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ für $i \in [1,\ell]$, $Y_j \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ für $j \in [1,m]$ und $Z_k \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ für $k \in [1,n]$. Seien*

$$\textstyle\bigoplus_{i\in[1,\ell]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,m]} Y_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,n]} Z_k$$

in $\mathcal{A}$ gegeben. Dann ist

$$(f_{i,j})_{i,j}\,(g_{j,k})_{j,k} \;=\; \Big(\textstyle\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j} g_{j,k}\Big)_{i,k} .$$

Cf. Bemerkung 34. Diesen Matrixkalkül werden wir im folgenden kommentarlos verwenden.

Beweis. Siehe Aufgabe 45.(2). ▫

Bemerkung 104 *Seien $k,\,\ell \geqslant 0$. Seien $f_1\,,\,\dots,\,f_{k+\ell} : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$. Es ist*

$$(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i) \;+\; (\sum_{i\in[1,\,\ell]} f_{i+k}) \;=\; \sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i\;.$$

Insbesondere ist $(+)$ assoziativ. Wir dürfen also alle Klammern in einem iterierten via $(+)$ gebildeten Ausdruck weglassen. Ferner erhalten wir $\sum_{i\in[1,n]} f_i \;=\; f_1 + \cdots + f_n\,$; cf. Definition 102.

Beweis. Siehe Aufgabe 45.(3). ▫

Bemerkung 105 *Seien $k,\,\ell \geqslant 0$. Seien $f_i : X \longrightarrow Y$ für $i \in [1,k]$ und $g_j : Y \longrightarrow Z$ für $j \in [1,\ell]$ in $\mathcal{A}$. Es ist*

$$(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i)(\sum_{j\in[1,\ell]} g_j) \;=\; \sum_{i\in[1,k]} \sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j\;.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 45.(4). ▫

Bemerkung 106 *Seien $X,\,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $\big({}_{\mathcal{A}}(X,Y),\,+\big)$ eine abelsche Gruppe, mit neutralem Element $0 = 0_{X,Y}$.*

Insbesondere ist $(-f)g \;=\; (-f)g + fg - fg \;=\; (-f+f)g - fg \;=\; 0g - fg \;=\; -fg$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{A}$. Genauso ist $f(-g) = -fg$.

Beweis. Siehe Aufgabe 45.(5). ▫

Bemerkung 107 *Seien $m,\,n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,m]$ und $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \underset{(f'_{i,j})_{i,j}}{\overset{(f_{i,j})_{i,j}}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Es ist*

$$(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} \;=\; (f_{i,j} + f'_{i,j})_{i,j}\;.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 45.(6). ▫

Definition 108 Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie mit Nullobjekt 0. Eine volle Teilkategorie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ heißt *volle additive Teilkategorie,* falls $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ und falls für $X,\,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ auch $X \oplus Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$.

Es ist $\mathcal{B}$ wieder eine additive Kategorie. Denn da $\mathcal{B}$ eine volle Teilkategorie ist, können wir aus (Add 1) für $\mathcal{A}$ mittels der gemachten Voraussetzung und wegen $\mathcal{B}$ voll in $\mathcal{A}$ folgern, daß (Add 1) für $\mathcal{B}$ gilt. Ferner können wir aus $\mathcal{B}$ voll in $\mathcal{A}$ und (Add 2) für $\mathcal{A}$ auch (Add 2) für $\mathcal{B}$ folgern.

3.2 Additive Funktoren

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien.

Bemerkung 109 *Sei F ein Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ mit $F0 \simeq 0$. Insbesondere bildet F Nullmorphismen auf Nullmorphismen ab; cf. Beispiel 87.*

Seien X_1, $X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Wir haben die Morphismen

$$F(X_1 \oplus X_2) \underset{\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)}{\overset{(F\pi_1\ F\pi_2)}{\rightleftarrows}} FX_1 \oplus FX_2$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) *Es sind $(F\pi_1\ F\pi_2)$ und $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ sich invertierende Isomorphismen.*

(2) *Es ist $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ epimorph.*

(3) *Es ist $(F\pi_1\ F\pi_2)$ monomorph.*

Beweis. Mit Dualität genügt es, (2) $\Leftrightarrow$ (1) zu zeigen.

Zeigen wir (2) $\Rightarrow$ (1). Es ist $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)(F\pi_1\ F\pi_2) = \left(\begin{smallmatrix} F(\iota_1\pi_1) & F(\iota_1\pi_2) \\ F(\iota_2\pi_1) & F(\iota_2\pi_2) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Da $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ epimorph ist, zeigt diese Gleichung, daß $\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus ist und $(F\pi_1\ F\pi_2)$ als Inversen hat; cf. Aufgabe 36.(5). $\square$

Definition 110 Ein Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ heißt *additiv,* falls $F0 \simeq 0$ und falls für alle X_1, $X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ eine der äquivalenten Bedingungen (1-3) aus Bemerkung 109 zutrifft. Cf. auch Aufgabe 48.

Sei im folgenden $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

Bemerkung 111 *Sei $k \geqslant 0$. Seien $X \xrightarrow{f_i} Y$ in $\mathcal{A}$ für $i \in [1,k]$. Es ist*

$$F(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i) \;=\; \sum_{i\in[1,k]} Ff_i\ .$$

Insbesondere ist $F(-f) = -Ff$ für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$.

Beweis. Wir dürfen $k = 2$ annehmen. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
F(f_1+f_2) & = & F(1\ 1)\, F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \\
& \overset{F\text{ add.}}{=} & F(1\ 1)\,(F\pi_1\ F\pi_2)\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{smallmatrix}\right) F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \\
& = & \left(F(1\ 1)\,F\pi_1 \quad F(1\ 1)\,F\pi_2\right) \begin{pmatrix} F\iota_1\, F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \\ F\iota_2\, F\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \\
& = & \left(F((1\ 1)\pi_1) \quad F((1\ 1)\pi_2)\right) \begin{pmatrix} F(\iota_1\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)) \\ F(\iota_2\left(\begin{smallmatrix} f_1 \\ f_2 \end{smallmatrix}\right)) \end{pmatrix} \\
& = & (F1\quad F1)\left(\begin{smallmatrix} Ff_1 \\ Ff_2 \end{smallmatrix}\right) \\
& = & (1\ 1)\left(\begin{smallmatrix} Ff_1 \\ Ff_2 \end{smallmatrix}\right) \\
& = & Ff_1 + Ff_2\ .
\end{array}$$

Insbesondere ist nun $F(-f) = F(-f) + Ff - Ff = F(-f+f) - Ff = F0 - Ff = 0 - Ff = -Ff$; cf. Beispiel 87. ▫

Bemerkung 112 *Seien $m,\, n \geqslant 0$. Seien $X_i\,,\, Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,m]$ und $j \in [1,n]$. Sei $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Wir haben folgendes kommutative Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
F(\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i) \arrow[r, "F((f_{i,j})_{i,j})"] \arrow[d, "(F\pi_1 \,\cdots\, F\pi_m)"', "\wr"] \arrow[dd, bend right=60, equal] & F(\bigoplus_{i\in[1,n]} Y_j) \arrow[d, "(F\pi_1 \,\cdots\, F\pi_n)", "\wr"'] \arrow[dd, bend left=60, equal] \\
\bigoplus_{i\in[1,m]} FX_i \arrow[r, "(Ff_{i,j})_{i,j}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_m \end{pmatrix}"', "\wr"] & \bigoplus_{i\in[1,n]} FY_j \arrow[d, "\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_n \end{pmatrix}", "\wr"'] \\
F(\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i) \arrow[r, "F((f_{i,j})_{i,j})"] & F(\bigoplus_{i\in[1,n]} Y_j)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Das obere Viereck kommutiert wegen

$$\begin{array}{rcl}
\big(F\pi_1 \,\cdots\, F\pi_m\big)\,(Ff_{i,j})_{i,j} & = & \big(\sum_{i\in[1,m]}(F\pi_i)(Ff_{i,1}) \;\cdots\; \sum_{i\in[1,m]}(F\pi_i)(Ff_{i,n})\big) \\
& = & \big(F(\sum_{i\in[1,m]}\pi_i f_{i,1}) \;\cdots\; F(\sum_{i\in[1,m]}\pi_i f_{i,n})\big) \\
& = & \big(F((f_{i,1})_i) \;\cdots\; F((f_{i,n})_i)\big) \\
& = & \big(F((f_{i,j})_{i,j}\pi_1) \;\cdots\; F((f_{i,j})_{i,j}\pi_n)\big) \\
& = & \big(F((f_{i,j})_{i,j})F\pi_1 \;\cdots\; F((f_{i,j})_{i,j})F\pi_n\big) \\
& = & F\big((f_{i,j})_{i,j}\big)\,\big(F\pi_1 \,\cdots\, F\pi_n\big)\;.
\end{array}$$

Dual dazu kommutiert das untere Viereck.

Bleibt zu zeigen, daß $\big(F\pi_1 \,\cdots\, F\pi_m\big)$ ein Isomorphismus ist. In der Tat ist $\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_m \end{pmatrix}\big(F\pi_1 \,\cdots\, F\pi_m\big) = \begin{pmatrix} (F\iota_1)(F\pi_1) & \cdots & (F\iota_1)(F\pi_m) \\ \vdots & & \vdots \\ (F\iota_m)(F\pi_1) & \cdots & (F\iota_m)(F\pi_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und

$$\big(F\pi_1 \,\cdots\, F\pi_m\big)\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ \vdots \\ F\iota_m \end{pmatrix} \;=\; \textstyle\sum_{i\in[1,m]}(F\pi_i)(F\iota_i) \;=\; F(\sum_{i\in[1,m]}\pi_i\iota_i) \;=\; F\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$$

gemäß Bemerkungen 111 und 107. ▫

Beispiel 113

(1) Sei $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Dann ist der Inklusionsfunktor $\mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ additiv.

(2) Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist ${}_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ gemäß Bemerkungen 106 und 105 wohldefiniert. Dieser Funktor ist additiv. Denn zum einen ist ${}_{\mathcal{A}}(X,0) \simeq 0$. Zum anderen ist für $Z_1\,,\, Z_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc}
{}_{\mathcal{A}}(X,\, Z_1 \oplus Z_2) & \xrightarrow[\sim]{\big({}_{\mathcal{A}}(X,\pi_1)\;\, {}_{\mathcal{A}}(X,\pi_2)\big)} & {}_{\mathcal{A}}(X,\, Z_1) \;\oplus\; {}_{\mathcal{A}}(X,\, Z_2) \\
(u\;v) & \longmapsto & (u \quad , \quad v)
\end{array}$$

gemäß (Sum 1). Cf. auch Aufgabe 27.(1).

(3) Sei $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist ${}_{\mathcal{A}}(-,Y) : \mathcal{A}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ gemäß Bemerkungen 106 und 105 wohldefiniert. Dieser Funktor ist additiv. Denn zum einen ist ${}_{\mathcal{A}}(0,Y) \simeq 0$. Zum anderen ist für $Z_1\,,\,Z_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathcal{A}}(Z_1 \oplus Z_2\,,Y) & \xrightarrow[\sim]{(\,{}_{\mathcal{A}}(\iota_1,Y)\ \ {}_{\mathcal{A}}(\iota_2,Y))} & {}_{\mathcal{A}}(Z_1\,,Y) \ \oplus\ {}_{\mathcal{A}}(Z_2\,,Y) \\ \binom{s}{t} & \longmapsto & (s \quad , \quad t) \end{array}$$

gemäß (Sum 2). Und beim Übergang von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}^\circ$ werden die Rollen von ι_i und π_i vertauscht. Cf. auch Aufgabe 27.(2).

(4) Seien R und S Ringe. Sei ${}_R M_S$ ein R-S-Bimodul. Es ist

$${}_R M_S \underset{S}{\otimes} - \ :\ S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

additiv. Siehe Aufgabe 27.(3).

(5) Sind $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ additive Funktoren zwischen additiven Kategorien, so ist auch $\mathcal{A} \xrightarrow{G\circ F} \mathcal{C}$ additiv. Denn zum einen ist $GF0 \simeq G0 \simeq 0$. Zum anderen erhalten wir für $X_1\,,\,X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$

$$\begin{array}{rl} & \big(GF(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{(GF\pi_1\ GF\pi_2)} GFX_1 \oplus GFX_2\big) \\ = & \big(GF(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow[\sim]{G(F\pi_1\ F\pi_2)} G(FX_1 \oplus FX_2) \xrightarrow[\sim]{(G\pi_1\ G\pi_2)} GFX_1 \oplus GFX_2\big)\,, \end{array}$$

wie sich aus $\big(G\big(F\pi_1\ F\pi_2\big)\big)\big(G\pi_1\ G\pi_2\big) = \big((G(F\pi_1\ F\pi_2))(G\pi_1)\ (G(F\pi_1\ F\pi_2))(G\pi_2)\big) = \big(G((F\pi_1\ F\pi_2)\pi_1)\ G((F\pi_1\ F\pi_2)\pi_2)\big) = \big(GF\pi_1\ GF\pi_2\big)$ ergibt.

Nun haben wir unter den Kategorien und den Funktoren jeweils additive ausgezeichnet. Für Transformationen ist das nicht erforderlich, man betrachtet einfach alle Transformationen zwischen additiven Funktoren zwischen additiven Kategorien.

3.3 Faktorkategorien

Analog zur Bildung des Faktorringes eines Ringes modulo einem Ideal kann man auch die Faktorkategorie einer additiven Kategorie modulo einer vollen additiven Teilkategorie bilden.

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie.

Für $X,\,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ setzen wir

$$\operatorname{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) := \left\{ f \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y) \ :\ \begin{array}{l} \text{es gibt eine Faktorisierung} \\ (X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{f'} N \xrightarrow{f''} Y) \text{ für ein } N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N} \end{array} \right\}.$$

Es ist $\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y) \subseteq {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ein $\mathbf{Z}$-Teilmodul. Denn zum einen ist $(X \xrightarrow{0} Y) = (X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y)$, wobei $0 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Zum anderen ist für $(X \xrightarrow{f_1} Y) = (X \xrightarrow{f_1'} N_1 \xrightarrow{f_1''} Y)$ und $(X \xrightarrow{f_2} Y) = (X \xrightarrow{f_2'} N_2 \xrightarrow{f_2''} Y)$ mit N_1, $N_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ und für z_1, $z_2 \in \mathbf{Z}$

$$(X \xrightarrow{z_1 f_1 + z_2 f_2} Y) \;=\; (X \xrightarrow{(z_1 f_1' \; z_2 f_2')} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f_1'' \\ f_2'' \end{smallmatrix}\right)} Y)\,,$$

wobei $N_1 \oplus N_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Definition 114 Wir definieren die *Faktorkategorie* $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{N}$ wie folgt. Sei $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) := \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Für X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$ sei

$${}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(X,Y) \;:=\; {}_{\mathcal{A}}(X,Y)/\,\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)\,.$$

Komposition sei repräsentantenweise definiert; sind also X, Y, $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$ und Repräsentanten $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{A}$ gegeben, so sei

$$(f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y))(g + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(Y,Z)) \;:=\; (fg + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Z))\,.$$

Dies ist wohldefiniert, denn wenn $f - f'$ und $g - g'$ über je ein Objekt von $\mathcal{N}$ faktorisieren, dann auch $fg - f'g' = (f - f')g + f'(g - g')$, wobei $X \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$ in $\mathcal{A}$.

Die Axiome (Kat 1-4) vererben sich nun von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Es ist e.g. jedes Objekt $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ isomorph zu 0, da $1_N - 0_{N,N}$ über $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ faktorisiert.

Wir haben einen Restklassenfunktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{R = R_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}} & \mathcal{A}/\mathcal{N} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (X \xrightarrow{f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)} Y) \end{array}$$

In der Regel schreiben wir unter Mißbrauch von Notation $f := f + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$ für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$.

Wir schreiben auch $f \equiv_{\mathcal{N}} f'$ für $Rf = Rf'$, i.e. für $f - f' \in \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,Y)$, wobei $X \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathcal{A}$.

Bemerkung 115 *Die Faktorkategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ ist eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein additiver Funktor. Insbesondere ist $0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}$. Ferner ist für X, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} = \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$ das Objekt $X \oplus Y$ sowohl die direkte Summe in $\mathcal{A}$ als auch in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$; Inklusions- und Projektionsmorphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ werden von den entsprechenden Morphismen in $\mathcal{A}$ repräsentiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 50.(1). $\square$

Bemerkung 116 (Universelle Eigenschaft Faktorkategorie)

Sei $\mathcal{B}$ eine weitere additive Kategorie.

(1) *Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor so, daß $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen additiven Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}$ mit $\bar{F} \circ R = F$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\bar{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) *Seien $\mathcal{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren so, daß $FN \simeq 0$ und $GN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{F} \xrightarrow{\bar{a}} \bar{G}$ so, daß $\bar{a}X = \bar{a}RX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "a\Downarrow"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, bend left, "\bar{F}"{name=FB}] \arrow[ur, bend right, "\bar{G}"'{name=GB}] \arrow[from=FB, to=GB, phantom, "\bar{a}\Searrow"] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Siehe Aufgabe 50.(2, 3). Cf. auch Aufgabe 91. ▫

Beispiel 117

(1) Sei $\mathcal{A} := \mathbf{Z}/16\text{-mod} \subseteq \mathbf{Z}/16\text{-Mod}$ die volle additive Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/16$-Moduln. Sei $\mathcal{N} := \mathbf{Z}/16\text{-free} \subseteq \mathbf{Z}/16\text{-mod}$ die volle additive Teilkategorie der $\mathbf{Z}/16$-Moduln der Form $(\mathbf{Z}/16)^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$.

Es faktorisiert e.g.

$$(\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/4) \;=\; (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/16 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/4)\,.$$

Also repräsentiert dieser Morphismus den Nullmorphismus in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. In anderen Worten, es ist $R\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 0$, i.e. $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{smallmatrix}\right) \equiv_{\mathcal{N}} 0$.

Es ist $\mathbf{Z}/8 \not\simeq 0$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Denn wäre dem so, so würde $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/8$ über einen Modul der Form $\mathbf{Z}/16^{\oplus a}$ mit $a \geqslant 0$ faktorisiern. Da die Repräsentanten der Matrixeinträge eines Morphismus $\mathbf{Z}/8 \longrightarrow \mathbf{Z}/16^{\oplus a}$ alle durch 2 teilbar sind, kann das nicht sein.

Es ist $\mathbf{Z}/16 \simeq 0$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. In $\mathcal{A}$ ist jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a_1} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2} \oplus (\mathbf{Z}/8)^{\oplus a_3} \oplus (\mathbf{Z}/16)^{\oplus a_4}$ mit $a_i \geqslant 0$; cf. Aufgabe 18, §1.2.7. Da $\mathbf{Z}/16 \simeq 0$ ist in der additiven Kategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, folgt, daß in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a_1} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2} \oplus (\mathbf{Z}/8)^{\oplus a_3}$ ist mit $a_i \geqslant 0$.

Es ist $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ keine abelsche Kategorie; cf. Definition 120 unten. Denn in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ hat e.g. der Morphismus $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ keinen Kern; cf. Definition 118.(1) unten. Sei dazu *angenommen,* es ist $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a_1} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2} \oplus (\mathbf{Z}/8)^{\oplus a_3} \xrightarrow{f} \mathbf{Z}/4$ ein Kern. Dann ist f ein Monomorphismus; cf. Bemerkung 119.(1) unten. Insbesondere ist das jeweilige Kompositum mit einer Summandeninklusion ein Monomorphismus. Nun gibt es aber in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ keinen Monomorphismus von $\mathbf{Z}/8$ nach $\mathbf{Z}/4$, da alle solche Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von links durch $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ annulliert werden. Also ist $a_3 = 0$. Ferner gibt es in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ keinen Monomorphismus von $\mathbf{Z}/2$ nach $\mathbf{Z}/4$, da alle solche Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von links durch $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ annulliert werden. Also ist $a_1 = 0$. Desweiteren sind die einzigen Monomorphismen von $\mathbf{Z}/4$ nach $\mathbf{Z}/4$ die beiden Isomorphismen $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{\pm 1} \mathbf{Z}/4$, da die anderen beiden Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ von links annulliert werden. Wäre nun $a_2 \geqslant 2$, so gäbe es einen nichtverschwindenden Morphismus von $\mathbf{Z}/4$ nach $(\mathbf{Z}/4)^{\oplus a_2}$, der f in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ von links annulliert – Matrixeinträge ± 1 an zwei Stellen, sonst Nullen, genügen dafür. Da $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ selbst in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ kein Monomorphismus ist, ist $a_2 \geqslant 1$; cf. Bemerkung 119.(3) unten. Insgesamt folgt $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ und, daß f ein Isomorphismus ist. Dies aber *widerspricht* der Tatsache, daß $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ nicht verschwindet; cf. Bemerkung 119.(5, 4) unten.

(2) Sei $\mathcal{A} := \mathbf{Z}/4\text{-mod} \subseteq \mathbf{Z}/4\text{-Mod}$ die volle additive Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/4$-Moduln. Sei $\mathcal{N} := \mathbf{Z}/4\text{-free} \subseteq \mathbf{Z}/4\text{-mod}$ die volle additive Teilkategorie der $\mathbf{Z}/4$-Moduln der Form $(\mathbf{Z}/4)^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$.

Wir haben die Funktoren $\mathbf{Z}/2\text{-mod} \hookrightarrow \mathbf{Z}/4\text{-mod} \xrightarrow{R} (\mathbf{Z}/4\text{-mod})/(\mathbf{Z}/4\text{-free}) =: \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Wir behaupten, daß ihr Kompositum $\mathbf{Z}/2\text{-mod} \xrightarrow{F} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine Äquivalenz ist.

In $\mathbf{Z}/4$-mod ist jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b}$ für gewisse $a, b \geqslant 0$; cf. Aufgabe 18, §1.2.7. Da in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ aber $\mathbf{Z}/4 \simeq 0$ ist, ist darin auch $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \oplus (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b} \simeq (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}$. Somit ist F dicht.

Sind $X \xleftarrow{f} X'$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ Morphismen in $\mathbf{Z}/2$-mod, so haben wir folgendes kommutative Viereck von Abbildungen.

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathbf{Z}/2}(X,Y) & \xrightarrow{F} & {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(FX,FY) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle {}_{\mathbf{Z}/2}(f,g)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(Ff,Fg)} \\ {}_{\mathbf{Z}/2}(X',Y') & \xrightarrow{F} & {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(FX',FY') \end{array}$$

Dies gilt insbesondere für Isomorphismen f und g. Nun ist in $\mathbf{Z}/2$-mod jedes Objekt isomorph zu einem der Form $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}$ für ein $a \geqslant 0$. Um zu zeigen, daß F voll und treu ist, genügt es also zu zeigen, daß die a priori surjektive Abbildung

$${}_{\mathbf{Z}/2}((\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}, (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'}) \xrightarrow{F} {}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}((\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}, (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'})$$

bijektiv ist. In anderen Worten, es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}((\mathbf{Z}/2)^{\oplus a}, (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'})$ verschwindet. Nun ist aber für ein gegebenes $b \geqslant 0$ jeder Repräsentant eines Eintrags der Matrix zu einem Morphismus $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \longrightarrow (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b}$ durch 2 teilbar. Somit verschwindet $(\mathbf{Z}/2)^{\oplus a} \longrightarrow (\mathbf{Z}/4)^{\oplus b} \longrightarrow (\mathbf{Z}/2)^{\oplus a'}$ in der Tat.

Kapitel 4

Abelsche Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei 0 ein darin gewähltes Nullobjekt. Alle folgenden Objekte und Morphismen seien aus $\mathcal{A}$.

4.1 Kerne und Cokerne

Definition 118 Sei $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben.

(1) Ein Morphismus $K \xrightarrow{i} X$ heißt *Kern* von f, falls $if = 0$ und falls für jeden Morphismus $T \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} Y$ mit $tf = 0$ genau ein Morphismus $T \xrightarrow{t'} K$ mit $t'i = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ T \arrow[u, dotted, "\exists! t'"] \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

(1°) Ein Morphismus $Y \xrightarrow{r} C$ heißt *Cokern* von f, falls $fr = 0$ und falls für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{t} T$ mit $ft = 0$ genau ein Morphismus $C \xrightarrow{t'} T$ mit $rt' = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "t"] & C \arrow[d, dotted, "\exists! t'"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

Cf. Bemerkung 39.

Oft spricht man auch verkürzend von K resp. C als von einem Kern resp. Cokern von f.

Bemerkung 119 *Sei* $X \xrightarrow{f} Y$ *in* $\mathcal{A}$*.*

(1) *Ist* $K \xrightarrow{i} X$ *ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$*, so ist* i *ein Monomorphismus.*

(2) *Sind* $K \xrightarrow{i} X$ *und* $K' \xrightarrow{i'} X$ *Kerne von* $X \xrightarrow{f} Y$*, so gibt es einen Isomorphismus* $K' \xrightarrow[\sim]{k} K$ *mit* $ki = i'$*, eindeutig dadurch bestimmt.*

(3) *Es ist* $0 \longrightarrow X$ *genau dann ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$*, wenn* f *ein Monomorphismus ist.*

(4) *Es ist* $X \xrightarrow{1} X$ *genau dann ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$*, wenn* $f = 0$ *ist.*

(5) *Ist* $K \xrightarrow{i} X$ *ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$*, und ist* $K' \xrightarrow[\sim]{k} K$ *ein Isomorphismus, dann ist auch* $K' \xrightarrow{ki} X$ *ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$*.*

(6) *Sei* $Y \xrightarrow{g} Z$ *ein Monomorphismus. Ein Morphismus* $K \xrightarrow{i} X$ *ist genau dann ein Kern von* $X \xrightarrow{f} Y$*, wenn er ein Kern von* $X \xrightarrow{fg} Z$ *ist.*

Beweis. Zu (1). Seien $T \underset{\tilde{t}}{\overset{t}{\rightrightarrows}} K$ mit $ti = \tilde{t}i$, also mit $(t - \tilde{t})i = 0$ gegeben. Da $0f = 0$, gibt es genau einen Morphismus $T \xrightarrow{t'} K$ mit $t'i = 0$. Also ist zum einen $t' = t - \tilde{t}$, und zum anderen $t' = 0$. Es folgt $t - \tilde{t} = 0$.

Zu (2). Da $if = 0$, gibt es genau ein k mit $ki' = i$. Da $i'f = 0$, gibt es genau ein k' mit $k'i = i'$. Also ist $kk'i = ki' = i$, wegen i monomorph also $kk' = 1$. Genauso folgt $k'k = 1$.

Zu (3). Sei zum einen f ein Monomorphismus. Es ist $(0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y) = (0 \xrightarrow{0} Y)$. Sei ferner $T \xrightarrow{t} X$ mit $tf = 0 = 0f$. Dann ist $t = 0$. In anderen Worten, es gibt genau einen Morphismus $T \longrightarrow 0$ mit $(T \longrightarrow 0 \longrightarrow X) = (T \xrightarrow{t} X)$. Also ist $0 \longrightarrow X$ ein Kern von $X \xrightarrow{f} Y$.

Sei zum anderen $0 \longrightarrow X$ ein Kern von $X \xrightarrow{f} Y$. Seien $T \underset{\tilde{t}}{\overset{t}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = \tilde{t}f$. Dann ist $(t - \tilde{t})f = 0$, also faktorisiert $t - \tilde{t}$ über $0 \longrightarrow X$, i.e. $t - \tilde{t} = 0$. Folglich ist f monomorph.

Zu (4). Sei $f = 0$. Es ist $(X \xrightarrow{1} X \xrightarrow{0} Y) = (X \xrightarrow{0} Y)$. Sei $T \xrightarrow{t} X$ mit $t0 = 0$. Dann gibt es genau einen Morphismus $T \xrightarrow{t'} X$ mit $t'1 = t$, nämlich $t' = t$. Also ist $X \xrightarrow{1} X$ ein Kern von $X \xrightarrow{0} Y$.

Sei umgekehrt $X \xrightarrow{1} X$ ein Kern von $X \xrightarrow{f} Y$. Dann ist $0 = 1f = f$.

Zu (5). Es ist $(ki)f = 0$. Ist $tf = 0$, so ist $t = t'i = (t'k^{-1})(ki)$ für ein t'. Eindeutigkeit folgt aus ki monomorph.

Zu (6). Sei zum einen i ein Kern von f. Es ist $i(fg) = 0$. Ist $t(fg) = 0$, so ist $tf = 0$, und somit gibt es genau ein t' mit $t = t'i$.

Sei zum anderen i ein Kern von fg. Aus $i(fg) = 0$ folgt $if = 0$. Ist $tf = 0$, so ist $t(fg) = 0$, und somit gibt es genau ein t' mit $t = t'i$. □

4.2 Begriff der abelschen Kategorie

Definition 120 Die additive Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *abelsch,* falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(Ab 1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Kern.

(Ab 1°) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ hat einen Cokern.

(Ab 2) Jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}$ ist ein Kern eines Morphismus in $\mathcal{A}$.

(Ab 2°) Jeder Epimorphismus in $\mathcal{A}$ ist ein Cokern eines Morphismus in $\mathcal{A}$.

Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so wählen wir für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$ einen Kern $\mathrm{K}_f \xrightarrow{\iota=\iota_f} X$ und einen Cokern $Y \xrightarrow{\rho=\rho_f} \mathrm{C}_f$. Dies so, daß $\mathrm{K}_f = 0$, falls f monomorph ist, und so, daß $\mathrm{C}_f = 0$, falls f epimorph ist. Ferner so, daß $(\mathrm{K}_f \xrightarrow{\iota} X) = (X \xrightarrow{1} X)$ und $(Y \xrightarrow{\rho} \mathrm{C}_f) = (Y \xrightarrow{1} Y)$, falls $f = 0$.

Wir erinnern: $\rightarrowtail$ bezeichnet einen Monomorphismus, $\twoheadrightarrow$ einen Epimorphismus.

Beispiel 121

(1) Sei R ein Ring. Es ist R-Mod eine abelsche Kategorie. Denn nach Beispiel 100 ist sie additiv. Nach Bemerkung 39 hat darin jeder Morphismus Kern und Cokern, nämlich die gleichnamigen Standardkonstruktionen, welche wir auch wählen.

Zu (Ab 2). Ist $M \xrightarrow{f} N$ ein Monomorphismus darin, also injektiv, so haben wir folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "f|^{\mathrm{Im}\, f}"', "\wr"] & & N \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Cokern}\, f \\
\mathrm{Im}\, f \arrow[r, equal] & \mathrm{Kern}\, \rho \arrow[ur, "\iota"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mit $\mathrm{Kern}\, \rho \xrightarrow{\iota} N$ ist daher auch $M \xrightarrow{f} N$ ein Kern von $N \xrightarrow{\rho} \mathrm{Cokern}\, f$.

Zu (Ab 2°). Ist $M \xrightarrow{f} N$ ein Epimorphismus darin, also surjektiv, so haben wir folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}\, f \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & N \arrow[d, equal] \\
& & \mathrm{Cokern}\, \iota \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Im}\, f
\end{tikzcd}$$

Mit $M \xrightarrow{\rho} \mathrm{Cokern}\, \iota$ ist also auch $M \xrightarrow{f} N$ ein Cokern von $\mathrm{Kern}\, f \xrightarrow{\iota} M$.

Cf. Lemma 30.

(2) Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $\mathcal{A}^\circ$.

Im allgemeinen ist $(R\text{-Mod})^\circ$ aber keine Modulkategorie mehr. Um ein Argument zu skizzieren, es ist in R-Mod der kanonische Morphismus vom Coprodukt ins Produkt monomorph, aber i.a. nicht isomorph, in $(R\text{-Mod})^\circ$ also epimorph, aber i.a. nicht isomorph.

4.3 Homomorphiesatz

Sei $\mathcal{A}$ nun eine abelsche Kategorie.

Lemma 122 (Wechsellemma) *Seien $Z \xrightarrow{f} X$ und $Z \xrightarrow{g} Y$ gegeben. Sei $K \xrightarrow{i} Z$ ein Kern von f. Sei $L \xrightarrow{j} Z$ ein Kern von g. Es existiert folgendes kommutative Diagramm, in welchem v ein Kern von jf und u ein Kern von ig ist.*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & K \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "ig"] & \\
L \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "jf"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Hierzu kann ein beliebiger Kern v von jf vorgegeben werden.

Beweis. Sei v ein Kern von jf. Da $(vj)f = 0$ und i Kern von f ist, gibt es einen Morphismus $M \xrightarrow{u} K$ mit $ui = vj$. Da vj monomorph ist, ist auch u monomorph.

Bleibt zu zeigen, daß u ein Kern von ig ist. Es ist $uig = vjg = 0$. Sei t mit $tig = 0$ gegeben. Da j Kern von g ist, gibt es ein s mit $sj = ti$. Es ist $sjf = tif = 0$. Da v ein Kern von jf ist, gibt es ein w mit $wv = s$. Es ist $wui = wvj = sj = ti$, wegen i monomorph also $wu = t$. Die Eindeutigkeit von w bezüglich $wu = t$ folgt aus der Monomorphie von u.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, "t"] \arrow[ddr, "s"'] & & & \\
 & M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & K \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "ig"] & \\
 & L \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "jf"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Y \\
 & & X &
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 123 (Homomorphiesatz)
Sei $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben. Sei i ein Kern von f. Sei r' ein Cokern von i. Sei r ein Cokern von f. Sei i' ein Kern von r. Es gibt ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$
\begin{tikzcd}
 & & C' \arrow[dd, "\tilde{f}", "\wr"'] & & \\
K \arrow[r, "i"] & X \arrow[ur, "r'"] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[r, "r"] & C \\
 & & K' \arrow[ur, "i'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Cf. Lemma 30.

Beweis. Siehe Aufgabe 54.(3). ▫

Cf. auch die Aussagen in Aufgabe 54.(1, 2), die ihrerseits wieder aus Lemma 123 folgen.

Bemerkung 124

(1) *Für alle $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$ können wir eine Faktorisierung*

$$(X \xrightarrow{f} Y) \;=\; (X \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{I}_f \xrightarrow{\dot{f}} Y)$$

wählen, in welcher $\bar{f}$ ein Cokern von ι_f und $\dot{f}$ ein Kern von ρ_f ist.

Es heißt I_f *das* (gewählte) Bild *von f.*

Wir wählen ferner $\mathrm{I}_0 = 0$.

(2) *Sei folgendes kommutative Diagramm in $\mathcal{A}$ gegeben.*

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"'] & A \arrow[r, "v"] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "y"] & C \\
K' \arrow[r, "i'"] & X' \arrow[r, "u'"] & A' \arrow[r, "v'"] & Y' \arrow[r, "r'"] & C'
\end{tikzcd}
$$

Sei darin i ein Kern von uv, damit auch von u. Sei i' ein Kern von $u'v'$, damit auch von u'.

Sei darin r ein Cokern von uv, damit auch von v. Sei r' ein Cokern von $u'v'$, damit auch von v'.

Es gibt genau ein k mit $ki' = ix$. Es gibt genau ein c mit $rc = yr'$. Es gibt ein a mit $ua = xu'$ und $av' = vy$, und jede dieser Gleichungen legt a eindeutig fest.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "\exists!k"'] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"'] & A \arrow[r, "v"] \arrow[d, dotted, "\exists!a"] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "y"] & C \arrow[d, dotted, "\exists!c"] \\
K' \arrow[r, "i'"] & X' \arrow[r, "u'"] & A' \arrow[r, "v'"] & Y' \arrow[r, "r'"] & C'
\end{tikzcd}
$$

(3) *Sei $uv = u'v'$, seien u, u' epimorph, und seien v, v' monomorph. Dann gibt es einen Isomorphismus a mit $ua = u'$ und $av' = v$, eindeutig durch jede der beiden Gleichungen festgelegt.*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "\wr"', "\exists! a"] \arrow[dr, "v"] & \\ X \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & Y \\ & A' \arrow[ur, "v'"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Zu (1). Dies folgt mit Lemma 123.

Zu (2). Die Aussage über k folgt aus $(ix)(u'v') = iuvy = 0$. Die Aussage über c dual.

Zu a. Die Eindeutigkeitsaussagen folgen aus u epimorph resp. v' monomorph. Zur Existenz. Nach Lemma 123 (oder Aufgabe 54.(1)) ist v' ein Kern von r'. Da $vyr' = vrc = 0$, gibt es ein a mit $av' = vy$. Da $(ua)v' = uvy = (xu')v'$ und da v' monomorph ist, folgt $ua = xu'$.

Zu (3). Existenz und Eindeutigkeit des Morphismus a folgt mit (2), angewandt auf $x = \mathrm{id}$ und $y = \mathrm{id}$. Da u' epimorph ist, gilt das auch für a. Da v monomorph ist, gilt das auch für a. Nach Lemma 123 (oder Aufgabe 54.(2)) ist a also insgesamt ein Isomorphismus. ▫

4.4 Exakte Sequenzen

Sei $\mathcal{A}$ weiterhin eine abelsche Kategorie.

Definition 125 Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ in $\mathcal{A}$ gegeben.

(1) Es heißt (i, r) eine *kurz exakte Sequenz,* falls i ein Kern von r und r ein Cokern von i ist.

Äquivalent hierzu ist (i, r) kurz exakt, falls i monomorph ist und r ein Cokern von i. Denn nach Lemma 123 (oder Aufgabe 54.(1)) ist diesenfalls i auch ein Kern von r .

Ebenfalls äquivalent hierzu ist (i, r) kurz exakt, falls i ein Kern von r ist und r epimorph.

(2) Es heißt (i, r) eine *linksexakte Sequenz*, falls i ein Kern von r ist.

(2°) Es heißt (i, r) eine *rechtsexakte Sequenz*, falls r ein Cokern von i ist.

Beispiel 126 Seien X, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $X \xrightarrow{(1\;0)} X \oplus Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} Y$ kurz exakt. In der Tat ist $(1\;0)$ ein Kern von $\binom{0}{1}$. Denn zum einen ist $(1\;0)\binom{0}{1} = 0$. Zum anderen, ist $(s\;t)\binom{0}{1} = 0$, dann ist $(s\;t) = (s\;0) = s\,(1\;0)$, und s ist dadurch auch eindeutig festgelegt. Dual ist $\binom{0}{1}$ ein Cokern zu $(1\;0)$.

Solche Sequenzen, und die als Diagramm isomorph zu solchen, heißen *split kurz exakt.* Vgl. Aufgabe 58.(2).

Beispiel 127 Sei R ein Ring. Sei in der abelschen Kategorie R-Mod die Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ gegeben.

In R-Mod stimmen die beiden Begriffe der linksexakten Sequenz aus den Definitionen 47 und 125 überein. Denn ist (i, r) linksexakt im alten Sinne, so ist $X' \xrightarrow[\sim]{i|^{\operatorname{Im} i}} \operatorname{Im} i = \operatorname{Kern} r$, also i im neuen Sinne auch ein Kern von r; somit ist (i, r) auch im neuen Sinne linksexakt. Ist umgekehrt (i, r) im neuen Sinne linksexakt, so haben wir eine Faktorisierung $(X' \xrightarrow{i} X) = (X' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Kern} r \xrightarrow{\iota} X)$, und also ist $\operatorname{Im} i = \operatorname{Kern} r$; da auch noch i injektiv ist, ist somit (i, r) auch im alten Sinne linksexakt.

In R-Mod stimmen die beiden Begriffe der rechtsexakten Sequenz aus den Definitionen 47 und 125 überein. Denn ist (i, r) rechtsexakt im alten Sinne, so ist $X/\operatorname{Im} i = X/\operatorname{Kern} r \xrightarrow[\sim]{\bar{r}} Y$, wobei $\bar{r} : x + \operatorname{Im} i \longmapsto xr$, also r im neuen Sinne auch ein Cokern von i; somit ist (i, r) auch im neuen Sinne rechtsexakt. Ist umgekehrt (i, r) im neuen Sinne rechtsexakt, so haben wir eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{r} X'') = (X \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} i \xrightarrow{\sim} X'')$, und also ist $\operatorname{Im} i = \operatorname{Kern} \rho = \operatorname{Kern} r$; da auch noch r surjektiv ist, ist somit (i, r) auch im alten Sinne rechtsexakt.

Insgesamt stimmen auch die beiden Begriffe der kurz exakten Sequenzen überein.

Definition 128 Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien.

(1) Es heißt F *exakt*, falls er kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen überführt.

(2) Es heißt F *linksexakt*, falls er kurz exakte Sequenzen in linksexakte Sequenzen überführt.

(2°) Es heißt F *rechtsexakt*, falls er kurz exakte Sequenzen in rechtsexakte Sequenzen überführt.

Ein linksexakter Funktor bildet auch jede linksexakte Sequenz (i, r) auf eine linksexakte Sequenz (Fi, Fr) ab. Denn aus $(i, \bar{r})$ und $(\dot{r}, \rho_{\dot{r}})$ kurz exakt folgt $(Fi, F\bar{r})$ und $(F\dot{r}, F\rho_{\dot{r}})$ linksexakt; da insbesondere $F\dot{r}$ monomorph ist und $Fr = (F\bar{r})(F\dot{r})$, folgt, daß (Fi, Fr) linksexakt ist; cf. Bemerkung 119.(6).

Dual bildet ein rechtsexakter Funktor auch jede rechtsexakte Sequenz auf eine rechtsexakte ab.

Beispiel 129

(1) Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$.

Es ist ${}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ linksexakt. Siehe Aufgabe 56.

Dual hierzu ist auch ${}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ linksexakt.

Cf. auch Lemma 52 für eine ähnliche Aussage in Moduln.

(2) Seien R und S Ringe, und sei ${}_R M_S$ gegeben. Dann ist ${}_R M_S \underset{S}{\otimes} - : S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ rechtsexakt; cf. Lemma 60.(2).

Definition 130 Eine Folge

$$(*) \qquad \cdots \xrightarrow{f^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} \cdots$$

in $\mathcal{A}$ heiße *lang exakte Sequenz,* falls $\mathrm{I}_{f^{i-1}} \xrightarrow{\dot{f}^{i-1}} X^i \xrightarrow{\bar{f}^i} \mathrm{I}_{f^i}$ kurz exakt ist für alle i.

Bricht hierbei die Folge an einer Stelle ab, so denke man sie sich durch Nullobjekte ergänzt.

Äquivalent zur Faktorisierung $(X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1}) = (X^i \xrightarrow{\bar{f}^i} \mathrm{I}_{f^i} \xrightarrow{\dot{f}^i} X^{i+1})$ kann auch jede andere Faktorisierung in einen Epi- gefolgt von einem Monomorphismus verwandt werden; cf. Bemerkung 124.(3).

Faßt man eine lang exakte Sequenz als Komplex auf im Sinne von Beispiel 94, so heißt sie auch *azyklischer Komplex.*

Beispiel 131

(1) Ist $\mathcal{A} = R$-Mod, so ist $(*)$ lang exakt, falls sie an jeder Stelle exakt ist im Sinne von Definition 47, i.e. falls $\operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Kern} f^i$ für alle $i \in \mathbf{Z}$.

Denn ist $(*)$ lang exakt, dann ist $(\dot{f}^{i-1}, \bar{f}^i)$ stets kurz exakt, also $\operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Im} \dot{f}^{i-1} = \operatorname{Kern} \bar{f}^i = \operatorname{Kern} f^i$, und somit ist $(*)$ exakt an jeder Stelle.

Ist umgekehrt $(*)$ exakt an jeder Stelle, so ist $\operatorname{Im} \dot{f}^{i-1} = \operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Kern} f^i = \operatorname{Kern} \bar{f}^i$, also $(\dot{f}^{i-1}, \bar{f}^i)$ stets kurz exakt, und somit $(*)$ lang exakt.

(2) Es ist für beliebig gegebene $T^i \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ der Komplex

$$\left(\cdots \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots \right) := \left(\cdots \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} T^i \oplus T^{i+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} T^{i+1} \oplus T^{i+2} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \cdots \right)$$

azyklisch, da $\mathrm{I}_{d^{i-1}} \xrightarrow{\dot{d}^{i-1}} X^i \xrightarrow{\bar{d}^i} \mathrm{I}_{d^i}$ kurz exakt ist, weil isomorph zur kurz exakten Sequenz $T^i \xrightarrow{(1\,0)} T^i \oplus T^{i+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} T^{i+1}$; cf. Beispiel 126. Ein Komplex isomorph in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ zu einem dieser Form heißt *split azyklisch.*

4.5 Diagrammlemmata

Sei $\mathcal{A}$ weiterhin eine abelsche Kategorie.

4.5.1 Umfangssequenzlemma

Lemma 132 (Umfangssequenzlemma) *Sei ein komponierbares Paar von Morphismen (f, g) in der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ gegeben. Sei i ein Kern von f, sei j ein Kern von fg und sei k ein Kern von g. Sei p ein Cokern von f, sei q ein Cokern von fg und sei r ein Cokern von g. Wir erhalten auf eindeutige Weise folgendes kommutative Diagramm.*

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[rr] \arrow[dr, "k"] & & C \arrow[ddrr] & & \\
 & & & Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "g"] & & & \\
L \arrow[uurr] \arrow[rr, "j"] & & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "fg"] & & Z \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "r"] & & D \arrow[dl] \\
 & K \arrow[ul] \arrow[ur, "i"] & & & & E &
\end{tikzcd}$$

Hierin ist die Sequenz

$$K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E$$

lang exakt.

Beweis. Die fragliche Sequenz existiert auf eindeutige Weise, wie man unter mehrfacher Verwendung von Bemerkung 124.(2) und eines Kompositums $(M \xrightarrow{kp} C) := (M \xrightarrow{k} Y \xrightarrow{p} C)$ erkennt. Zu zeigen ist ihre Exaktheit.

Schreibe $h := fg$. Zunächst einmal tragen wir I_f, I_h und I_g ein, samt den Faktorisierungen $f = \bar{f}\dot{f}$, $h = \bar{h}\dot{h}$ und $g = \bar{g}\dot{g}$. Bemerkung 124.(2), zweimal angewandt, gibt uns Morphismen $\mathrm{I}_f \xrightarrow{a} \mathrm{I}_h$ und $\mathrm{I}_h \xrightarrow{b} \mathrm{I}_g$ mit $\bar{f}a = \bar{h}$, $b\dot{g} = \dot{h}$ und $ab = \dot{f}\bar{g}$. Trage dann ι_a und ρ_b samt den gemäß Bemerkung 124.(2) induzierten Morphismen ein. Trage die gewählte Faktorisierung von $M \xrightarrow{kp} C$ über I_{kp} ein.

Da ι_a auch Kern von $ab = \dot{f}\bar{g}$ ist, ist nach Lemma 122 der Morphismus $\mathrm{K}_a \longrightarrow M$ ein Kern von $M \longrightarrow C$. Daher ist die Sequenz $(\mathrm{K}_a\,, M, \mathrm{I}_{kp})$ kurz exakt.

Es ist i ein Kern von $\bar{f}$ und j ein Kern von $\bar{h}$. Es ist $i\bar{h}\dot{h} = ih = ifg = 0$, und also $i\bar{h} = 0$. Nach Lemma 122 ist also $K \longrightarrow L$ ein Kern von $L \longrightarrow \mathrm{I}_f$. Genauso, nach Lemma 122° ist $\mathrm{I}_f \xrightarrow{a} \mathrm{I}_h$ ein Cokern von $L \longrightarrow \mathrm{I}_f$. Nach dem Homomorphiesatz, Lemma 123, ist $L \longrightarrow \mathrm{K}_a$ epimorph. Es folgt, daß die Sequenz (K, L, K_a) kurz exakt ist.

Dual sind auch die Sequenzen $(\mathrm{I}_{kp}\,, C, \mathrm{C}_b)$ und $(\mathrm{C}_b\,, D, E)$ kurz exakt.

Insgesamt ist mithin die fragliche Sequenz lang exakt.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & \mathrm{I}_{kp} \arrow[dr] & & & & \\
 & & & M \arrow[ur] \arrow[rr, "kp"] \arrow[dr, "k"] & & C \arrow[dr] & & & \\
 & & \mathrm{K}_a \arrow[ur] \arrow[dr, "\iota_a"] & & Y \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\bar{g}"] & & \mathrm{C}_b \arrow[ddrr] & & \\
 & & & \mathrm{I}_f \arrow[ur, "\dot{f}"] \arrow[dr, "a"] & & \mathrm{I}_g \arrow[ur, "\rho_b"] \arrow[dr, "\dot{g}"] & & & \\
L \arrow[uurr] \arrow[rr, "j"] & & X \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[rr, "\bar{h}"] & & \mathrm{I}_h \arrow[ur, "b"] \arrow[rr, "\dot{h}"] & & Z \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "r"] & & D \arrow[dl] \\
 & K \arrow[ul] \arrow[ur, "i"] & & & & & & E &
\end{tikzcd}$$

□

4.5.2 Pullbacks und Pushouts

Sei

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Viereck in der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Sei

$$X \xrightarrow{(x\ f)} X' \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)} Y'$$

seine *Diagonalsequenz.* Kommutativität des Vierecks $(*)$ bedeutet gerade, daß darin $(x\ f)\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right) = 0$ ist.

Wir haben folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(x\ f)"] \arrow[d, "-1"', "\wr"] & X' \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)"', "\wr"] & Y' \arrow[d, "1"', "\wr"] \\
X \arrow[r, "(-x\ f)"] & X' \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f' \\ y \end{smallmatrix}\right)"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Daß das erforderliche Vorzeichen in der Diagonalsequenz ausgerechnet vor y steht, spielt also keine große Rolle.

Definition 133

(1) Es ist das kommutative Viereck $(*)$ ein *Pullback,* falls es für alle s und t mit $sf' = ty$ genau ein u mit $ux = s$ und $uf = t$ gibt. Ein Pullback kann mit einem Haken wie im folgenden Diagramm als solcher gekennzeichnet werden.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\exists! u"] \arrow[drr, bend left, "t"] \arrow[ddr, bend right, "s"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" very near start] & Y \arrow[d, "y"] \\
& X' \arrow[r, "f'"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

(1°) Es ist das kommutative Viereck $(*)$ ein *Pushout,* falls es für alle s und t mit $fs = xt$ genau ein u mit $yu = s$ und $f'u = t$ gibt. Ein Pushout kann mit einem Haken wie im folgenden Diagramm als solcher gekennzeichnet werden.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner" very near end] & Y \arrow[d, "y"] \arrow[ddr, bend left, "s"] & \\
X' \arrow[r, "f'"'] \arrow[drr, bend right, "t"'] & Y' \arrow[dr, dotted, "\exists! u"] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

(2) Ein Viereck, das sowohl Pullback als auch Pushout ist, heißt *(bicartesisches) Quadrat.* Es kann graphisch durch ein kleines Quadrat als solches gekennzeichnet werden.

Sei i ein Kern und r ein Cokern von f. Sei i' ein Kern und r' ein Cokern von f'. Gemäß Bemerkung 124.(2) gibt es in $\mathcal{A}$ eindeutige Morphismen k mit $ki' = ix$ und c mit $rc = yr'$.

$(**)$
$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[d, "y"] & C \arrow[d, "c"] \\
K' \arrow[r, "i'"'] & X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "r'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

Lemma 134 (Kern-Cokern-Kriterium)
Für ein kommutatives Viereck (X, X', Y, Y') wie in $(*)$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Es ist das Viereck (X, X', Y, Y') ein Pullback.*

(2) *Es ist die Diagonalsequenz $X \xrightarrow{(x\ f)} X' \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)} Y'$ linksexakt.*

(3) *In einer Vervollständigung wie in $(**)$ ist k ein Isomorphismus und c ein Monomorphismus.*

(4) *In jeder Vervollständigung wie in (∗∗) ist k ein Isomorphismus und c ein Monomorphismus.*

Insbesondere gibt es dank (2) ⇒ (1) für Morphismen $X' \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{y} Y$ in $\mathcal{A}$ stets eine Vervollständigung zu einem Pullback.

Zum Beispiel ist das Viereck $(\mathrm{K}_a\,, \mathrm{I}_f\, M, Y)$ aus dem Beweis zu Lemma 132 ein Pullback; ferner ist $(L, X, \mathrm{K}_a\,, \mathrm{I}_f)$ ein Quadrat und (L, X, M, Y) ein Pullback.

Beweis.

Ad (1) ⇒ (2). Sei $T \xrightarrow{\begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix}} X' \oplus Y$ mit $\begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix} = 0$ gegeben. Dann ist $sf' = ty$. Also gibt es genau ein $T \xrightarrow{u} X$ mit $ux = s$ und $uf = t$, i.e. mit $u \begin{pmatrix} x & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix}$.

Ad (1) ⇐ (2). Seien Morphismen $T \xrightarrow{s} X'$ und $T \xrightarrow{t} Y$ mit $sf' = ty$ gegeben. Dann ist $\begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix} = 0$. Also gibt es genau ein $T \xrightarrow{u} X$ mit $u \begin{pmatrix} x & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix}$, i.e. mit $ux = s$ und $uf = t$.

Insbesondere gibt es, wie behauptet, für Morphismen $X' \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{y} Y$ eine Vervollständigung zu einem Pullback – man verwende einen Kern von $\begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix}$.

Ad (2) ⇒ (4). Wir wenden das Umfangssequenzlemma auf $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix} = f'$ an; cf. Lemma 132. Schreibe $h := -yr'$. Wir erhalten die lang exakte Sequenz

$$K' \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} C' \longrightarrow \mathrm{C}_{\begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix}} .$$

Hierin ist j durch $j \begin{pmatrix} x & f \end{pmatrix} = i' \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ charakterisiert, i.e. durch $jx = i'$ und $jf = 0$. Es ist $kj = i$, da $kj \begin{pmatrix} x & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ki' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x & f \end{pmatrix}$. Da j und i beide Kerne von f sind, ist k gemäß Bemerkung 119.(2) ein Isomorphismus. Da r und $\bar{h}$ beides Cokerne von f sind, gibt es gemäß Bemerkung 119.(2°) einen Isomorphismus d mit $rd = \bar{h}$. Es ist $(-d)\dot{h} = c$, da $r(-d)\dot{h} = -\bar{h}\dot{h} = -h = yr' = rc$. Da $-d$ ein Isomorphismus und $\dot{h}$ ein Monomorphismus ist, folgt die Monomorphie von c.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[dd, "k"', "\wr"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} x & f \end{pmatrix}"'] & & Y \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\bar{h}"] \arrow[ddr, "h"'] & C \arrow[d, "d", "\wr"'] \arrow[dd, bend left, "-c"] \\
& & X' \oplus Y \arrow[ur, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"'] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix}"] & & \mathrm{I}_h \arrow[d, "\dot{h}"] \\
K' \arrow[uur, "j"] \arrow[r, "i'"] & X' \arrow[ur, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[rr, "f'"] & & Y' \arrow[r, "r'"] \arrow[dr, "\rho"'] & C' \arrow[d] \\
0 \arrow[u] \arrow[ur] & & & & \mathrm{C}_{\begin{pmatrix} f' \\ -y \end{pmatrix}}
\end{tikzcd}$$

Ad (4) ⇒ (3). Es gibt dank Bemerkung 124.(2) eine Vervollständigung wie in (∗∗).

Ad (3) $\Rightarrow$ (1). Trage in ($**$) einen Pullback (P, Y, X', Y') ein, cf. Diagramm unten. Wir erhalten einen Morphismus $X \xrightarrow{w} P$ mit $wu = x$ und $wv = f$. Es ist zu zeigen, daß w ein Isomorphismus ist; cf. (1) $\Leftrightarrow$ (2) und Bemerkung 119.(5). Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{K}_w \overset{!}{\simeq} 0$ und $\mathrm{C}_w \overset{!}{\simeq} 0$ ist; cf. Homomorphiesatz, i.e. Lemma 123, oder Bemerkung 119.(3, 3°), Aufgabe 54.(2).

Unter Verwendung der bereits bekannten Implikation (1) $\Rightarrow$ (3) und Bemerkung 119.(5) finden wir einen Kern j von $P \xrightarrow{v} Y$ mit $ju = i'$ und einen Monomorphismus $\mathrm{C}_v \xrightarrow{\tilde{c}} C'$ mit $\rho_v\, \tilde{c} = yr'$. Es ist $kj = iw$, da $kju = ki' = ix = iwu$ und $kjv = 0 = if = iwv$, und da $\left(\begin{smallmatrix} u & v \end{smallmatrix}\right)$ monomorph ist; beachte hierzu, daß (1) $\Rightarrow$ (2) bekannt.

Wir wenden das Umfangssequenzlemma auf $wv = f$ an; cf. Lemma 132. Wir erhalten eine lang exakte Sequenz

$$\mathrm{K}_w \xrightarrow{e} K \xrightarrow[\sim]{k} K' \xrightarrow{\ell} \mathrm{C}_w \xrightarrow{m} C \xrightarrow{d} \mathrm{C}_v \,.$$

mit $ei = \iota_w$ und $\ell = j\rho_w$ und $\rho_w m = vr$ und $rd = \rho_v$. Es folgt $rd\tilde{c} = \rho_v\tilde{c} = yr' = rc$, und folglich $d\tilde{c} = c$. Mit c ist somit auch d monomorph. Insgesamt ist d ein Isomorphismus; cf. Aufgabe 54.(2). Da $\dot{m}$ ein Kern von d ist, ist $\mathrm{I}_m \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.(3, 2). Da $\bar{\ell}$ ein Cokern des Isomorphismus k ist, ist $\mathrm{I}_\ell \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.(3°, 2°). Die kurz exakte Sequenz $\mathrm{I}_\ell \xrightarrow{\dot{\ell}} \mathrm{C}_w \xrightarrow{\bar{m}} \mathrm{I}_m$ zeigt also, daß $0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}_\ell \xrightarrow[\sim]{\dot{\ell}} \mathrm{C}_w$; cf. Bemerkung 119.(4, 2).

Ferner ist e ein Kern des Isomorphismus k, und also $\mathrm{K}_w \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.(3, 2).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{K}_w \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "\iota_w"] & & & & \mathrm{C}_v \arrow[ddddr, "\tilde{c}"] & \\
K \arrow[rr, "i"] \arrow[dddd, "k"', "\wr"] & & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"] \arrow[ddd, "x"] & & Y \arrow[ur, "\rho_v"] \arrow[rr, "r"] \arrow[ddd, "y"] & & C \arrow[ul, "d"', "\sim"] \arrow[ddd, "c"] \\
 & & & P \arrow[ur, "v"] \arrow[d, "\rho_w"] \arrow[ddl, "u"] & & & \\
 & & & \mathrm{C}_w \arrow[uurrr, "m"] & & & \\
K' \arrow[uurrr, "j"] \arrow[urrr, "\ell"] \arrow[rr, "i'"'] & & X' \arrow[rr, "f'"'] & & Y' \arrow[rr, "r'"'] & & C'
\end{tikzcd}$$

Korollar 135 *Betrachte wieder das kommutative Viereck (X, X', Y, Y') aus $(*)$ und eine Ergänzung wie in $(**)$.*

(1) *Das Viereck (X, X', Y, Y') ist genau dann ein Quadrat, wenn k und c Isomorphismen sind.*

(2) *Sei (X, X', Y, Y') ein Pullback. Es ist f' monomorph genau dann, wenn f dies ist. Ist f' epimorph, so auch f.*

(3) *Ist das Viereck (X, X', Y, Y') ein Pullback und ist f' epimorph, so ist es ein Quadrat.*

Cf. auch Aufgabe 59.(6).

4.5.3 Schlangenlemma

Lemma 136 (Schlangenlemma) *In $\mathcal{A}$ sei*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
Y' \arrow[r, "n"] & Y \arrow[r, "q"] & Y''
\end{tikzcd}$$

ein Morphismus von Sequenzen, i.e. seien beide Vierecke im vorstehenden Diagramm kommutativ; sei (X', X, X'') rechtsexakt und (Y', Y, Y'') linksexakt. Seien i' ein Kern und r' ein Cokern von f'. Seien i ein Kern und r ein Cokern von f. Seien i'' ein Kern und r'' ein Cokern von f''.

Dann gibt es eine lang exakte Sequenz

$$\mathrm{K}_\alpha \xrightarrow{\iota} K' \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{\varepsilon} C'' \xrightarrow{\rho} \mathrm{C}_\varepsilon$$

mit $\alpha i = i'm$, $\beta i'' = ip$, $r'\delta = nr$ und $r\varepsilon = qr''$.

Eine Charakterisierung des Konnektors γ *wird sich aus der Konstruktion ergeben. Cf. auch Aufgabe* 70.

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, dotted, "\alpha"] \arrow[d, "i'"'] & K \arrow[r, dotted, "\beta"] \arrow[d, "i"] & K'' \arrow[d, "i''"] \arrow[dddll, dotted, bend left=60, "\gamma"] \\
X' \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
Y' \arrow[r, "n"] \arrow[d, "r'"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"] & Y'' \arrow[d, "r''"] \\
C' \arrow[r, dotted, "\delta"] & C \arrow[r, dotted, "\varepsilon"] & C''
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wähle einen Pushout (X', X, Y', T), cf. untenstehendes Diagramm. Wir erhalten einen Morphismus $T \xrightarrow{v} Y$ mit $uv = f$ und $av = n$. Mit n ist auch a monomorph. Nach Lemma 134° gibt es einen Cokern b von a mit $ub = p$.

Es ist das Viereck (T, X'', Y, Y'') kommutativ, i.e. es ist $bf'' = vq$. Denn zum einen ist $u(bf'') = pf'' = fq = u(vq)$; zum anderen ist $a(bf'') = 0 = nq = a(vq)$; ferner ist $\left(\begin{smallmatrix} u \\ -a \end{smallmatrix}\right)$ epimorph nach Lemma 134°. Gemäß Lemma 134 ist (T, X'', Y, Y'') ein Pullback.

Da (X', X, Y', T) ein Pushout ist, gibt es einen Epimorphismus α_1 mit $\alpha_1 \iota_u = i'm$; ferner gibt es einen Cokern μ von u mit $a\mu = r'$; cf. Lemma 134°.

Da (T, X'', Y, Y'') ein Pullback ist, gibt es einen Monomorphismus ε_2 mit $\rho_v \varepsilon_2 = qr''$; ferner gibt es einen Kern λ von v mit $\lambda b = i''$; cf. Lemma 134.

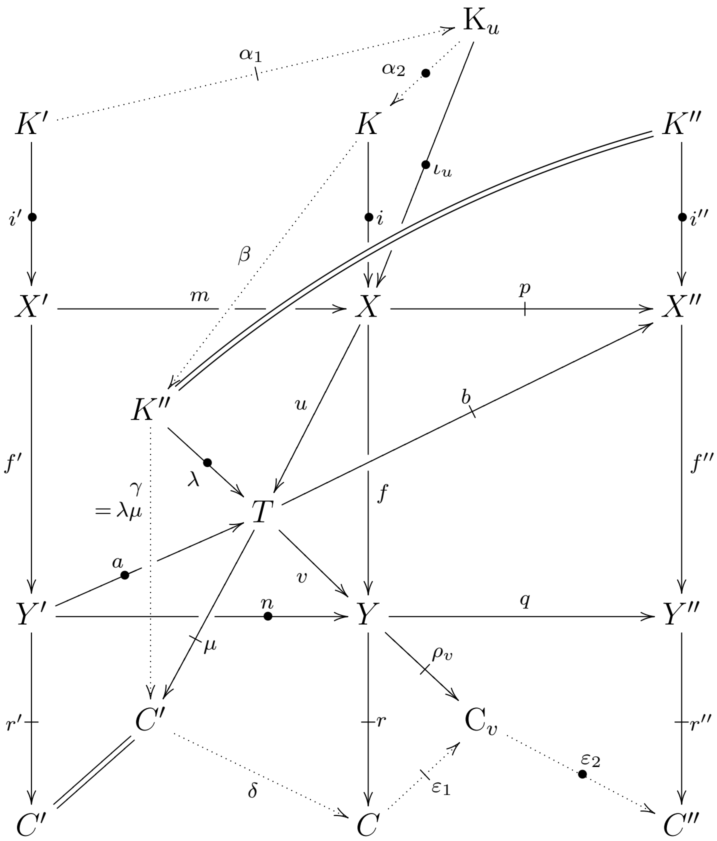
Eine Anwendung des Umfangssequenzlemmas, Lemma 132, auf $uv = f$ gibt eine lang exakte Sequenz

$$\mathrm{K}_u \xrightarrow{\alpha_2} K \xrightarrow{\beta} K'' \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathrm{C}_v$$

mit $\alpha_2\, i = \iota_u$, $\beta\lambda = iu$, $\gamma = \lambda\mu$, $\mu\delta = vr$ und $r\varepsilon_1 = \rho_v$.

Setze $\alpha := \alpha_1\alpha_2$ und $\varepsilon := \varepsilon_1\varepsilon_2$. Anfügen der kurz exakten Sequenzen $(\iota_\alpha\, , \alpha_1)$ und $(\varepsilon_2\, , \rho_\varepsilon)$ gibt die behauptete lang exakte Sequenz. Denn es folgt $\alpha i = \alpha_1\alpha_2 i = \alpha_1\iota_u = i'm$ und $\beta i'' = \beta\lambda b = iub = ip$ und $r'\delta = a\mu\delta = avr = nr$ und $r\varepsilon = r\varepsilon_1\varepsilon_2 = \rho_v\varepsilon_2 = qr''$.

Es ist λ charakterisiert durch $\lambda v = 0$ und $\lambda b = i''$. Es ist μ charakterisiert durch $u\mu = 0$ und $a\mu = r'$. Es ist $\gamma = \lambda\mu$.



□

4.6 Projektiv und injektiv

Sei $\mathcal{A}$ weiterhin eine abelsche Kategorie.

Definition 137 Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

(1) Es heißt X *projektiv,* wenn ${}_{\mathcal{A}}(X,-) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ exakt ist.

(1°) Es heißt X *injektiv,* wenn ${}_{\mathcal{A}}(-,X) : \mathcal{A}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ exakt ist.

Cf. Definition 63.

Bemerkung 138 Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ gegeben. Da ${}_{\mathcal{A}}(X,-)$ gemäß Beispiel 129, i.e. Aufgabe 56, linksexakt ist, ist X projektiv genau dann, wenn ${}_{\mathcal{A}}(X,-)$ Epimorphismen in Surjektionen überführt.

In anderen Worten, es ist X projektiv genau dann, wenn für alle Epimorphismen $Y \overset{r}{\twoheadrightarrow} Y''$ und alle $X \xrightarrow{v} Y''$ ein $X \xrightarrow{u} Y$ mit $ur = v$ existiert.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dotted, "\exists u"'] \arrow[d, "v"] \\ Y \arrow[r, two heads, "r"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

Dual dazu ist die Injektivität charakterisierbar.

Definition 139

(1) Es hat $\mathcal{A}$ *genügend Projektive,* wenn es für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow X$ gibt mit $P \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ projektiv.

(1°) Es hat $\mathcal{A}$ *genügend Injektive,* wenn es für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ einen Monomorphismus $X \rightarrowtail I$ gibt mit $I \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ injektiv.

Beispiel 140

(1) Sei R ein Ring. Es hat R-Mod genügend Projektive und genügend Injektive; cf. Bemerkung 64.(4) und Satz 68.

(2) Sei $k \geqslant 2$ eine Primpotenz. Es hat $\mathbf{Z}/k$-mod, die volle Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/k$-Moduln in $\mathbf{Z}/k$-Mod, genügend Injektive und genügend Projektive; cf. Aufgabe 64.(4).

Bemerkung 141 *Seien X, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $X \oplus Y$ projektiv genau dann, wenn X und Y projektiv sind.*

Beweis. Sei $S \overset{u}{\twoheadrightarrow} T$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Wir haben folgendes kommutative Viereck in $\mathbf{Z}$-Mod.

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{A}}(X,S) \oplus {}_{\mathcal{A}}(Y,S) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} {}_{\mathcal{A}}(X,u) & 0 \\ 0 & {}_{\mathcal{A}}(Y,u) \end{smallmatrix}\right)"'] & {}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, S) \arrow[d, "{}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, u)"] \\ {}_{\mathcal{A}}(X,T) \oplus {}_{\mathcal{A}}(Y,T) \arrow[r, "\sim"] & {}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, T) \end{tikzcd}$$

Hierin ordnen die horizontalen Isomorphismen einem Paar (f,g) die Matrix $\binom{f}{g}$ zu. Also ist ${}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, u)$ genau dann surjektiv, wenn ${}_{\mathcal{A}}(X,u)$ und ${}_{\mathcal{A}}(Y,u)$ dies sind. □

Cf. Aufgabe 31.$(1,2)$.

Insbesondere verfügen wir über die volle additive Teilkategorie $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ der projektiven Objekte in $\mathcal{A}$. Dual hierzu bezeichne $\operatorname{Inj}\mathcal{A}$ die volle additive Teilkategorie der injektiven Objekte in $\mathcal{A}$.

Kapitel 5

Komplexe

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abelsche Kategorien.

5.1 Indizes oben und unten

In Beispiel 94 wurde die Kategorie $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ der Komplexe mit Werten in $\mathcal{A}$ definiert. Sei hier nun noch als alternative Schreibweise für die Einträge eines Komplexes X folgendes eingeführt. Für $i \in \mathbf{Z}$ schreiben wir auch $X_i := X^{-i}$ und $d = d_i^X := d_X^{-i-1}$. Es werde ferner für einen Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ von Komplexen auch $(f_i)_{i\in\mathbf{Z}} = (f^{-i})_{i\in\mathbf{Z}}$ geschrieben. Ein Morphismus von Komplexen ist in dieser alternativen Schreibweise ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r, "d_i^X"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & X_i \arrow[r, "d_{i-1}^X"] \arrow[d, "f_i"] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{i+1} \arrow[r, "d_i^Y"] & Y_i \arrow[r, "d_{i-1}^Y"] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

5.2 Homotopiekategorie

Es ist $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine abelsche Kategorie; cf. Aufgabe 57.(2). Sei

$$\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \;\subseteq\; \mathrm{C}(\mathcal{A})$$

die volle additive Teilkategorie der split azyklischen Komplexe; cf. Beispiel 131, Aufgabe 58.(4).

Definition 142 Sei

$$\mathrm{K}(\mathcal{A}) \;:=\; \mathrm{C}(\mathcal{A})/\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$$

die *Homotopiekategorie* der Komplexe mit Werten in $\mathcal{A}$; cf. Definition 114. Cf. auch Aufgabe 65.

Nach Konstruktion ist $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ eine additive Kategorie; cf. Bemerkung 115.

Es ist $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ i.a. keine abelsche Kategorie, sondern eine sogenannte *triangulierte* Kategorie. Cf. auch §7.3, insbesondere Beispiel 230.(1).

5.3 Induzierte Funktoren auf Homotopiekategorien

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. Wir haben einen Funktor $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!] \xrightarrow{[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]} [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{B}]\!]$, welcher $X \in \mathrm{Ob}\,[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ nach $F \circ X \in \mathrm{Ob}\,[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{B}]\!]$ schickt, und $f = (fi)_{i \in \mathbf{Z}} : X \longrightarrow Y$ in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ nach $F \circ f := (Ffi)_{i \in \mathbf{Z}} : F \circ X \longrightarrow F \circ Y$ in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{B}]\!]$. Intuitiv gesprochen ergibt sich $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]$ durch punktweises Anwenden von F.

Es ist $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]$ additiv, da $F \circ 0 \simeq 0$ und da $F \circ (X \oplus Y) \xrightarrow{(\, F\circ\pi_1 \;\; F\circ\pi_2 \,)} F \circ X \oplus F \circ Y$ isomorph ist für $X, Y \in \mathrm{Ob}\,[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$; beides, da es punktweise gilt; cf. Bemerkung 109, Aufgabe 57.(1).

Da F Komposition und Nullmorphismen respektiert, schränkt $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, F]\!]$ ein zu einem additiven Funktor

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{C}(F)} & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \\
(X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & \mathrm{C}(F)(X \xrightarrow{f} Y) \;=:\; F(X \xrightarrow{f} Y) \;=\; (FX \xrightarrow{Ff} FY)\,,
\end{array}
$$

unter Mißbrauch von Notation. Ausgeschrieben wird

$$
F\left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^i"'] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{i+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d"] & Y^i \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots \end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "Fd"] & FX^i \arrow[r, "Fd"] \arrow[d, "Ff^i"'] & FX^{i+1} \arrow[r, "Fd"] \arrow[d, "Ff^{i+1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "Fd"] & FY^i \arrow[r, "Fd"] & FY^{i+1} \arrow[r, "Fd"] & \cdots \end{tikzcd}\right)
$$

Wegen der Additivität von F ist für X split azyklisch auch FX split azyklisch; denn aus

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & T^i \oplus T^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\wr"'] & T^{i+1} \oplus T^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\wr"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

folgt

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & FT^i \oplus FT^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & FT^{i+1} \oplus FT^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "F\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & F(T^i \oplus T^{i+1}) \arrow[r, "F\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[u, "\wr", "(\, F\pi_1 \;\; F\pi_2 \,)"'] \arrow[d, "\wr"'] & F(T^{i+1} \oplus T^{i+2}) \arrow[r, "F\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[u, "\wr", "(\, F\pi_1 \;\; F\pi_2 \,)"'] \arrow[d, "\wr"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "Fd_X^{i-1}"] & FX^i \arrow[r, "Fd_X^i"] & FX^{i+1} \arrow[r, "Fd_X^{i+1}"] & \cdots\;;
\end{tikzcd}
$$

cf. Bemerkung 112.

Somit schränkt $\mathrm{C}(F)$ nun weiter zu einem Funktor $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(F)} \mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{B})$ ein. Die universelle Eigenschaft der Faktorkategorie aus Bemerkung 116 liefert einen induzierten additiven Funktor $\mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(\mathcal{B})$, welcher sich in ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(F)"'] & \mathrm{C}(\mathcal{A}) \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\mathrm{C}(F)"'] & \mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\mathrm{K}(F)"'] \\
\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{B}) \arrow[r, hook] & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \arrow[r, "R"] & \mathrm{K}(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

einfügt; denn es wird $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ unter $R \circ \mathrm{C}(F)$ abgebildet auf $R(\mathrm{C}(F)X) \simeq 0$, da auch $\mathrm{C}(F)X = FX$ split azyklisch ist.

Es operiert $\mathrm{K}(F)$ auf Objekten und auf Repräsentanten von Morphismen wie $\mathrm{C}(F)$, i.e. durch punktweises Anwenden von F.

Es ist $\mathrm{K}(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}$. Für additive Funktoren $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ ist $\mathrm{K}(G \circ F) = \mathrm{K}(G) \circ \mathrm{K}(F)$.

5.4 Homologiefunktor

5.4.1 Auf Komplexen

Sei X in $\operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Schreibe

$$\begin{array}{lcll}
\mathrm{Z}^k X & := & \mathrm{K}_{d_X^k} & \text{(Z wie Zykel)} \\
\tilde{\mathrm{Z}}^k X & := & \mathrm{C}_{d_X^{k-1}} & \\
\mathrm{H}^k X & := & \mathrm{I}_{\iota_{d_X^k} \rho_{d_X^{k-1}}} & \text{(H wie Homologie; hierbei ist } \mathrm{Z}^k X \xrightarrow{\iota_{d_X^k}} X^k \xrightarrow{\rho_{d_X^{k-1}}} \tilde{\mathrm{Z}}^k X\text{)}
\end{array}$$

Wir schreiben $h_X^k := \iota_{d_X^k} \rho_{d_X^{k-1}} : \mathrm{Z}^k X \longrightarrow \tilde{\mathrm{Z}}^k X$ und erhalten folgendes Diagramm.

(∗)
$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{H}^k X \arrow[dr, "\dot{h}_X^k"] & & & \\
 & \tilde{\mathrm{Z}}^{k-1} X \arrow[r, "\hat{d}_X^{k-1}"] & \mathrm{Z}^k X \arrow[ur, "\bar{h}_X^k"] \arrow[dr, "\iota_{d_X^k}"] & & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, "\hat{d}_X^k"] & \mathrm{Z}^{k+1} X \arrow[dr, "\iota_{d_X^{k+1}}"] & \\
X^{k-1} \arrow[ur, "\rho_{d_X^{k-2}}"] \arrow[rrr, "d_X^{k-1}"] & & & X^k \arrow[ur, "\rho_{d_X^{k-1}}"] \arrow[rrr, "d_X^k"] & & & X^{k+1}
\end{tikzcd}$$

Da nämlich $d_X^{k-1} d_X^k = 0$, faktorisiert d_X^{k-1} über $\mathrm{Z}^k X$, sagen wir als $d_X^{k-1} = \varphi\, \iota_{d_X^k}$. Da ferner $d_X^{k-2} \varphi\, \iota_{d_X^k} = d_X^{k-2} d_X^{k-1} = 0$, ist auch $d_X^{k-2} \varphi = 0$, weswegen φ über $\tilde{\mathrm{Z}}^{k-1} X$ faktorisiert, $\varphi = \rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}$. Insgesamt ist also $\rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}\, \iota_{d_X^k} = d_X^{k-1}$. Wegen Epimorphie des ersten und Monomorphie des dritten Faktors ist $\hat{d}_X^{k-1}$ dadurch auch festgelegt.

Wir wenden das Umfangssequenzlemma, Lemma 132, an auf $d_X^{k-1} d_X^k = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{H}^k X \arrow[dr, "\dot{h}_X^k"] & & & \\
 & & \mathrm{Z}^k X \arrow[ur, "\bar{h}_X^k"] \arrow[rr, "h_X^k"] \arrow[dr, "\iota_{d_X^k}"'] & & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[ddrr, "\hat{d}_X^k\, \iota_{d_X^{k+1}}"] & & \\
 & & & X^k \arrow[ur, "\rho_{d_X^{k-1}}"'] \arrow[dr, "d_X^k"] & & & \\
X^{k-1} \arrow[uurr, "\rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}"] \arrow[rr, equal] & & X^{k-1} \arrow[ur, "d_X^{k-1}"] \arrow[rr, "0"] & & X^{k+1} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\rho_{d_X^k}"'] & & X^{k+1} \arrow[dl, "\rho_{d_X^k}"] \\
 & \mathrm{Z}^{k-1} X \arrow[ul, "\iota_{d_X^{k-1}}"] \arrow[ur, "\iota_{d_X^{k-1}}"'] & & & & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X &
\end{tikzcd}
$$

Infolgedessen ist $(\rho_{d_X^{k-2}}\, \hat{d}_X^{k-1}\,,\, \bar{h}_X^k)$ rechtsexakt. Da $\rho_{d_X^{k-2}}$ epimorph ist, ist auch $(\hat{d}_X^{k-1}\,,\, \bar{h}_X^k)$ rechtsexakt. Dual ist $(\dot{h}_X^k\,,\, \hat{d}_X^k)$ linksexakt.

Bemerkung 143 *Es ist* $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ *für alle* $k \in \mathbf{Z}$ *genau dann, wenn* X *azyklisch ist.*

Beweis.

Sei zum einen $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ für alle $k \in \mathbf{Z}$. Aus $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ folgt $\hat{d}_X^{k-1}$ epimorph und $\hat{d}_X^k$ monomorph. Also ist $\hat{d}_X^k$ isomorph für alle $k \in \mathbf{Z}$. Insbesondere ist $\hat{d}_X^{k-1}\, \iota_{d_X^k}$ monomorph, und also die ohnehin rechtsexakte Sequenz $(\tilde{\mathrm{Z}}^{k-1} X, X^k, \tilde{\mathrm{Z}}^k X)$ kurz exakt; cf. $(*)$. Da dies für alle $k \in \mathbf{Z}$ zutrifft, ist X azyklisch.

Sei zum anderen X azyklisch. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Dann ist $\rho_{d_X^{k-1}}$ auch ein Cokern des Kerns $\dot{d}_X^{k-1}$ von d_X^k. Dual ist $\iota_{d_X^{k+1}}$ ein Kern des Cokerns $\bar{d}_X^{k+1}$ von d_X^k. Der Homomorphiesatz, Lemma 123, liefert nun den Isomorphismus $\hat{d}_X^k$. Da $\dot{h}_X^k$ ein Kern von $\hat{d}_X^k$ ist, folgt nun $\mathrm{H}^k X \simeq 0$. □

5.4.2 Auf Morphismen von Komplexen

Das Diagramm $(*)$ in §5.4.1 ist natürlich in X. Dies bedeutet folgendes.

Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Nach Bemerkung 124.(2) gibt es $\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{\mathrm{Z}^k f} \mathrm{Z}^k Y$ und $\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X \xrightarrow{\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} f} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} Y$ eindeutig so, daß

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k X \arrow[r, "\iota_{d_X^k}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] \arrow[d, "f^k"'] & X^{k+1} \arrow[r, "\rho_{d_X^k}"] \arrow[d, "f^{k+1}"] & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} f"] \\
\mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "\iota_{d_Y^k}"] & Y^k \arrow[r, "d_Y^k"] & Y^{k+1} \arrow[r, "\rho_{d_Y^k}"] & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} Y
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Es folgt $(\mathrm{Z}^k f)(\mathrm{Z}^k g) = \mathrm{Z}^k(fg)$, da $(\mathrm{Z}^k f)(\mathrm{Z}^k g)\iota_{d_W^k} = (\mathrm{Z}^k f)\iota_{d_Y^k} g^k = \iota_{d_X^k} f^k g^k = \iota_{d_X^k}(fg)^k = \mathrm{Z}^k(fg)\iota_{d_W^k}$. Ferner ist $\mathrm{Z}^k \,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}^k X}$.

Dual ist auch $(\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} f)(\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} g) = \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}(fg)$ und $\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X}$.

Wir haben also Funktoren

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \xmapsto{\mathrm{Z}^k} & \mathrm{Z}^k(X \xrightarrow{f} Y) \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \xmapsto{\tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}} & \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}(X \xrightarrow{f} Y)\,. \end{array}$$

Es kommutiert

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, "\hat{d}_X^k"] \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^k f"'] & \mathrm{Z}^{k+1} X \arrow[d, "\mathrm{Z}^{k+1} f"] \\ \tilde{\mathrm{Z}}^k Y \arrow[r, "\hat{d}_Y^k"] & \mathrm{Z}^{k+1} Y\,, \end{tikzcd}$$

da

$$\begin{array}{rcl} \rho_{d_X^{k-1}}(\hat{d}_X^k(\mathrm{Z}^{k+1} f))\iota_{d_Y^{k+1}} & = & \rho_{d_X^{k-1}}\,\hat{d}_X^k\,\iota_{d_X^{k+1}}\,f^{k+1} \\ & = & d_X^k f^{k+1} \\ & = & f^k d_Y^k \\ & = & f^k \rho_{d_Y^{k-1}}\,\hat{d}_Y^k\,\iota_{d_Y^{k+1}} \\ & = & \rho_{d_X^{k-1}}((\tilde{\mathrm{Z}}^k f)\hat{d}_Y^k)\iota_{d_Y^{k+1}}\,. \end{array}$$

In anderen Worten, es ist $(\hat{d}_X^k)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})}$ eine Transformation von $\tilde{\mathrm{Z}}^k$ nach Z^{k+1}.

Zusammensetzen der definierenden kommutativen Vierecke von $\mathrm{Z}^k f$ und von $\tilde{\mathrm{Z}}^k f$ zeigt die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}^k X \arrow[r, "h_X^k"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^k f"] \\ \mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "h_Y^k"] & \tilde{\mathrm{Z}}^k Y\,. \end{tikzcd}$$

In anderen Worten, es ist $(h_X^k)_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})}$ eine Transformation von Z^k nach $\tilde{\mathrm{Z}}^k$.

Nach Bemerkung 124.(2) gibt es $\mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k f} \mathrm{H}^k Y$ eindeutig so, daß

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}^k X \arrow[r, "\bar{h}_X^k"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & \mathrm{H}^k X \arrow[r, "\dot{h}_X^k"] \arrow[d, "\mathrm{H}^k f"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[d, "\tilde{\mathrm{Z}}^k f"] \\ \mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "\bar{h}_Y^k"] & \mathrm{H}^k Y \arrow[r, "\dot{h}_Y^k"] & \tilde{\mathrm{Z}}^k Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es folgt $\mathrm{H}^k(fg) = (\mathrm{H}^k f)(\mathrm{H}^k g)$, da $(\mathrm{H}^k f)(\mathrm{H}^k g)\dot{h}_W^k = (\mathrm{H}^k f)\dot{h}_Y^k(\tilde{\mathrm{Z}}^k g) = \dot{h}_X^k(\tilde{\mathrm{Z}}^k f)(\tilde{\mathrm{Z}}^k g) = \dot{h}_X^k \tilde{\mathrm{Z}}^k(fg) = \mathrm{H}^k(fg)\dot{h}_W^k$. Ferner ist $\mathrm{H}^k\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\mathrm{H}^k X}$.

Wir haben so den k-ten *Homologiefunktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^k f} & \mathcal{A} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & \mathrm{H}^k(X \xrightarrow{f} Y) \end{array}$$

erhalten. Gemäß Aufgabe 71.(2) ist H^k additiv.

Wir merken noch an, daß wir alternativ auch $\mathrm{H}_k := \mathrm{H}^{-k}$ für $k \in \mathbf{Z}$ schreiben; cf. §5.1.

5.4.3 Auf der Homotopiekategorie

Bemerkung 144 *Sei* $k \in \mathbf{Z}$. *Es gibt genau einen additiven Funktor* $\mathrm{H}^k : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ *(Mißbrauch von Notation), der*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}(\mathcal{A}) \arrow[d, "R"'] \arrow[dr, "\mathrm{H}^k"] & \\ \mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{H}^k"'] & \mathcal{A}\,, \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beweis. Nach Bemerkung 143 ist $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ für alle azyklischen Komplexe $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Insbesondere bildet H^k jedes Objekt von $\mathrm{C}_{\mathrm{sp\,az}}(\mathcal{A})$ auf ein Nullobjekt ab. Die universelle Eigenschaft aus Bemerkung 116.(1) liefert die gewünschte Faktorisierung. $\square$

5.4.4 Die lang exakte Homologiesequenz

Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Aufgabe 57.(2). Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Das Schlangenlemma, Lemma 136, liefert aus

$$\begin{tikzcd} X'^{k-1} \arrow[r, "i^{k-1}"] \arrow[d, "d_{X'}^{k-1}"'] & X^{k-1} \arrow[r, "r^{k-1}"] \arrow[d, "d_X^{k-1}"'] & X''^{k-1} \arrow[d, "d_{X''}^{k-1}"] \\ X'^k \arrow[r, "i^k"] \arrow[d, "\rho_{d_{X'}^{k-1}}"'] & X^k \arrow[r, "r^k"] \arrow[d, "\rho_{d_X^{k-1}}"'] & X''^k \arrow[d, "\rho_{d_{X''}^{k-1}}"] \\ \tilde{\mathrm{Z}}^k X' \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k i"] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k r"] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X'' \end{tikzcd}$$

die Rechtsexaktheit der Sequenz $(\tilde{\mathrm{Z}}^k i, \tilde{\mathrm{Z}}^k r)$; beachte, daß $\tilde{\mathrm{Z}}^k r$ wegen Komposition epimorph ist.

Dual die Linksexaktheit der Sequenz $(\mathrm{Z}^{k+1} i, \mathrm{Z}^{k+1} r)$.

Abermals das Schlangenlemma, Lemma 136, liefert nun folgendes Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^k X' \arrow[r, "\mathrm{H}^k i"] \arrow[d, "\dot{h}^k_{X'}"'] & \mathrm{H}^k X \arrow[r, "\mathrm{H}^k r"] \arrow[d, "\dot{h}^k_{X}"'] & \mathrm{H}^k X'' \arrow[d, "\dot{h}^k_{X''}"] \arrow[dddll, dotted, bend left, "\partial^k_{(i,r)}"] \\
\tilde{\mathrm{Z}}^k X' \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k i"] \arrow[d, "\hat{d}^k_{X'}"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k r"] \arrow[d, "\hat{d}^k_{X}"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k X'' \arrow[d, "\hat{d}^k_{X''}"] \\
\mathrm{Z}^{k+1} X' \arrow[r, "\mathrm{Z}^{k+1} i"] \arrow[d, "\bar{h}^{k+1}_{X'}"'] & \mathrm{Z}^{k+1} X \arrow[r, "\mathrm{Z}^{k+1} r"] \arrow[d, "\bar{h}^{k+1}_{X}"'] & \mathrm{Z}^{k+1} X'' \arrow[d, "\bar{h}^{k+1}_{X''}"] \\
\mathrm{H}^{k+1} X' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1} i"] & \mathrm{H}^{k+1} X \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1} r"] & \mathrm{H}^{k+1} X''
\end{tikzcd}
$$

und zeigt folgendes

Lemma 145 (lang exakte Homologiesequenz)
Die Sequenz

$$
\cdots \xrightarrow{\mathrm{H}^{k-1} r} \mathrm{H}^{k-1} X'' \xrightarrow{\partial^{k-1}_{(i,r)}} \mathrm{H}^k X' \xrightarrow{\mathrm{H}^k i} \mathrm{H}^k X \xrightarrow{\mathrm{H}^k r} \mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k_{(i,r)}} \mathrm{H}^{k+1} X' \xrightarrow{\mathrm{H}^{k+1} i} \cdots
$$

ist lang exakt.

Sei nun ein Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y''
\end{tikzcd}
$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir erhalten folgendes kommutative Viereck von Sequenzen,

$$
\begin{tikzcd}
(\tilde{\mathrm{Z}}^k X',\, \tilde{\mathrm{Z}}^k X,\, \tilde{\mathrm{Z}}^k X'') \arrow[r, "(\hat{d}^k_{X'}\,,\, \hat{d}^k_{X}\,,\, \hat{d}^k_{X''})"] \arrow[d, "(\tilde{\mathrm{Z}}^k f',\, \tilde{\mathrm{Z}}^k f,\, \tilde{\mathrm{Z}}^k f'')"'] & (\mathrm{Z}^{k+1} X',\, \mathrm{Z}^{k+1} X,\, \mathrm{Z}^{k+1} X'') \arrow[d, "(\mathrm{Z}^{k+1} f',\, \mathrm{Z}^{k+1} f,\, \mathrm{Z}^{k+1} f'')"] \\
(\tilde{\mathrm{Z}}^k Y',\, \tilde{\mathrm{Z}}^k Y,\, \tilde{\mathrm{Z}}^k Y'') \arrow[r, "(\hat{d}^k_{Y'}\,,\, \hat{d}^k_{Y}\,,\, \hat{d}^k_{Y''})"] & (\mathrm{Z}^{k+1} Y',\, \mathrm{Z}^{k+1} Y,\, \mathrm{Z}^{k+1} Y'')\ ,
\end{tikzcd}
$$

die linken beiden rechts- und die rechten beiden linksexakt; cf. §5.4.2.

Bemerkung 146 *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathrm{H}^{k-1}r"] & \mathrm{H}^{k-1}X'' \arrow[r, "\partial^{k-1}_{(i,r)}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k-1}f''"'] & \mathrm{H}^k X' \arrow[r, "\mathrm{H}^k i"] \arrow[d, "\mathrm{H}^k f'"'] & \mathrm{H}^k X \arrow[r, "\mathrm{H}^k r"] \arrow[d, "\mathrm{H}^k f"'] & \mathrm{H}^k X'' \arrow[r, "\partial^{k}_{(i,r)}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^k f''"'] & \mathrm{H}^{k+1}X' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1}i"] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k+1}f'"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\mathrm{H}^{k-1}s"] & \mathrm{H}^{k-1}Y'' \arrow[r, "\partial^{k-1}_{(j,s)}"] & \mathrm{H}^k Y' \arrow[r, "\mathrm{H}^k j"] & \mathrm{H}^k Y \arrow[r, "\mathrm{H}^k s"] & \mathrm{H}^k Y'' \arrow[r, "\partial^{k}_{(j,s)}"] & \mathrm{H}^{k+1}Y' \arrow[r, "\mathrm{H}^{k+1}j"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Dies folgt aus Aufgabe 70 wegen $(\mathrm{H}^k f')\dot{h}^k_{Y'} = \dot{h}^k_{X'}(\tilde{\mathrm{Z}}^k f')$ etc. und $\bar{h}^{k+1}_{X'}(\mathrm{H}^{k+1}f') = (\mathrm{Z}^{k+1}f')\bar{h}^{k+1}_{Y'}$ etc. □

5.5 Auflösungsäquivalenz

Definition 147

(1) Sei die volle additive Teilkategorie $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ von $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ der *injektiven Auflösungen* definiert durch

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \;:=\; \{I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{K}(\mathcal{A}) \;:\; I^i = 0 \text{ für } i \leqslant -1,\ I^i \text{ injektiv für } i \geqslant 0,\ \mathrm{H}^i I \simeq 0 \text{ für } i \geqslant 1\}\,.$$

(1°) Sei die volle additive Teilkategorie $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})$ von $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ der *projektiven Auflösungen* definiert durch

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}) \;:=\; \{P \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{K}(\mathcal{A}) \;:\; P_i = 0 \text{ für } i \leqslant -1,\ P_i \text{ projektiv für } i \geqslant 0,\ \mathrm{H}_i P \simeq 0 \text{ für } i \geqslant 1\}\,.$$

Hierbei: res wie resolution, engl. für Auflösung.

Sei $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$. Wegen $\mathrm{H}^k I \simeq 0$ für $k \geqslant 1$ ist der Morphismus $\tilde{\mathrm{Z}}^{k-1}I \xrightarrow{\hat d} \mathrm{Z}^k I$ epimorph ist für $k = 1$ und ein Isomorphismus für $k \geqslant 2$; cf. §5.4.1. Also ist $(\mathrm{Z}^{k-1}I, I^{k-1}, \mathrm{Z}^k I)$ kurz exakt für $k \geqslant 1$. Ferner ist $(\mathrm{H}^0 I, \tilde{\mathrm{Z}}^0 I, \mathrm{Z}^1 I) = (\mathrm{H}^0 I, I^0, \mathrm{Z}^1 I)$ kurz exakt; beachte $\rho_{d_I^{-1}} = 1_{I^0}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \mathrm{H}^0 I \arrow[dr, "\dot h"] & & & \overbrace{\mathrm{H}^1 I}^{\simeq 0} \arrow[dr, "\dot h"] & & & \overbrace{\mathrm{H}^2 I}^{\simeq 0} \arrow[dr, "\dot h"] & & & \overbrace{\mathrm{H}^3 I}^{\simeq 0} \arrow[dr, "\dot h"] & & \\
 & 0 \arrow[r, "\hat d"] \arrow[d, equal, "\rho_d"'] & \mathrm{Z}^0 I \arrow[ur, "\bar h", "\sim"'] \arrow[dr, "\iota_d"] & & I^0 \arrow[r, two heads, "\hat d"] \arrow[dl, equal, "\rho_d"'] & \mathrm{Z}^1 I \arrow[ur, two heads, "\bar h"] \arrow[dr, "\iota_d"] & & \tilde{\mathrm{Z}}^1 I \arrow[r, "\hat d", "\sim"'] & \mathrm{Z}^2 I \arrow[ur, two heads, "\bar h"] \arrow[dr, "\iota_d"] & & \tilde{\mathrm{Z}}^2 I \arrow[r, "\hat d", "\sim"'] & \mathrm{Z}^3 I \arrow[ur, two heads, "\bar h"] \arrow[dr, "\iota_d"] & & \tilde{\mathrm{Z}}^3 I \arrow[r, "\hat d", "\sim"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[rr, "d"] & & I^0 \arrow[rrr, "d"] & & & I^1 \arrow[ur, two heads, "\rho_d"] \arrow[rrr, "d"] & & & I^2 \arrow[ur, two heads, "\rho_d"] \arrow[rrr, "d"] & & & I^3 \arrow[ur, two heads, "\rho_d"] \arrow[r, "d"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 148 *Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ azyklisch. Sei $J \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\operatorname{Inj} \mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Gebe es ein $\ell \in \mathbf{Z}$ mit $J^i = 0$ für alle $i < \ell$. Es ist $\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X, J) = 0$.*

Beweis. Sei $X \xrightarrow{f} J$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ einen Nullmorphismus repräsentiert. Ohne Einschränkung ist $\ell = 0$.

Da $(X^{-1}, X^0, \mathrm{Z}^1 X)$ rechtsexakt ist und da $df^0 = 0$, faktorisiert $(X^0 \xrightarrow{f^0} J^0) = (X^0 \xrightarrow{\rho_d \hat{d}} \mathrm{Z}^1 X \longrightarrow J^0)$. Da $\mathrm{Z}^1 X \xrightarrow{\iota_d} X^1$ monomorph und J^0 injektiv ist, faktorisiert weiter $(\mathrm{Z}^1 X \longrightarrow J^0) = (\mathrm{Z}^1 X \xrightarrow{\iota_d} X^1 \xrightarrow{h^1} J^0)$. Halten wir fest, daß $f^0 = \rho_d \hat{d}\, \iota_d\, h^1 = dh^1$.

Da $(X^0, X^1, \mathrm{Z}^2 X)$ rechtsexakt ist und da $d(f^1 - h^1 d) = df^1 - dh^1 d = f^0 d - f^0 d = 0$, faktorisiert $(X^1 \xrightarrow{f^1 - h^1 d} J^1) = (X^1 \xrightarrow{\rho_d \hat{d}} \mathrm{Z}^2 X \longrightarrow J^1)$. Da $\mathrm{Z}^2 X \xrightarrow{\iota_d} X^2$ monomorph und J^1 injektiv ist, faktorisiert weiter $(\mathrm{Z}^2 X \longrightarrow J^1) = (\mathrm{Z}^2 X \xrightarrow{\iota_d} X^2 \xrightarrow{h^2} J^1)$. Halten wir fest, daß $f^1 = h^1 d + \rho_d\, \hat{d}\, \iota_d\, h^2 = h^1 d + dh^2$.

Da $(X^1, X^2, \mathrm{Z}^3 X)$ rechtsexakt ist und da $d(f^2 - h^2 d) = df^2 - dh^2 d = f^1 d - f^1 d + h^1 dd = 0$, faktorisiert $(X^2 \xrightarrow{f^2 - h^2 d} J^2) = (X^2 \xrightarrow{\rho_d \hat{d}} \mathrm{Z}^3 X \longrightarrow J^2)$. Da $\mathrm{Z}^3 X \xrightarrow{\iota_d} X^3$ monomorph und J^2 injektiv ist, faktorisiert weiter $(\mathrm{Z}^3 X \longrightarrow J^2) = (\mathrm{Z}^3 X \xrightarrow{\iota_d} X^3 \xrightarrow{h^3} J^2)$. Halten wir fest, daß $f^2 = h^2 d + \rho_d\, \hat{d}\, \iota_d\, h^3 = h^2 d + dh^3$.

Usf.

$$\begin{tikzcd}
X^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & X^0 \arrow[r, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, "f^0"'] & \mathrm{Z}^1 X \arrow[r, "\iota_d"] \arrow[dl, dotted] & X^1 \arrow[r, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, "f^1"'] \arrow[dll, dotted, "h^1"] & \mathrm{Z}^2 X \arrow[r, "\iota_d"] \arrow[dl, dotted] & X^2 \arrow[r, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, "f^2"'] \arrow[dll, dotted, "h^2"] & \mathrm{Z}^3 X \arrow[r, "\iota_d"] \arrow[dl, dotted] & X^3 \arrow[r] \arrow[d, "f^3"'] \arrow[dll, dotted, "h^3"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & J^0 \arrow[rr, "d"'] & & J^1 \arrow[rr, "d"'] & & J^2 \arrow[rr, "d"'] & & J^3 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Mit $h^k := 0$ für $k \leqslant 0$ wird also $f^k = h^k d + dh^{k+1}$ für alle $k \in \mathbf{Z}$. Es zeigt nun Aufgabe 65.(1), daß f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ einen Nullmorphismus repräsentiert. □

Lemma 149 (Auflösungsäquivalenz) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Es ist*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A})}} & \mathcal{A} \\
(X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & (\mathrm{H}^0 X \xrightarrow{\mathrm{H}^0 f} \mathrm{H}^0 Y)
\end{array}$$

eine Äquivalenz.

Beweis.

Vorbemerkung. Seien $I,\ J \in \operatorname{Ob} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A})$. Sei $I \xrightarrow{g} J$ ein Morphismus von Komplexen, also ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A})$. Aus $(I^0 \xrightarrow{\rho} \tilde{\mathrm{Z}}^0 I) = (I = I)$, dito für J, folgt, daß $\tilde{\mathrm{Z}}^0 g = g^0$. Insbesondere ist $\mathrm{H}^0 g$ durch $(\mathrm{H}^0 g)\dot{h}^0_J = \dot{h}^0_I(\tilde{\mathrm{Z}}^0 g) = \dot{h}^0_I g^0$ charakterisiert. Ende der *Vorbemerkung.*

Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})}$ dicht, voll und treu ist; cf. Lemma 96.

Dicht. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ gegeben. Wähle eine kurz exakte Sequenz $X \rightarrowtail I^0 \twoheadrightarrow B^0$ mit I^0 injektiv. Wähle eine kurz exakte Sequenz $B^0 \rightarrowtail I^1 \twoheadrightarrow B^1$ mit I^1 injektiv. Usf. Sei $(I^k \xrightarrow{d} I^{k+1}) := (I^k \twoheadrightarrow B^k \rightarrowtail I^{k+1})$ für $k \geqslant 0$. Wir erhalten einen Komplex

$$I \;:=\; (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} I^2 \xrightarrow{d} \cdots)$$

Es ist I eine injektive Auflösung. Denn für $k \geqslant 1$ kann $\mathrm{Z}^k I \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} I^k$ isomorph durch $B^{k-1} \rightarrowtail I^k$, und $I^k \overset{\rho_d}{\twoheadrightarrow} \tilde{\mathrm{Z}}^k I$ isomorph durch $I^k \twoheadrightarrow B^k$ ersetzt werden; somit ergibt sich dort $(\mathrm{Z}^k I \xrightarrow{h^k_I} \tilde{\mathrm{Z}}^k I) = (\mathrm{Z}^k I \xrightarrow{\sim} B^{k-1} \rightarrowtail I^k \twoheadrightarrow B^k \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{Z}}^k I) = 0$ und mithin $\mathrm{H}^k I \simeq 0$. Ferner sind sowohl $(\mathrm{H}^0 I, I^0, I^1)$ als auch (X, I^0, I^1) linksexakt, und somit $\mathrm{H}^0 I \simeq X$.

Voll. Seien $I,\, J \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ und $\mathrm{H}^0 I \xrightarrow{f} \mathrm{H}^0 J$ gegeben. Wir haben ein $I \xrightarrow{g} J$ mit $f = \mathrm{H}^0 g$ zu konstruieren.

Da $\mathrm{H}^0 I \overset{\dot{h}^0_I}{\rightarrowtail} I^0$ monomorph ist und J^0 injektiv, gibt es eine Vervollständigung mit einem Morphismus $I^0 \xrightarrow{g^0} J^0$ zu einem kommutativen Viereck $(\mathrm{H}^0 I, I^0, \mathrm{H}^0 J, J^0)$. Mittels Bemerkung 124.(2) gibt es eine Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck $(I^0, \mathrm{Z}^1 I, J^0, \mathrm{Z}^1 J)$.

Da $\mathrm{Z}^1 I \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} I^1$ monomorph ist und J^1 injektiv, gibt es eine Vervollständigung mit einem Morphismus $I^1 \xrightarrow{g^1} J^1$ zu einem kommutativen Viereck $(\mathrm{Z}^1 I, I^1, \mathrm{Z}^1 J, J^1)$. Mittels Bemerkung 124.(2) gibt es eine Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck $(I^1, \mathrm{Z}^2 I, J^1, \mathrm{Z}^2 J)$.

Da $\mathrm{Z}^2 I \overset{\iota_d}{\rightarrowtail} I^2$ monomorph ist und J^2 injektiv, gibt es eine Vervollständigung mit einem Morphismus $I^2 \xrightarrow{g^2} J^2$ zu einem kommutativen Viereck $(\mathrm{Z}^2 I, I^2, \mathrm{Z}^2 J, J^2)$. Mittels Bemerkung 124.(2) gibt es eine Vervollständigung zu einem kommutativen Viereck $(I^2, \mathrm{Z}^3 I, J^2, \mathrm{Z}^3 J)$.

Usf.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0 I \arrow[r, tail, "\dot{h}^0_I"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, two heads, "\hat{d}"] \arrow[d, dotted, "g^0"'] & \mathrm{Z}^1 I \arrow[r, tail, "\iota_d"] \arrow[d, dotted] & I^1 \arrow[r, two heads, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, dotted, "g^1"'] & \mathrm{Z}^2 I \arrow[r, tail, "\iota_d"] \arrow[d, dotted] & I^2 \arrow[r, two heads, "\rho_d \hat{d}"] \arrow[d, dotted, "g^2"'] & \mathrm{Z}^3 I \arrow[r, tail, "\iota_d"] \arrow[d, dotted] & \cdots \\
\mathrm{H}^0 J \arrow[r, tail, "\dot{h}^0_J"'] & J^0 \arrow[r, two heads, "\hat{d}"'] & \mathrm{Z}^1 J \arrow[r, tail, "\iota_d"'] & J^1 \arrow[r, two heads, "\rho_d \hat{d}"'] & \mathrm{Z}^2 J \arrow[r, tail, "\iota_d"'] & J^2 \arrow[r, two heads, "\rho_d \hat{d}"'] & \mathrm{Z}^3 J \arrow[r, tail, "\iota_d"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Vorbemerkung folgt $(\mathrm{H}^0 g)\dot{h}^0_J = \dot{h}^0_I g^0 = f\dot{h}^0_J$ und also $\mathrm{H}^0 g = f$. Somit repräsentiert g ein Urbild von f unter $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})}$.

Treu. Dank der Additivität von H^0 aus Aufgabe 71.(2) genügt es zu zeigen, daß für einen Repräsentanten $I \xrightarrow{g} J$ eines Morphismus in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ mit $\mathrm{H}^0 g = 0$ bereits g einen Nullmorphismus repräsentiert; cf. Bemerkung 111.

Nach Vorbemerkung ist $\dot{h}_I^0 g^0 = (\mathrm{H}^0 g)\dot{h}_J^0 = 0$. Also faktorisiert g in folgende Morphismen in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0 I \arrow[r, "\dot{h}_I^0"] \arrow[d] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^0"'] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^1"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & J^0 \arrow[r, "d"] & J^1 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist der mittlere Komplex azyklisch wegen $(\mathrm{H}^0 I, I^0, \mathrm{Z}^0 I)$ kurz exakt und $(\mathrm{Z}^{k-1} I, I^{k-1}, \mathrm{Z}^k I)$ kurz exakt für $k \geqslant 1$.

Dank Bemerkung 148 repräsentiert zweiterer einen Nullmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. Also repräsentiert auch g einen Nullmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, und somit auch in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$. □

Ohne den Übergang zur Homotopiekategorie hätte man Treuheit nicht zeigen können.

Definition 150

(1) Hat $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so wählen wir einen Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})$ mit $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})} \circ \mathrm{IRes} \simeq \mathrm{id}$ und $\mathrm{IRes} \circ \mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})} \simeq \mathrm{id}$, was dank Lemma 149 möglich ist.

Als Äquivalenz ist IRes additiv; cf. Aufgabe 66.(2, 4).

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreiben wir dann auch $(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A})) := (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{A}))$.

(1°) Hat $\mathcal{A}$ genügend Projektive, so wählen wir einen Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})$ mit $\mathrm{H}_0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})} \circ \mathrm{PRes} \simeq \mathrm{id}$ und $\mathrm{PRes} \circ \mathrm{H}_0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})} \simeq \mathrm{id}$, was dank Lemma 149° möglich ist.

Als Äquivalenz ist PRes additiv; cf. Aufgabe 66.(2, 4).

Unter Mißbrauch der Bezeichnung schreiben wir dann auch $(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A})) := (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}(\mathcal{A}))$.

Um $\mathrm{IRes}\,X$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie zu berechnen, verwenden wir folgende Bemerkung, sowie die Argumente in Lemma 149 für die Dichtheit und die Vollheit.

Bemerkung 151 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.*

(1) *Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $I \in \operatorname{Ob}\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

   (i) *Es ist $I \simeq \operatorname{IRes} X$ in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$.*

   (ii) *Es ist $\mathrm{H}^0 I \simeq X$ in $\mathcal{A}$.*

   (iii) *Es gibt eine linksexakte Sequenz $X \mathrel{-\!\!\bullet\!\!\to} I^0 \xrightarrow{d} I^1$.*

   Diesenfalls heißt I eine injektive Auflösung von X .

(2) *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Sei $I \xrightarrow{g} J$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

   (i) *Es ist $(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$ als Diagramme in $\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})$ ([4]).*

   (ii) *Es ist $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $(X \xrightarrow{f} Y)$ als Diagramme in $\mathcal{A}$ ([4]).*

   (iii) *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^0"'] & I^1 \arrow[d, "g^1"'] \\ Y \arrow[r, "\bullet" marking] & J^0 \arrow[r, "d"] & J^1 \end{tikzcd}$$

   mit (X, I^0, I^1) und (Y, J^0, J^1) linksexakt.

   Diesenfalls heißt $(I \xrightarrow{g} J)$ eine injektive Auflösung von $(X \xrightarrow{f} Y)$.

Cf. auch Bem. 90. Dual hierzu die Begriffe der *projektiven Auflösung von* Objekten und Morphismen.

Beweis. Es kann (1) als der Spezialfall von (2) mit $f = \mathrm{id}$ und $g = \mathrm{id}$ angesehen werden.

Zu (2).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$. Dann ist $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$, was wiederum isomorph zu $(X \xrightarrow{f} Y)$ ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph ist zu $(X \xrightarrow{f} Y)$. Dann ist $\operatorname{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$ isomorph zu $\operatorname{IRes}\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$, was wiederum isomorph zu $(I \xrightarrow{g} J)$ ist.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). ([5]). Es ist $\mathrm{H}^0(I \xrightarrow{g} J)$ isomorph zu $\mathrm{Z}^0(I \xrightarrow{g} J)$, also zu einem Kern von $(I^0 \xrightarrow{g^0} J^0) \longrightarrow (I^1 \xrightarrow{g^1} J^1)$. Und es gibt eine linksexakte Sequenz $(X \xrightarrow{f} Y) \mathrel{-\!\!\bullet\!\!\to} (I^0 \xrightarrow{g^0} J^0) \longrightarrow (I^1 \xrightarrow{g^1} J^1)$ genau dann, wenn $(X \xrightarrow{f} Y)$ isomorph zu $\mathrm{Z}^0(I \xrightarrow{g} J)$ ist. □

[4]I.e. in $[\![\Delta_1\, , \mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj}\mathcal{A})]\!]$ resp. in $[\![\Delta_1\, , \mathcal{A}]\!]$, wobei $\Delta_1 = \{0,1\}^{\mathrm{k}}$; cf. Aufgabe 42.(1); vulgo, es gibt ein kommutatives Viereck mit den beiden in Frage stehenden Morphismen horizontal und zwei Isomorphismen vertikal.

[5]Wir argumentieren in der abelschen Kategorie $[\![\Delta_1\, , \mathcal{A}]\!]$; cf. Aufgabe 57.(2).

Beispiel 152 Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/16$-mod ; cf. Aufgabe 64. Es ist

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \cdots \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/4$, da wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] \arrow[d, "2"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "1"'] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/16
\end{tikzcd}$$

mit linksexakten Zeilen haben.

5.6 Hufeisenlemma

Eine kurz exakte Sequenz $U' \xrightarrow{m} U \xrightarrow{p} U''$ in $\mathcal{A}$ ist split kurz exakt, falls m eine Coretraktion ist, oder, äquivalent hierzu, falls p eine Retraktion ist, oder, äquivalent hierzu, falls die Sequenz $U' \xrightarrow{m} U \xrightarrow{p} U''$ isomorph ist zur *Standardsequenz* $U' \xrightarrow{(1\,0)} U' \oplus U'' \xrightarrow{\binom{0}{1}} U''$ mittels eines Isomorphismus der Form $(1_{U'}\,,\, a\,,\, 1_{U''})$; cf. Beispiel 126, Aufgabe 58.(2).

Eine Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ heißt *punktweise split kurz exakt,* falls die Sequenz (i^k, r^k) split kurz exakt ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Diesenfalls heißt i auch *punktweise split monomorph* und r *punktweise split epimorph.*

Eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ist nicht notwendig split kurz exakt in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, wie das Beispiel

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & V \arrow[d] \\
V \arrow[r, equal] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

für ein $V \not\cong 0$ in $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ zeigt; vertikal durch Nullen ergänzt zu denken. In der Tat ist der linke Morphismus keine Coretraktion.

Punktweises isomorphes Ersetzen der Objekte des mittleren Komplexes zeigt, daß eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ isomorph ist zu einer, in welcher (i^k, r^k) eine Standardsequenz ist für alle $k \in \mathbf{Z}$.

Lemma 153 (Hufeisenlemma) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.*

Sei $X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$.

Sei I' eine injektive Auflösung von X'. Sei $X' \overset{e'}{\rightarrowtail} I'^0 \xrightarrow{d} I'^1$ linksexakt gewählt.

Sei I'' eine injektive Auflösung von X''. Sei $X'' \overset{e''}{\rightarrowtail} I''^0 \xrightarrow{d} I''^1$ linksexakt gewählt.

Es gibt eine punktweise split kurz exakte Sequenz $I' \overset{j}{\rightarrowtail} I \overset{s}{\twoheadrightarrow} I''$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ mit einer weiteren injektiven Auflösung I und einer linksexakten Sequenz $X \overset{e}{\rightarrowtail} I^0 \xrightarrow{d} I^1$ so, daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, tail, "i"'] & I'^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, tail, "j^0"] & I'^1 \arrow[d, tail, "j^1"] \\
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, two heads, "r"'] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, two heads, "s^0"] & I^1 \arrow[d, two heads, "s^1"] \\
X'' \arrow[r, "e''"] & I''^0 \arrow[r, "d"] & I''^1
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{H}^0(I' \overset{j}{\rightarrowtail} I \overset{s}{\twoheadrightarrow} I'') \;\simeq\; (X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X'')$$

als Diagramme in $\mathcal{A}$ und also

$$(I' \overset{j}{\rightarrowtail} I \overset{s}{\twoheadrightarrow} I'') \;\simeq\; \mathrm{IRes}(X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X'')\,.$$

als Diagramme in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Genauer, es gibt eindeutige Morphismen $X' \xrightarrow[\sim]{\varphi'} \mathrm{H}^0 I'$ mit $\varphi' \cdot \dot{h}^0_{I'} = e'$, $X \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathrm{H}^0 I$ mit $\varphi \cdot \dot{h}^0_I = e$ und $X'' \xrightarrow[\sim]{\varphi''} \mathrm{H}^0 I''$ mit $\varphi'' \cdot \dot{h}^0_{I''} = e''$. Es kommutiert folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0 I' \arrow[r, "\mathrm{H}^0 j"] & \mathrm{H}^0 I \arrow[r, "\mathrm{H}^0 s"] & \mathrm{H}^0 I'' \\
X' \arrow[r, "i"] \arrow[u, "\varphi'", "\wr"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[u, "\varphi", "\wr"'] & X'' \arrow[u, "\varphi''", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Eine solche Sequenz $I' \overset{j}{\rightarrowtail} I \overset{s}{\twoheadrightarrow} I''$ heißt auch injektive Hufeisenauflösung *von $X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X''$ bezüglich φ' und φ''.*

Dual der Begriff einer *projektiven Hufeisenauflösung* einer kurz exakten Sequenz in $\mathcal{A}$.

Beweis. Schreibe $\hat{I}'$ für den aus I' durch Ersetzung von $0 \longrightarrow I'^0$ durch $X' \overset{e'}{\rightarrowtail} I'^0$ entstehenden Komplex. Es ist $\hat{I}'$ azyklisch, da $\mathrm{H}^k \hat{I}' = \mathrm{H}^k I' \simeq 0$ für $k \geqslant 1$, da

$$(\mathrm{Z}^0 \hat{I}' \xrightarrow{\bar{h}^0_{\hat{I}'}} \tilde{\mathrm{Z}}^0 \hat{I}') \;=\; (\mathrm{Z}^0 \hat{I}' \xrightarrow{\sim} X \overset{e'}{\rightarrowtail} I'^0 \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} \tilde{\mathrm{Z}}^0 \hat{I}') \;=\; 0$$

und da $\mathrm{H}^{-1} \hat{I}' \simeq 0$ wegen e' monomorph.

Schreibe $\hat{I}''$ für den aus I'' durch Ersetzung von $0 \longrightarrow I''^0$ durch $X'' \xrightarrow{e''} I''^0$ entstehenden Komplex. Es ist $\hat{I}''$ azyklisch.

Wir konstruieren untenstehende Sequenz von Komplexen, wobei die Komplexe horizontal dargestellt werden und nach links durch Nullen ergänzt zu denken sind. Der obere Komplex ist $\hat{I}'$, der untere $\hat{I}''$. Vertikal werden Standardsequenzen eingetragen.

Wir wollen Differentiale für den mittleren Komplex konstruieren.

Sei hierzu $\hat{e}'$ gewählt mit $i\hat{e}' = e'$, möglich wegen i monomorph und I'^0 injektiv. Trage $\begin{pmatrix} \hat{e}' & re'' \end{pmatrix} : X \longrightarrow I'^0 \oplus I''^0$ ein. Setze die Differentiale des mittleren Komplexes als von der Form $d = \begin{pmatrix} d & 0 \\ w^k & d \end{pmatrix} : I'^k \oplus I''^k \longrightarrow I'^{k+1} \oplus I''^{k+1}$ an für $k \geqslant 0$. Dann kommutieren alle Vierecke im untenstehenden Diagramm, unabhängig von der noch zu erfolgenden Wahl der w^k.

Es muß nun $w^0 : I''^0 \longrightarrow I'^1$ so gewählt werden, daß $\begin{pmatrix} \hat{e}' & re'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ w^0 & d \end{pmatrix} = 0$ ist, i.e. daß $\hat{e}'d + re''w^0 = 0$. Da $i(-\hat{e}'d) = -e'd = 0$, gibt es ein $v^0 : X'' \longrightarrow I'^1$ mit $rv^0 = -\hat{e}'d$. Da e'' monomorph und I'^1 injektiv ist, gibt es ein $w^0 : I''^0 \longrightarrow I'^1$ mit $e''w^0 = v^0$. Es folgt $re''w^0 = rv^0 = -\hat{e}'d$, wie gewünscht.

Es muß nun $w^1 : I''^1 \longrightarrow I'^2$ so gewählt werden, daß $\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ w^1 & d \end{pmatrix} = 0$ ist, i.e. daß $w^0 d + dw^1 = 0$. Da $re''(-w^0 d) = \hat{e}'dd = 0$ und da $(re'', \bar{d})$ rechtsexakt ist, gibt es ein v^1 mit $\bar{d}v^1 = -w^0 d$. Da $\dot{d}$ monomorph und I'^2 injektiv ist, können wir $v^1 = \dot{d}w^1$ faktorisieren. Insgesamt ergibt sich also $dw^1 = \bar{d}\dot{d}w^1 = \bar{d}v^1 = -w^0 d$, wie gewünscht.

Es muß nun $w^2 : I''^2 \longrightarrow I'^3$ so gewählt werden, daß $\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ w^2 & d \end{pmatrix} = 0$ ist, i.e. daß $w^1 d + dw^2 = 0$. Da $d(-w^1 d) = w^0 dd = 0$ und da $(d, \bar{d})$ rechtsexakt ist, gibt es ein v^2 mit $\bar{d}v^2 = -w^1 d$. Da $\dot{d}$ monomorph und I'^3 injektiv ist, können wir $v^2 = \dot{d}w^2$ faktorisieren. Insgesamt ergibt sich also $dw^2 = \bar{d}\dot{d}w^2 = \bar{d}v^2 = -w^1 d$, wie gewünscht.

Wie im letzten Schritt kann man fortsetzen.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "i"'] & I'^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & I'^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & I'^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & I'^3 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & \cdots \\
X \arrow[r, "\begin{pmatrix} \hat{e}' & re'' \end{pmatrix}"] \arrow[d, "r"'] & I'^0 \oplus I''^0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^0 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & I'^1 \oplus I''^1 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^1 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & I'^2 \oplus I''^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^2 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & I'^3 \oplus I''^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^3 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & \cdots \\
X'' \arrow[r, "e''"] & I''^0 \arrow[r, "d"] & I''^1 \arrow[r, "d"] & I''^2 \arrow[r, "d"] & I''^3 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Da nun $\hat{I}'$ und $\hat{I}''$ azyklisch sind und die vertikal dargestellte Sequenz von Komplexen kurz exakt ist, folgt die Azyklizität des mittleren Komplexes; cf. Aufgabe 72.(1). Insbesondere wird aus diesem nach Ersetzen von X durch 0 eine injektive Auflösung, und es ist $(X, I'^0 \oplus I''^0, I'^1 \oplus I''^1)$ linksexakt.

Schreibe $e := \begin{pmatrix} \hat{e}' & re'' \end{pmatrix}$. Es sind $(X', X, X'') \xrightarrow{(e', e, e'')} (I'^0, I^0, I''^0) \xrightarrow{(d,d,d)} (I'^1, I^1, I''^1)$ und $(\mathrm{H}^0 I', \mathrm{H}^0 I, \mathrm{H}^0 I'') \xrightarrow{(\dot{h}^0_{I'}, \dot{h}^0_{I}, \dot{h}^0_{I''})} (I'^0, I^0, I''^0) \xrightarrow{(d,d,d)} (I'^1, I^1, I''^1)$ beide linksexakt. Also faktorisiert (e', e, e'') mittels eines Isomorphismus über $(\dot{h}^0_{I'}, \dot{h}^0_I, \dot{h}^0_{I''})$, und diese Faktorisierung ist notwendigerweise von der Form

$$(e', e, e'') = (\varphi', \varphi, \varphi'')(\dot{h}^0_{I'}, \dot{h}^0_I, \dot{h}^0_{I''})$$

mit den gegebenen Isomorphismen φ' und φ''. □

Der Name "Hufeisenlemma" rührt von der Form des zu vervollständigenden Diagramms aus der gegebenen kurz exakten Sequenz (X', X, X'') und den gegebenen beiden injektiven Auflösungen I', I'' her.

Kapitel 6

Abgeleitete Funktoren

6.1 Abgeleitete Funktoren in einer Variablen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

6.1.1 Definition

Definition 154 Sei $k \in \mathbf{Z}$.

(1) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei der *k-te rechtsabgeleitete Funktor* von F definiert als Kompositum

$$(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{R}^k F} \mathcal{B}) \;:=\; (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{IRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k} \mathcal{B})\ .$$

Es ist $\mathrm{R}^k F$ additiv; cf. Definition 150.(1), §5.3, Bemerkung 144, Beispiel 113.(5).

Ist $k \leqslant -1$, so ist $\mathrm{R}^k F \simeq 0$.

(1°) Habe $\mathcal{A}$ genügend Projektive. Sei der *k-te linksabgeleitete Funktor* von F definiert als Kompositum

$$(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{L}_k F} \mathcal{B}) \;:=\; (\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{PRes}} \mathrm{K}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{K}(F)} \mathrm{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}_k} \mathcal{B})\ .$$

Es ist $\mathrm{L}_k F$ additiv; cf. Definition 150.(1°), §5.3, Bemerkung 144, Beispiel 113.(5).

Ist $k \leqslant -1$, so ist $\mathrm{L}_k F \simeq 0$.

Bemerkung 155 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.

(1) Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Um $(\mathrm{R}^k F)X$ bis auf Isomorphie zu berechnen, kann man wie folgt verfahren. Bestimme eine injektive Auflösung I von X; dann ist $I \simeq \mathrm{IRes}\,X$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$; cf. Bemerkung 151.(1). Es folgt, in $\mathcal{B}$,

$$(\mathrm{R}^k F)X \;=\; \mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X \;\simeq\; \mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)I\ .$$

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Um $(\mathrm{R}^k F)(X \xrightarrow{f} Y)$ bis auf Isomorphie zu berechnen, kann man wie folgt verfahren. Bestimme eine injektive Auflösung $(I \xrightarrow{g} J)$ von $(X \xrightarrow{f} Y)$; dann ist $(I \xrightarrow{g} J) \simeq \mathrm{IRes}(X \xrightarrow{f} Y)$ als Diagramme in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$; cf. Bemerkung 151.(2). Es folgt, als Diagramme in $\mathcal{B}$,

$$(\mathrm{R}^k F)(X \xrightarrow{f} Y) \;=\; \mathrm{H}^k \mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}(X \xrightarrow{f} Y) \;\simeq\; \mathrm{H}^k \mathrm{K}(F)(I \xrightarrow{g} J)\ .$$

Definition 156 (Ext**, provisorisch)** Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.

Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,-) \;:=\; \mathrm{R}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-) \;=\; \mathrm{R}^k\;{}_{\mathcal{A}}(X,-) \;:\; \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}\ .$$

Ist R ein Ring und $\mathcal{A} = R$-Mod, so schreiben wir auch $\mathrm{Ext}^k_R(X,-) := \mathrm{Ext}^k_{R\text{-Mod}}(X,-)$.

Ext wie Extension, engl. für Erweiterung; cf. §7.1.5 unten.

Definition 157 (Tor**, provisorisch)**
Sei R ein Ring. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}\text{-}R$. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Tor}^R_k(X,-) \;:=\; \mathrm{L}_k(X \underset{R}{\otimes} -) \;:\; R\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}\ .$$

Tor wie Torsion.

Diese Definitionen sind provisorisch, da $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,=)$ und $- \underset{R}{\otimes} =$ Funktoren in zwei Variablen sind und nicht einzusehen ist, warum ausgerechnet in der zweiten Variablen abzuleiten sein soll. Siehe Definition 171 und Beispiel 181 unten.

Beispiel 158 Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/16$-mod. Sei $\mathcal{B} = \mathbf{Z}$-Mod. Wir setzen Beispiel 152 fort und wollen den Morphismus

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/8) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,1)} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/4)$$

berechnen, i.e. wir wollen ihn isomorph durch einen in Standardform ersetzen.

Wenden wir ${}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,-)$ auf die injektive Auflösung

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{8} & \mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{8} & \mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{2} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle 2} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 2} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
\mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{4} & \mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{4} & \mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{4} & \mathbf{Z}/16 & \xrightarrow{4} & \cdots
\end{array}$$

von $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/4$ aus loc. cit. an und ersetzen isomorph, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{8} & \mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{8} & \mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{2} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle 2} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 2} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
\mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{4} & \mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{4} & \mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{4} & \mathbf{Z}/8 & \xrightarrow{4} & \cdots\ .
\end{array}$$

Beachte hierzu, daß $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\sim} {}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/16)$, $z \longmapsto (1 \longmapsto 2z)$. Für $w \in \mathbf{Z}$ kommutiert damit

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "\wr"'] \\
{}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/16) \arrow[r, "{}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, w)"] & {}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/16)\,.
\end{tikzcd}$$

Auf diesen Morphismus von Komplexen ist nun H^2 anzuwenden. Bis auf Isomorphie erhalten wir auf Z^2 und $\tilde{\mathrm{Z}}^2$ folgendes.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Z}/8 \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "1"] & & \mathbf{Z}/2 \arrow[dd, "2"] & \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[rr, "2"] \arrow[dd, "1"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "8"] \arrow[dd, "2"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[dd, "1"] \\
 & \mathbf{Z}/4 \arrow[dr, "2"] & & \mathbf{Z}/4 & \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[rr, "4"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "4"] & & \mathbf{Z}/8
\end{tikzcd}$$

Bis auf Isomorphie ergibt sich also auf H^2 folgendes.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/4
\end{tikzcd}$$

Also ist

$$\Big(\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/8) \xrightarrow{\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,1)} \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/4)\Big) \;\simeq\; (\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2)\,.$$

6.1.2 Eigenschaften

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive.

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

Wähle $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{IRes}$.

6.1.2.1 Der nullte Rechtsabgeleitete

Definition 159 Setze

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{Konz}} & \mathrm{C}(\mathcal{A}) \\ \left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array}\right) & \longmapsto & \left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}\right) \end{array},$$

wobei der Eintrag f an Position 0 sitze. Es ist $\operatorname{Konz} X$ der Komplex mit Eintrag X *konzentriert* an Position 0.

Wir schreiben mißbräuchlich auch $(\mathcal{A} \xrightarrow{\text{Konz}} \mathrm{K}(\mathcal{A})) := (\mathcal{A} \xrightarrow{\text{Konz}} \mathrm{C}(\mathcal{A}) \xrightarrow{R} \mathrm{K}(\mathcal{A}))$.

Es ist $\mathrm{H}^0 \circ \mathrm{K}(F) \circ \operatorname{Konz} = F$.

Definition 160 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ definieren wir den Morphismus von Komplexen

$$\operatorname{Konz} X \xrightarrow{eX} \operatorname{IRes} X$$

durch die Setzung

$$\big((\operatorname{Konz} X)^0 \xrightarrow{(eX)^0} (\operatorname{IRes} X)^0\big) \;:=\; \big(X \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha X}} \mathrm{H}^0(\operatorname{IRes} X) \xrightarrow{\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X}} (\operatorname{IRes} X)^0\big)$$

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Werde $\operatorname{IRes} f$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ von g in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ repräsentiert. Insbesondere ist $\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} f = \mathrm{H}^0 g$. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha X", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} X \arrow[r, "\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} f"'] & (\operatorname{IRes} X)^0 \arrow[d, "g^0"] \\ Y \arrow[r, "\alpha Y", "\sim"'] & \mathrm{H}^0 \operatorname{IRes} Y \arrow[r, "\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} Y}"] & (\operatorname{IRes} Y)^0 \end{tikzcd},$$

in $\mathcal{A}$, und folglich das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Konz} X \arrow[r, "eX"] \arrow[d, "\operatorname{Konz} f"'] & \operatorname{IRes} X \arrow[d, "\operatorname{IRes} f"] \\ \operatorname{Konz} Y \arrow[r, "eY"] & \operatorname{IRes} Y \end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, das zeigt, daß $e := (eX)_{X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}}$ eine Transformation von Konz nach IRes ist.

Da $(\dot{h}^0_{\operatorname{IRes} X}, d)$ linksexakt ist, ist auch $((eX)^0, d)$ linksexakt; cf. Vorbemerkung zum Beweis von Lemma 149.

Bemerkung 161 *Sei* $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. *Sei* $Y \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ *mit* $Y^k = 0$ *für* $k \leqslant -1$.
Sei $\operatorname{Konz} X \xrightarrow{s} Y$ *in* $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ *gegeben.*

Es ist $\mathrm{H}^0 s$ *genau dann ein Isomorphismus, wenn* $X \xrightarrow{s^0} Y^0 \xrightarrow{d} Y^1$ *linksexakt ist.*

Beweis. Es ist $(Y^0 \xrightarrow{\rho} \tilde{\mathrm{Z}}^0 Y) = (Y^0 = Y^0)$ und also $\mathrm{H}^0 Y \xrightarrow{\dot{h}^0_Y} Y^0 \xrightarrow{d} Y^1$ linksexakt. Nun ist $\dot{h}^0_{\mathrm{Konz}\,X} = 1_X$ und $\tilde{\mathrm{Z}}^0 s = s^0$. Es folgt $(\mathrm{H}^0 s)\dot{h}^0_Y = \dot{h}^0_{\mathrm{Konz}\,X}(\tilde{\mathrm{Z}}^0 s) = s^0$. Somit ist $\mathrm{H}^0 s$ ein Isomorphismus genau dann, wenn auch $X \xrightarrow{s^0} Y^0 \xrightarrow{d} Y^1$ linksexakt ist. ▫

Bemerkung 162 *Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Es ist $\mathrm{H}^0(eX)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Da $((eX)^0, d)$ linksexakt ist, folgt dies mit Bemerkung 161. ▫

Definition 163 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Wir erhalten eine Transformation ε von F nach $\mathrm{R}^0 F$ vermöge

$$\big(FX \xrightarrow{\varepsilon X} (\mathrm{R}^0 F)X\big) \;:=\; \big(FX = \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{Konz}\,X \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)(eX)} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X = (\mathrm{R}^0 F)X\big)$$

für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Aus der Natürlichkeit von e folgt die Natürlichkeit von ε.

Bemerkung 164 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Ist F linksexakt, so ist $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{R}^0 F$ eine Isotransformation.*

Beweis. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Es ist zu zeigen, daß $\varepsilon X = \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)(eX)$ ein Isomorphismus ist. Gemäß Bemerkung 161 genügt es zu zeigen, daß $FX \xrightarrow{F(eX)^0} F(\mathrm{IRes}\,I)^0 \xrightarrow{Fd} F(\mathrm{IRes}\,I)^1$ linksexakt ist. Dies folgt aber aus der Linksexaktheit von $((eX)^0, d)$, da F linksexakte Sequenzen in ebensolche überführt. ▫

6.1.2.2 Die lang exakte Sequenz

Lemma 165 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Weiterhin ist $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ additiv.*

Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz. Wir können die folgende lang exakte $\mathrm{R}^* F$-Sequenz *konstruieren.*

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow (\mathrm{R}^0 F)X' \xrightarrow{(\mathrm{R}^0 F)i} (\mathrm{R}^0 F)X \xrightarrow{(\mathrm{R}^0 F)r} (\mathrm{R}^0 F)X'' \xrightarrow{\delta^0_{(i,r);F}} \\
\phantom{0 \longrightarrow{}} (\mathrm{R}^1 F)X' \xrightarrow{(\mathrm{R}^1 F)i} (\mathrm{R}^1 F)X \xrightarrow{(\mathrm{R}^1 F)r} (\mathrm{R}^1 F)X'' \xrightarrow{\delta^1_{(i,r);F}} \\
\phantom{0 \longrightarrow{}} (\mathrm{R}^2 F)X' \xrightarrow{(\mathrm{R}^2 F)i} (\mathrm{R}^2 F)X \xrightarrow{(\mathrm{R}^2 F)r} \cdots
\end{array}$$

Beweis. Sei $\mathrm{IRes}\,X' \overset{j}{\rightarrowtail} I \overset{s}{\twoheadrightarrow} \mathrm{IRes}\,X''$ eine injektive Hufeisenauflösung von $X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X''$ bezüglich $\alpha X'$ und $\alpha X''$; für ein $X \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathrm{H}^0 I$ kommutiert folgendes Diagramm in $\mathcal{A}$; cf. Lemma 153.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0\,\mathrm{IRes}\,X' \arrow[r, "\mathrm{H}^0 j"] & \mathrm{H}^0 I \arrow[r, "\mathrm{H}^0 s"] & \mathrm{H}^0\,\mathrm{IRes}\,X'' \\
X' \arrow[r, "i"] \arrow[u, "\alpha X'", "\wr"'] \arrow[d, "\alpha X'"', "\wr"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[u, "\varphi", "\wr"'] \arrow[d, "\alpha X"', "\wr"] & X'' \arrow[u, "\alpha X''", "\wr"'] \arrow[d, "\alpha X''"', "\wr"] \\
\mathrm{H}^0\,\mathrm{IRes}\,X' \arrow[r, "\mathrm{H}^0\,\mathrm{IRes}\,i"] & \mathrm{H}^0\,\mathrm{IRes}\,X \arrow[r, "\mathrm{H}^0\,\mathrm{IRes}\,r"] & \mathrm{H}^0\,\mathrm{IRes}\,X''
\end{tikzcd}$$

Da $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})}$ eine Äquivalenz ist, gibt es einen Morphismus von Komplexen $I \xrightarrow{\psi} \mathrm{IRes}\,X$ mit $\mathrm{H}^0\psi = \varphi^{-1}(\alpha X)$. Dieser repräsentiert einen gleichnamigen Isomorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, welcher in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{IRes}\,X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\psi"', "\wr"] & \mathrm{IRes}\,X'' \arrow[d, equal] \\
\mathrm{IRes}\,X' \arrow[r, "\mathrm{IRes}\,i"] & \mathrm{IRes}\,X \arrow[r, "\mathrm{IRes}\,r"] & \mathrm{IRes}\,X'' .
\end{tikzcd}$$

in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ paßt, wie eine Anwendung der Äquivalenz $\mathrm{H}^0|_{\mathrm{K}^{\mathrm{res}}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})}$ und ein Abgleich mit vorigem Diagramm zeigt.

Beachte, daß $\mathrm{K}(F)\psi$ in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$ ebenfalls ein Isomorphismus ist. Also ist auch $\mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\psi$ ein Isomorphismus in $\mathcal{B}$ für $k \geqslant 0$.

Da F additiv ist und $\mathrm{IRes}\,X' \overset{j}{\rightarrowtail} I \overset{s}{\twoheadrightarrow} \mathrm{IRes}\,X''$ punktweise split kurz exakt, ist $\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \overset{\mathrm{C}(F)j}{\rightarrowtail} \mathrm{C}(F)I \overset{\mathrm{C}(F)s}{\twoheadrightarrow} \mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X''$ eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{B})$, insbesondere also kurz exakt; cf. Bemerkung 112, Aufgabe 58.(1). Darauf H^k für $k \geqslant 0$ angewandt, erhalten wir mit Lemma 145 die lang exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)j} \mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)I \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)s} \mathrm{H}^0\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X'' \xrightarrow{\partial^0_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}} \mathrm{H}^1\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \to \cdots ,$$

was dasselbe ist wie

$$0 \to \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)j} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)I \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)s} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X'' \xrightarrow{\partial^0_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}} \mathrm{H}^1\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \to \cdots ,$$

und also, durch isomorphe Ersetzung entlang $\mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\psi$ mit dem jeweiligen $k \geqslant 0$, und mit

$$\delta^k_{(i,r);F} \;:=\; \partial^k_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}$$

für $k \geqslant 0$, die lang exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,i} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X \xrightarrow{\mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,r} \mathrm{H}^0\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X'' \xrightarrow{\delta^0_{(i,r);F}} \mathrm{H}^1\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \to \cdots ,$$

was nur andere Bezeichnungen für unsere gesuchte Sequenz

$$0 \to (\mathrm{R}^0F)X' \xrightarrow{(\mathrm{R}^0F)i} (\mathrm{R}^0F)X \xrightarrow{(\mathrm{R}^0F)r} (\mathrm{R}^0F)X'' \xrightarrow{\delta^0_{(i,r);F}} (\mathrm{R}^1F)X' \to \cdots$$

sind. $\square$

Satz 166 *Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$.*

(1) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ linksexakt. Wir haben die Isotransformation $F \underset{\sim}{\xrightarrow{\varepsilon}} \mathrm{R}^0 F$ aus Bemerkung 164.*

Wir erhalten die lang exakte Sequenz

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FX' \arrow[r, "Fi"] & FX \arrow[r, "Fr"] & FX'' \arrow[dll, dotted, "(\varepsilon X'')\delta^0_{(i,r);F}"] \\
 & (\mathrm{R}^1F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^1F)i"] & (\mathrm{R}^1F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^1F)r"] & (\mathrm{R}^1F)X'' \arrow[dll, dotted, "\delta^1_{(i,r);F}"] \\
 & (\mathrm{R}^2F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^2F)i"] & (\mathrm{R}^2F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^2F)r"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

(1°) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Projektive. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ rechtsexakt. Wir haben eine Isotransformation $F \underset{\sim}{\xleftarrow{\varepsilon'}} \mathrm{L}_0 F$ aus Bemerkung 164°.*

Wir erhalten die lang exakte Sequenz

$$
\begin{tikzcd}
0 & FX'' \arrow[l] & FX \arrow[l, "Fr"'] & FX' \arrow[l, "Fi"'] \\
 & (\mathrm{L}_1F)X'' \arrow[urr, dotted, "\delta_0^{(i,r);F}(\varepsilon' X')"] & (\mathrm{L}_1F)X \arrow[l, "(\mathrm{L}_1F)r"'] & (\mathrm{L}_1F)X' \arrow[l, "(\mathrm{L}_1F)i"'] \\
 & (\mathrm{L}_2F)X'' \arrow[urr, dotted, "\delta_1^{(i,r);F}"] & (\mathrm{L}_2F)X \arrow[l, "(\mathrm{L}_2F)r"'] & \cdots \arrow[l, "(\mathrm{L}_2F)i"']
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Zu (1). Ersetze in der lang exakten Sequenz aus Lemma 165 die erste Zeile isomorph via $F \underset{\sim}{\xrightarrow{\varepsilon}} \mathrm{R}^0 F$; cf. Bemerkung 164.

Zu (1°). Die Konstruktion von $\delta_k^{(i,r);F}$ erfolgt dual zu der Konstruktion von $\delta^k_{(i,r);F}$ in Lemma 165. □

Bemerkung 167 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Weiterhin ist $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ additiv.*

Sei

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
\tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & \tilde{X}''
\end{tikzcd}
$$

ein Morphismus kurz exakter Sequenzen in $\mathcal{A}$. Dann kommutiert das folgende Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{R}^0F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)i"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^0F)f'"'] & (\mathrm{R}^0F)X \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)r"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^0F)f"'] & (\mathrm{R}^0F)X'' \arrow[r, dotted, "\delta^0_{(i,r);F}"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^0F)f''"'] & (\mathrm{R}^1F)X' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)i"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^1F)f'"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{R}^0F)\tilde{X}' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)\tilde{i}"] & (\mathrm{R}^0F)\tilde{X} \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)\tilde{r}"] & (\mathrm{R}^0F)\tilde{X}'' \arrow[r, dotted, "\delta^0_{(\tilde{i},\tilde{r});F}"] & (\mathrm{R}^1F)\tilde{X}' \arrow[r, "(\mathrm{R}^0F)\tilde{i}"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

In anderen Worten, es ist $\delta^k_{(i,r);F}((\mathrm{R}^{k+1}F)f') = ((\mathrm{R}^kF)f'')\delta^k_{(\tilde{i},\tilde{r});F}$ *für* $k \geqslant 0$.

Beweis. Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von Lemma 165.

Sei $\mathrm{IRes}\,X' \xrightarrow{j} I \xrightarrow{s} \mathrm{IRes}\,X''$ die in der Konstruktion der $\delta^k_{(i,r);F}$ verwandte Hufeisenauflösung von $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$; sei $\mathrm{IRes}\,\tilde{X}' \xrightarrow{\tilde{j}} \tilde{I} \xrightarrow{\tilde{s}} \mathrm{IRes}\,\tilde{X}''$ die in der Konstruktion der $\delta^k_{(\tilde{i},\tilde{r});F}$ verwandte Hufeisenauflösung von $\tilde{X}' \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{r}} \tilde{X}''$. Sei $\mathrm{IRes}\,X' \xrightarrow{g'} \mathrm{IRes}\,\tilde{X}'$ ein Repräsentant in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ von $\mathrm{IRes}\,f'$; sei $\mathrm{IRes}\,X'' \xrightarrow{g''} \mathrm{IRes}\,\tilde{X}''$ ein Repräsentant in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ von $\mathrm{IRes}\,f''$.

Nach Aufgabe 75 gibt es ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{IRes}\,X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g'"'] & I \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{IRes}\,X'' \arrow[d, "g''"] \\
\mathrm{IRes}\,\tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{j}"] & \tilde{I} \arrow[r, "\tilde{s}"] & \mathrm{IRes}\,\tilde{X}''
\end{tikzcd}
$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; verwende hierzu auf der linken Seite den Morphismus azyklischer Komplexe

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "(\alpha X')\dot{h}^0_{\mathrm{IRes}\,X'}"] \arrow[d, "f'"] & (\mathrm{IRes}\,X')^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g'^0"] & (\mathrm{IRes}\,X')^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g'^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \tilde{X}' \arrow[r, "(\alpha\tilde{X}')\dot{h}^0_{\mathrm{IRes}\,\tilde{X}'}"] & (\mathrm{IRes}\,\tilde{X}')^0 \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,\tilde{X}')^1 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}\ ,
$$

entsprechend auf der rechten Seite; sowie in der oberen Zeile die kurz exakte Sequenz von azyklischen Komplexen

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "(\alpha X')\dot{h}^0_{\mathrm{IRes}\,X'}"] \arrow[d, "i"] & (\mathrm{IRes}\,X')^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "j^0"] & (\mathrm{IRes}\,X')^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "j^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "\varphi\,\dot{h}^0_I"] \arrow[d, "r"] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s^0"] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X'' \arrow[r, "(\alpha X'')\dot{h}^0_{\mathrm{IRes}\,X''}"] & (\mathrm{IRes}\,X'')^0 \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,X'')^1 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}\ ,
$$

entsprechend in der unteren.

Anwendung von $\mathrm{C}(F)$ gibt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \arrow[r, "\mathrm{C}(F)j"] \arrow[d, "\mathrm{C}(F)g'"'] & \mathrm{C}(F)I \arrow[r, "\mathrm{C}(F)s"] \arrow[d, "\mathrm{C}(F)g"] & \mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X'' \arrow[d, "\mathrm{C}(F)g''"] \\
\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}' \arrow[r, "\mathrm{C}(F)\tilde{j}"] & \mathrm{C}(F)\tilde{I} \arrow[r, "\mathrm{C}(F)\tilde{s}"] & \mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}''
\end{tikzcd}$$

mit punktweise split kurz exakten Zeilen. Bemerkung 146 gibt nun für $k \geqslant 0$ das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X'' \arrow[r, "\partial^k_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}"] \arrow[d, "\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)g''"'] & \mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,X' \arrow[d, "\mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)g'"] \\
\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}'' \arrow[r, "\partial^k_{(\mathrm{C}(F)\tilde{j},\,\mathrm{C}(F)\tilde{s})}"] & \mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)\,\mathrm{IRes}\,\tilde{X}'
\end{tikzcd},$$

was wegen $\mathrm{H}^k\mathrm{C}(F)g'' = \mathrm{H}^k\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,f'' = (\mathrm{R}^kF)f''$ und wegen $\mathrm{H}^{k+1}\mathrm{C}(F)g' = \mathrm{H}^{k+1}\mathrm{K}(F)\,\mathrm{IRes}\,f' = (\mathrm{R}^{k+1}F)f'$ nur andere Bezeichnungen sind für das verlangte kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{R}^kF)X'' \arrow[r, "\delta^k_{(i,r);F}"] \arrow[d, "(\mathrm{R}^kF)f''"'] & (\mathrm{R}^{k+1}F)X' \arrow[d, "(\mathrm{R}^{k+1}F)f'"] \\
(\mathrm{R}^kF)\tilde{X}'' \arrow[r, "\delta^k_{(\tilde{i},\tilde{r});F}"] & (\mathrm{R}^{k+1}F)\tilde{X}'
\end{tikzcd}.$$

□

Das Argument aus dem Beweis zu Bemerkung 167 kann man auch verwenden, um zu zeigen, daß die Definition $\delta^k_{(i,r);F} := \partial^k_{(\mathrm{C}(F)j,\,\mathrm{C}(F)s)}$ nicht von der Wahl der Hufeisenauflösung (j,s) abhängt; setze hierzu $f' = 1_{X'}$ und $f'' = 1_{X''}$, was $g' = 1_{\mathrm{IRes}\,X'}$ und $g'' = 1_{\mathrm{IRes}\,X''}$ zu nehmen ermöglicht, und verwende in der oberen und unteren Zeile die beiden zu vergleichenden Hufeisenauflösungen.

6.2 Abgeleitete Funktoren in zwei Variablen

6.2.1 Doppelkomplexe

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

Ein *Doppelkomplex* mit Werten in $\mathcal{A}$ ist ein Objekt X in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}} \times \mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$, welches $(i,j) \longrightarrow (i+2,j)$ und $(i,j) \longrightarrow (i,j+2)$ nach 0 abbildet für $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$; cf. Aufgabe 42. Die volle Teilkategorie der Doppelkomplexe werde $\mathrm{CC}(\mathcal{A}) \subseteq [\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}} \times \mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ geschrieben.

Ist $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{CC}(\mathcal{A})$, so schreiben wir $X^{i,j} := X(i,j)$, $d = d_X^{i,j} := X\big((i,j) \longrightarrow (i,j+1)\big)$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_X^{i,j} := X\big((i,j) \longrightarrow (i+1,j)\big)$ für $(i,j) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ für die *Differentiale* von X. Es ist also $dd = 0$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d} = 0$ und $d\mathfrak{d} = \mathfrak{d}d$ stets.

$$X \;=\; \begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i+2,\,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+2,\,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+2,\,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i+1,\,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+1,\,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i+1,\,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & X^{i,j} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i,\,j+1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & X^{i,\,j+2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \vdots \arrow[u, "\mathfrak{d}"] & \vdots \arrow[u, "\mathfrak{d}"] &
\end{tikzcd}$$

Ist $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$, so schreiben wir $f^{i,j} := f(i,j)$ für $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Mit $\mathcal{A}$ ist auch $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$ additiv. Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$; Kerne und Cokerne sind punktweise zu bilden und mit induzierten Differentialen auszustatten. Cf. Aufgabe 57.

6.2.2 Totalkomplex

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{CC}(\mathcal{A})$ die volle Teilkategorie der Doppelkomplexe X mit $X^{i,j} \simeq 0$ für $i < 0$ oder $j < 0$, i.e. der Doppelkomplexe *im ersten Quadranten.*

Definiere den *Totalkomplexfunktor*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathrm{t}} & \mathrm{C}(\mathcal{A}) \\[1em]
\left(\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd}\right) & \longmapsto &
\left(\begin{tikzcd}[column sep=large]
X^{0,0} \arrow[r, "(d\ \mathfrak{d})"] \arrow[d, "f^{0,0}"] & X^{0,1} \oplus X^{1,0} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} f^{0,1} & \\ & f^{1,0} \end{smallmatrix}\right)"] & X^{0,2} \oplus X^{1,1} \oplus X^{2,0} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} & 0 \\ 0 & 0 & d & \mathfrak{d} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} f^{0,2} & & \\ & f^{1,1} & \\ & & f^{2,0} \end{smallmatrix}\right)"] & X^{0,3} \oplus X^{1,2} \oplus X^{2,1} \oplus X^{3,0} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} f^{0,3} & & & \\ & f^{1,2} & & \\ & & f^{2,1} & \\ & & & f^{3,0} \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
Y^{0,0} \arrow[r, "(d\ \mathfrak{d})"] & Y^{0,1} \oplus Y^{1,0} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} \end{smallmatrix}\right)"] & Y^{0,2} \oplus Y^{1,1} \oplus Y^{2,0} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & \mathfrak{d} & 0 & 0 \\ 0 & -d & -\mathfrak{d} & 0 \\ 0 & 0 & d & \mathfrak{d} \end{smallmatrix}\right)"] & Y^{0,3} \oplus Y^{1,2} \oplus Y^{2,1} \oplus Y^{3,0} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}\right),
\end{array}$$

das Bild beginnend in Position 0 und nach links mit Nullen fortgesetzt zu lesen. Es ist t ein additiver Funktor. Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A})$, und t ist exakt.

6.2.3 Biadditive Funktoren

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein Funktor $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ heiße *biadditiv,* falls

$$\begin{array}{rcccclcl} F(X,-) & : & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}\,, & f' & \longmapsto & F(\mathrm{id}_X\,, f') & =: & F(X, f') \\ F(-,X') & : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B}\,, & f & \longmapsto & F(f, \mathrm{id}_{X'}) & =: & F(f, X') \end{array}$$

additiv sind für alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ und $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}'$.

Es soll "biadditiv" an "bilinear" erinnern.

Beispiel 168

(1) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{A}(-,=)} \mathbf{Z}$-Mod biadditiv. Cf. Beispiel 113.(2, 3).

(2) Sei R ein Ring. Es ist Mod-$R \times R$-Mod $\xrightarrow{-\underset{R}{\otimes}=} \mathbf{Z}$-Mod biadditiv. Cf. Beispiel 113.(4).

Sei $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ biadditiv. Sei

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}(\mathcal{A}) \times \mathrm{C}(\mathcal{A}') & \xrightarrow{F^{\mathrm{CC}}} & \mathrm{CC}(\mathcal{B}) \\ \left(\begin{array}{c} X \\ {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y \end{array} , \begin{array}{c} X' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow \\ Y' \end{array} \right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c} F^{\mathrm{CC}}(X,X') \\ \downarrow{\scriptstyle F^{\mathrm{CC}}(f,f')} \\ F^{\mathrm{CC}}(Y,Y') \end{array} \right) \end{array}$$

definiert auf Objekten durch $F^{\mathrm{CC}}(X,X')^{i,j} := F(X^i, X'^j)$, durch $\mathfrak{d}^{i,j}_{F^{\mathrm{CC}}(X,X')} := F(d^i_X\,, X'^j)$ und durch $d^{i,j}_{F^{\mathrm{CC}}(X,X')} := F(X^i, d^j_{X'})$; auf Morphismen durch $F^{\mathrm{CC}}(f,f')^{i,j} := F(f^i, f'^j)$; wobei $(i,j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

$$F^{\mathrm{CC}}(X,X') \;=\; \begin{tikzcd} & \vdots & \vdots & \\ \cdots \arrow[r, "F(X^{i+1},d)"] & F(X^{i+1},X'^j) \arrow[u, "F(d,X'^j)"] \arrow[r, "F(X^{i+1},d)"] & F(X^{i+1},X'^{j+1}) \arrow[u, "F(d,X'^{j+1})"] \arrow[r, "F(X^{i+1},d)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "F(X^i,d)"] & F(X^i,X'^j) \arrow[u, "F(d,X'^j)"] \arrow[r, "F(X^i,d)"] & F(X^i,X'^{j+1}) \arrow[u, "F(d,X'^{j+1})"] \arrow[r, "F(X^i,d)"] & \cdots \\ & \vdots \arrow[u, "F(d,X'^j)"] & \vdots \arrow[u, "F(d,X'^{j+1})"] & \end{tikzcd}$$

Es ist F^{CC} biadditiv; cf. §5.3.

6.2.4 Ableiten biadditiver Funktoren

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ biadditiv.

Sei $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{C}(\mathcal{A})$ die volle Teilkategorie der Komplexe X mit $X^i = 0$ für $i < 0$. Beachte, daß F^{CC} von $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}')$ nach $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{B})$ einschränkt.

Sei $\mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{K}(\mathcal{A})$ die volle Teilkategorie der Komplexe X mit $X^i = 0$ für $i < 0$.

Lemma 169 *Sei $X' \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}')$. Ist $X \xrightarrow{n} Y$ ein Morphismus in $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A})$, dessen Bild in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwindet, so verschwindet auch das Bild von $\mathrm{t} \circ F^{\mathrm{CC}}(n, X')$ in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$.*

Beweis. Schreibe $n^i = dh^{i+1} + h^i d$ für $i \in \mathbf{Z}$; cf. Aufgabe 65.(1). Es folgt

$$\begin{array}{rcl} F(n^i, X'^j) & = & F(d, X'^j)F(h^{i+1}, X'^j) + F(h^i, X'^j)F(d, X'^j) \\ F(X^i, d)F(h^i, X'^{j+1}) & = & F(h^i, X'^j)F(Y^{i-1}, d) \end{array}$$

für $i,\ j \in \mathbf{Z}$.

Schreibe $U := F^{\mathrm{CC}}(X, X')$, $V := F^{\mathrm{CC}}(Y, X')$, $g := F^{\mathrm{CC}}(n, X') : U \longrightarrow V$ und $k^{i,j} := F(h^i, X'^j) : U^{i,j} \longrightarrow V^{i-1,j}$ für $i,\ j \in \mathbf{Z}$. So wird

$$\begin{array}{rcl} g^{i,j} & = & \mathfrak{d}k^{i+1,j} + k^{i,j}\mathfrak{d} \\ dk^{i,j+1} & = & k^{i,j}d\ . \end{array}$$

Es ist zu zeigen, daß das Bild von $\mathrm{t}g$ in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$ verschwindet. I.e. wir suchen $H^\ell : (\mathrm{t}U)^\ell \longrightarrow (\mathrm{t}V)^{\ell-1}$ für $\ell \in \mathbf{Z}$ so, daß $(\mathrm{t}g)^\ell = dH^{\ell+1} + H^\ell d$ für $\ell \in \mathbf{Z}$; cf. Aufgabe 65.(1).

Notwendigerweise ist $H^\ell := 0$ zu setzen für $\ell \leqslant 0$. Für $\ell \geqslant 1$ setzen wir

$$H^\ell \ := \ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ +k^{1,\ell-1} & & & \\ & -k^{2,\ell-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{\ell+1}k^{\ell,0} \end{pmatrix} \ : \ U^{0,\ell} \oplus \cdots \oplus U^{\ell,0} \longrightarrow V^{0,\ell-1} \oplus \cdots \oplus V^{\ell-1,0}\ .$$

Sei $\ell \geqslant 1$. Es wird

$$\begin{array}{cl} & dH^{\ell+1} + H^\ell d \\ = & \begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & & \\ & -d & -\mathfrak{d} & \\ & & d & \mathfrak{d} \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \\ +k^{1,\ell} & & & \\ & -k^{2,\ell-1} & & \\ & & +k^{3,\ell-2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \\ +k^{1,\ell-1} & & \\ & -k^{2,\ell-2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & \mathfrak{d} & & \\ & -d & -\mathfrak{d} & \\ & & d & \mathfrak{d} \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} +\mathfrak{d}k^{1,\ell} & & & \\ -dk^{1,\ell} & +\mathfrak{d}k^{2,\ell-1} & & \\ & -dk^{2,\ell-1} & +\mathfrak{d}k^{3,\ell-2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ k^{1,\ell-1}d & k^{1,\ell-1}\mathfrak{d} & & \\ & k^{2,\ell-2}d & k^{2,\ell-2}\mathfrak{d} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} g^{0,\ell} & & & \\ 0 & g^{1,\ell-1} & & \\ & 0 & g^{2,\ell-2} & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ = & (\mathrm{t}g)^\ell\ . \end{array}$$

Bei $\ell = 0$ wird $dH^1 = \left(\begin{smallmatrix} d & \mathfrak{d} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ k^{1,0} \end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{d}k^{1,0} = g^{0,0} = (\mathrm{t}g)^0$. □

Seien $X \underset{n}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A})$, wobei das Bild von n in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwinde.

Seien $X' \underset{n'}{\overset{f'}{\rightrightarrows}} Y'$ in $\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}')$, wobei das Bild von n' in $\mathrm{K}(\mathcal{A}')$ verschwinde.
Mit Lemma 169 und der dazu symmetrischen Aussage erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f+n, f'+n') & = & R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f+n, X')R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, f'+n') \\ & = & R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f, X')R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, f') \qquad = \quad R\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(f, f') \; . \end{array}$$

Folglich gibt es eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A}') \arrow[r, "\mathrm{t}\circ F^{\mathrm{CC}}"] \arrow[d, "R\times R"'] & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \arrow[d, "R"] \\ \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}') \arrow[r, "F^{\mathrm{K}}"] & \mathrm{K}(\mathcal{B}) \; , \end{tikzcd}$$

wobei allgemein für Funktoren $\mathcal{C} \xrightarrow{S} \mathcal{D}$ und $\mathcal{C}' \xrightarrow{S'} \mathcal{D}'$ der Funktor $\mathcal{C} \times \mathcal{C}' \xrightarrow{S\times S'} \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$ erklärt sei durch $(S \times S')(f, f') := (Sf, Sf')$ für einen Morphismus (f, f') in $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$.

Für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}^{[0}(\mathcal{A})$ ist $F^{\mathrm{K}}(X, -)\circ R = R\circ \mathrm{t}\circ F^{\mathrm{CC}}(X, -)$ additiv. Also ist auch $F^{\mathrm{K}}(X, -)$ additiv; cf. Bemerkung 116. Zusammen mit dem symmetrischen Argument zeigt dies die Biadditivität von F^{K}.

Definition 170 Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Injektive. Sei $k \geqslant 0$. Sei der *k-te rechtsabgeleitete Funktor* des biadditiven Funktors $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ definiert als

$$\Big(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{\mathrm{R}^k F} \mathcal{B}\Big) \;:=\; \Big(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{\mathrm{IRes}\,\times\,\mathrm{IRes}} \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}) \times \mathrm{K}^{[0}(\mathcal{A}') \xrightarrow{F^{\mathrm{K}}} \mathrm{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^k} \mathcal{B}\Big)$$

Da IRes additiv ist, ist $\mathrm{R}^k F$ biadditiv; cf. Aufgabe 66.(2, 4), Beispiel 113.(5).

Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ stattdessen genügend Projektive haben, defineren wir den *k-ten linksabgeleiteten Funktor* $\mathrm{L}_k F$ auf duale Weise.

Definition 171 (Ext **und** Tor**, endgültig)**

(1) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(-,=) \;:=\; \mathrm{R}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-,=) \;:\; \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod} \; .$$

Für $X,\, Y \,\in\, \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ ist also $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) = \mathrm{H}^k\mathrm{t}\operatorname{Hom}^{\mathrm{CC}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{PRes}\,X, \mathrm{IRes}\,Y)$.

Beachte, daß für IRes auf $\mathcal{A}^\circ$ der Funktor PRes auf $\mathcal{A}$ verwandt werden kann.

Ist R ein Ring und $\mathcal{A} = R$-Mod, so schreiben wir auch $\mathrm{Ext}^k_R(-,=) := \mathrm{Ext}^k_{R\text{-Mod}}(-,=)$.

(2) Sei R ein Ring. Sei $k \geqslant 0$. Setze

$$\mathrm{Tor}_k^R(-,=) \;:=\; \mathrm{L}_k(- \underset{R}{\otimes} =) \;:\; \text{Mod-}R \times R\text{-Mod} \;\longrightarrow\; \mathbf{Z}\text{-Mod}\;.$$

Für $X,\, Y \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$ ist also $\mathrm{Tor}_k^R(X,Y) = \mathrm{H}_k \mathrm{t}(\mathrm{PRes}\, X \underset{R}{\otimes}^{\mathrm{CC}} \mathrm{PRes}\, Y)$, wobei hier t der Totalkomplexfunktor auf den Doppelkomplexen im dritten Quadranten ist.

6.3 Zusammenhang Ableiten in zwei und je einer Variablen

6.3.1 Quasiisomorphismen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Definition 172 Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ heißt *Quasiisomorphismus,* wenn $\mathrm{H}^k f$ ein Isomorphismus ist für alle $k \in \mathbf{Z}$. Auch das Bild eines solchen f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ wird als Quasiisomorphismus bezeichnet.

Bemerkung 173 *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Es ist für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ der Morphismus $\mathrm{Konz}\, X \xrightarrow{eX} \mathrm{IRes}\, X$ ein Quasiisomorphismus; cf.* §6.1.2.1.

Beweis. Gemäß Bemerkung 162 ist $\mathrm{H}^0(eX)$ ein Isomorphismus. Ferner ist $\mathrm{H}^k(eX)$ für $k \neq 0$ bereits deswegen ein Isomorphismus, da dort $\mathrm{H}^k\, \mathrm{Konz}\, X \simeq 0$ und $\mathrm{H}^k\, \mathrm{IRes}\, X \simeq 0$. ▫

Bemerkung 174 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor. Dann ist $\mathrm{C}(G)X \xrightarrow{\mathrm{C}(G)f} \mathrm{C}(G)Y$ ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Siehe Aufgabe 84.(2). ▫

Bemerkung 175 *Sei*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"] \\
\tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & \tilde{X}''
\end{tikzcd}$$

ein Morphismus kurz exakter Sequenzen in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind f' und f'' Quasiisomorphismen, so auch f.

Beweis. Anwendung der Homologiefunktoren gibt nach Bemerkung 146 für $k \in \mathbf{Z}$ folgenden Morphismus lang exakter Sequenzen, welche wir bereits in kurz exakte Sequenzen zerlegt haben und für welche wir nach Bemerkung 124.(2) die auf den Bildern induzierten Morphismen eingetragen haben.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{k-1}X'' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k-1}f''"', "\wr"] & {} \arrow[r, hook] \arrow[d, "a"'] & \mathrm{H}^{k}X' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k}f'"', "\wr"] & {} \arrow[r, hook] \arrow[d, "b"'] & \mathrm{H}^{k}X \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathrm{H}^{k}f"'] & {} \arrow[r, hook] \arrow[d, "c"] & \mathrm{H}^{k}X'' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"', "\mathrm{H}^{k}f''"] & {} \arrow[r, hook] \arrow[d, "d"] & \mathrm{H}^{k+1}X' \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "\mathrm{H}^{k+1}f'"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^{k-1}Y'' \arrow[r, two heads] & {} \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^{k}Y' \arrow[r, two heads] & {} \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^{k}Y \arrow[r, two heads] & {} \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^{k}Y'' \arrow[r, two heads] & {} \arrow[r, hook] & \mathrm{H}^{k+1}Y' \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Dank Komposition sind a und d Isomorphismen. Das Schlangenlemma, Lemma 136, angewandt auf $(a, \mathrm{H}^k f', b)$, zeigt, daß b ein Isomorphismus ist ([6]). Dual ist c ein Isomorphismus. Das Schlangenlemma, angewandt auf $(b, \mathrm{H}^k f, c)$, zeigt, daß $\mathrm{H}^k f$ ein Isomorphismus ist. ▫

6.3.2 Zeilenweise Quasiisomorphismen

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Für einen Doppelkomplex $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}(\mathcal{A})$ und $i \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $X^{i,*} \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ für den Komplex mit $\big((X^{i,*})^j \xrightarrow{d^j_{X^{i,*}}} (X^{i,*})^{j+1}\big) := (X^{i,j} \xrightarrow{d_X^{i,j}} X^{i,j+1})$ für $j \in \mathbf{Z}$. Kurz, sei $X^{i,*}$ die i-te Zeile von X.

Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{CC}(\mathcal{A})$ schreiben wir $f^{i,*} := (f^{i,j})_j \,:\, X^{i,*} \longrightarrow Y^{i,*}$. Kurz, $f^{i,*}$ ist die Einschränkung von f auf die i-te Zeile.

Lemma 176 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A})$. Ist $X^{i,*} \xrightarrow{f^{i,*}} Y^{i,*}$ ein Quasiisomorphismus für alle $i \geqslant 0$, so ist auch $\mathrm{t}f$ ein Quasiisomorphismus.*

Kurz, ist f zeilenweise ein Quasiisomorphismus, dann auch total.

Beweis. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben mit $X^{i,*} \xrightarrow{f^{i,*}} Y^{i,*}$ Quasiisomorphismus für alle $i \geqslant 0$.

Für $I \subseteq \mathbf{Z}$ schreiben wir $X^{I,*} \in \operatorname{Ob} \mathrm{CC}^{\llcorner}(\mathcal{A})$ für den Doppelkomplex, der aus X hervorgeht durch Ersetzen von $X^{i,j}$ durch 0 für $i \in \mathbf{Z} \smallsetminus I$ und $j \in \mathbf{Z}$. Entsprechend für f.

Wir *behaupten,* daß $\mathrm{t}(f^{[0,i]})$ ein Quasiisomorphismus ist für alle $i \geqslant -1$. Wir führen dazu eine Induktion nach $i \geqslant -1$. Für $i = -1$ ist nichts zu zeigen. Sei $i \geqslant 0$. Wir haben folgenden Morphismus kurz exakter Sequenzen von Doppelkomplexen

$$
\begin{tikzcd}
X^{\{i\},*} \arrow[r] \arrow[d, "f^{\{i\},*}"] & X^{[0,i],*} \arrow[r] \arrow[d, "f^{[0,i],*}"] & X^{[0,i-1],*} \arrow[d, "f^{[0,i-1],*}"] \\
Y^{\{i\},*} \arrow[r] & Y^{[0,i]*} \arrow[r] & Y^{[0,i-1],*}
\end{tikzcd}
$$

[6] Man kann auch auf den Cokernen ein Inverses induzieren lassen.

Anwendung des Totalkomplexfunktors gibt einen Morphismus kurz exakter Sequenzen von Komplexen.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{t}X^{\{i\},*} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{t}f^{\{i\},*}"] & \mathrm{t}X^{[0,i],*} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{t}f^{[0,i],*}"] & \mathrm{t}X^{[0,i-1],*} \arrow[d, "\mathrm{t}f^{[0,i-1],*}"] \\ \mathrm{t}Y^{\{i\},*} \arrow[r] & \mathrm{t}Y^{[0,i]*} \arrow[r] & \mathrm{t}Y^{[0,i-1],*} \end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{t}f^{[0,i-1],*}$ nach Induktionsvoraussetzung ein Quasiisomorphismus. Da $f^{i,*}$ ein Quasiisomorphismus ist und da $\mathrm{t}f^{\{i\},*}$ durch Verschiebung aus $f^{i,*}$ hervorgeht, ist auch $\mathrm{t}f^{\{i\},*}$ ein Quasiisomorphismus. Dank Bemerkung 175 ist also auch $\mathrm{t}f^{[0,i],*}$ ein Quasiisomorphismus, was die *Behauptung* zeigt.

Nun ist aber nach Definition des Totalkomplexes

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{t}X \xrightarrow{\mathrm{t}f} \mathrm{t}Y) \quad = \quad \mathrm{H}^j(\mathrm{t}X^{[0,j+1],*} \xrightarrow{\mathrm{t}f^{[0,j+1],*}} \mathrm{t}Y^{[0,j+1],*})$$

für $j \geqslant 0$, da $\mathrm{t}X$ an den Positionen 0 bis $j+1$ mitsamt Differentialen dazwischen mit $\mathrm{t}X^{[0,j+1],*}$ übereinstimmt, entsprechend für Y, da $\mathrm{t}f$ an den Positionen 0 bis $j+1$ mit $\mathrm{t}f^{[0,j+1],*}$ übereinstimmt und da für die Berechnung der Homologie an der Stelle j nur die Positionen $j-1$, j und $j+1$ eine Rolle spielen. Da gemäß vorstehender Behauptung rechts ein Isomorphismus steht, steht auch links ein Isomorphismus. ▫

6.3.3 Drei Interpretationen

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Sei $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein biadditiver Funktor.

Für $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}'$ machen wir nun Gebrauch von der Kurzschreibweise $F(-,X') = \mathrm{C}(F(-,X'))$, so daß für $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})$ und $k \in \mathbf{Z}$ sich $\big(F(Y,X')^k \xrightarrow{d} F(Y,X')^{k+1}\big) = F(Y^k,X') \xrightarrow{F(d,X')} F(Y^{k+1},X')$ ergibt. Dies liefert einen biadditiven Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}(\mathcal{A}) \times \mathcal{A}' & \xrightarrow{F} & \mathrm{C}(\mathcal{B}) \\ \big((Y,X') \xrightarrow{(g,f)} (\tilde{Y},\tilde{X}')\big) & \longmapsto & \big(F(Y,X') \xrightarrow{F(g,f')} F(\tilde{Y},\tilde{X}')\big)\,, \end{array}$$

wobei der Morphismus von Komplexen $F(g,f') : F(Y,X') \longrightarrow F(\tilde{Y},\tilde{X}')$ bei $k \in \mathbf{Z}$ durch $F(g^k,f') : F(Y^k,X') \longrightarrow F(\tilde{Y}^k,\tilde{X}')$ gegeben sei; beachte, daß $F(g^k,f')F(d,\tilde{X}') = F(g^k d,f') = F(dg^{k+1},f') = F(d,X')F(g^{k+1},f')$.

Analog auch $F(-,X') = \mathrm{K}(F(-,X'))$.

Entsprechend machen wir Gebrauch von der Kurzschreibweise $F(X,-) = \mathrm{C}(F(X,-))$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Analog auch $F(X,-) = \mathrm{K}(F(X,-))$

Bemerkung 177
Sei $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}'$. Wir haben einen Isomorphismus $v_{Y,X'} : F(Y,X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, \mathrm{Konz}\,X')$ in $\mathrm{C}(\mathcal{B})$, natürlich in $(Y,X') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathcal{A}) \times \mathcal{A}')$.

Beweis. Wir haben folgenden Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "F(d,X')"] & F(Y^k, X') \arrow[r, "F(d,X')"] \arrow[d, "(-1)^{k(k-1)/2}"', "\wr"] & F(Y^{k+1}, X') \arrow[r, "F(d,X')"] \arrow[d, "(-1)^{(k+1)k/2}"', "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "(-1)^{k-1}F(d,X')"] & F(Y^k, X') \arrow[r, "(-1)^k F(d,X')"] & F(Y^{k+1}, X') \arrow[r, "(-1)^{k+1}F(d,X')"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist gleich $F(Y, X')$. Die untere Zeile entsteht aus $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, \mathrm{Konz}\, X')$ durch Weglassen von Nullsummanden, so daß wir einen Isomorphismus von ihr nach $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(Y, \mathrm{Konz}\, X')$ haben. Die verlangte Natürlichkeit läuft für einen Repräsentanten $Y \xrightarrow{g} \tilde{Y}$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ und für $X' \xrightarrow{f'} \tilde{X}'$ in $\mathcal{A}'$ auf $F(g^k, f')(-1)^{k(k-1)/2} = (-1)^{k(k-1)/2} F(g^k, f')$ für $k \in \mathbf{Z}$ hinaus. $\square$

Bemerkung 178 *Sei $F(I, =)$ exakt für $I \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{Inj}\, \mathcal{A}$. Sei $J \in \mathrm{C}(\mathrm{Inj}\, \mathcal{A})$. Sei $X' \xrightarrow{f'} Y'$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A}')$. Dann ist $\mathrm{t}F(J, f) : \mathrm{t}F(J, X') \longrightarrow \mathrm{t}F(J, Y')$ ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Dank Lemma 176 genügt es zu zeigen, daß $F(I^k, X') \xrightarrow{F(I^k, f')} F(I^k, Y')$ ein Quasiisomorphismus ist für $k \geqslant 0$. Da $F(I^k, -)$ exakt ist, folgt dies aus Bemerkung 174. $\square$

Bemerkung 179 *Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Injektive.*

Es ist $(\mathrm{R}^k F(X, =))(X') = \mathrm{H}^k F(X, \mathrm{IRes}\, X')$ für $k \geqslant 0$ ein biadditiver Funktor in $(X, X') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$.

Es ist $(\mathrm{R}^k F(-, X'))(X) = \mathrm{H}^k F(\mathrm{IRes}\, X, X')$ für $k \geqslant 0$ ein biadditiver Funktor in $(X, X') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$.

Beweis. Dies folgt aus der Additivität von IRes; cf. Aufgabe 66.(2, 4), Beispiel 113.(5). $\square$

Satz 180

(1) *Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Injektive.*

(i) *Sei $F(I,=)$ exakt für $I \in \operatorname{Ob}\operatorname{Inj}\mathcal{A}$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{R}^k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{R}^k F(-,X'))(X)\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

(ii) *Sei $F(-,I')$ exakt für $I' \in \operatorname{Ob}\operatorname{Inj}\mathcal{A}'$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{R}^k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{R}^k F(X,=))(X')\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

(1°) *Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genügend Projektive.*

(i) *Sei $F(P,=)$ exakt für $P \in \operatorname{Ob}\operatorname{Proj}\mathcal{A}$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{L}_k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{L}_k F(-,X'))(X)\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

(ii) *Sei $F(-,P')$ exakt für $P' \in \operatorname{Ob}\operatorname{Proj}\mathcal{A}'$. Für $k \geqslant 0$ ist*

$$(\mathrm{L}_k F)(X,X') \;\simeq\; (\mathrm{L}_k F(X,=))(X')\;,$$

natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

Beweis. Zu (1.i). Sei $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$.

Es ist $\operatorname{Konz} X' \xrightarrow{eX'} \operatorname{IRes} X'$ ein Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 173. Somit ist auch $\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\operatorname{IRes} X,\, eX')$ ein Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 178. Also ist auch dessen Bild

$$F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X, \operatorname{Konz} X') \xrightarrow{F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X,\, eX')} F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X, \operatorname{IRes} X')$$

in der Homotopiekategorie ein Quasiisomorphismus.

Beachte ferner, daß $F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X,\, eX')$ natürlich in $(X,X') \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}\times\mathcal{A}')$ ist; i.e. für $X \xrightarrow{f} \tilde{X}$ in $\mathcal{A}$ und $X' \xrightarrow{f'} \tilde{X}'$ in $\mathcal{A}'$ ist $F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} X, eX')\, F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} f, \operatorname{IRes} f') = F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} f, \operatorname{Konz} f')\, F^{\mathrm{K}}(\operatorname{IRes} \tilde{X}, e\tilde{X}')$.

Sei $k \geqslant 0$. Anwenden von H^k gibt nun

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{R}^k F(-,X'))(X) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{H}^k F(\mathrm{IRes}\,X, X') \arrow[d, "\mathrm{H}^k v_{\mathrm{IRes}\,X,\,X'}", "\wr"'] \\
\mathrm{H}^k F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}\,X, \mathrm{Konz}\,X') \arrow[d, "\mathrm{H}^k F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}\,X,\, eX')", "\wr"'] \\
\mathrm{H}^k F^{\mathrm{K}}(\mathrm{IRes}\,X, \mathrm{IRes}\,X') \arrow[d, equal] \\
(\mathrm{R}^k F)(X,X')\ ;
\end{tikzcd}$$

cf. Bemerkung 177 und vorstehende Behauptung.

Beide Schritte sind natürlich in $(X,X') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')$. $\square$

Beispiel 181

(1) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Sei $k \geqslant 0$. Es ist*

$$\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}l}
\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) & \overset{1.}{=} & \big(\mathrm{R}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,=)\big)(X,Y) & = & \mathrm{H}^k \mathrm{t}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{PRes}\,X, \mathrm{IRes}\,Y) \\
& \overset{2.}{\simeq} & \big(\mathrm{R}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,=)\big)(Y) & = & \mathrm{H}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y) \\
& \overset{3.}{\simeq} & \big(\mathrm{R}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y)\big)(X) & = & \mathrm{H}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{PRes}\,X, Y)\ ,
\end{array}$$

natürlich in $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A})$. *Insbesondere ist* $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$. *Cf. Definitionen* 156 *und* 171.(1).

(2) *Sei $k \geqslant 0$. Es ist*

$$\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}l}
\mathrm{Tor}^R_k(X,Y) & \overset{1.}{=} & (\mathrm{L}_k(- \underset{R}{\otimes} =))(X,Y) & = & \mathrm{H}_k \mathrm{t}(\mathrm{PRes}\,X \underset{R}{\otimes} \mathrm{PRes}\,Y) \\
& \overset{2.}{\simeq} & (\mathrm{L}_k(X \underset{R}{\otimes} =))(Y) & = & \mathrm{H}_k(X \underset{R}{\otimes} \mathrm{PRes}\,Y) \\
& \overset{3.}{\simeq} & (\mathrm{L}_k(- \underset{R}{\otimes} Y))(X) & = & \mathrm{H}_k(\mathrm{PRes}\,X \underset{R}{\otimes} Y)\ ,
\end{array}$$

natürlich in $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\text{Mod-}R \times R\text{-Mod})$. *Insbesondere ist* $\mathrm{Tor}^R_0(X,Y) \simeq X \underset{R}{\otimes} Y$. *Cf. Definitionen* 157 *und* 171.(2).

Beweis.

Zu (1). Satz 180.(1) findet Anwendung, da ${}_{\mathcal{A}}(-,I)$ für $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}$ und ${}_{\mathcal{A}}(P,-)$ für $P \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Proj}\,\mathcal{A} = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Inj}(\mathcal{A}^\circ)$ exakt sind; cf. Definition 137. Die Aussage über $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y)$ folgt aus Bemerkung 164.

Zu (2). Satz 180.(2) findet Anwendung dank der Exaktheit von $-\underset{R}{\otimes} P$ für $P \in \operatorname{Ob}\operatorname{Proj}(R\text{-Mod})$ aus Aufgabe 31.(5) und dank der dazu symmetrischen Eigenschaft. Die Aussage über $\operatorname{Tor}_0^R(X,Y)$ folgt aus Bemerkung 164°. ▫

Beispiel 182 Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/16$-mod. In Beispiel 158 wurde u.a. $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/4) \simeq \mathbf{Z}/2$ über eine injektive Auflösung berechnet. Wir können nun auch wie folgt mittels einer projektiven Auflösung rechnen.

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/4) & \simeq & \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}\big((\cdots \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{8} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{8} \mathbf{Z}/16),\ \mathbf{Z}/4\big) \\
& \simeq & \mathrm{H}^2(\cdots \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{8} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{8} \mathbf{Z}/4) \\
& \simeq & \mathrm{H}^2(\cdots \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xleftarrow{0} \mathbf{Z}/4) \\
& \simeq & \mathbf{Z}/2
\end{array}$$

Kapitel 7

Ergänzungen

7.1 Yoneda-ext

In diesem Abschnitt §7.1 verwenden wir die provisorische Definition 156 von Ext; cf. auch Bemerkung 179.

7.1.1 Der Shiftfunktor

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Für $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ definieren wir $X[k] \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ durch $X[k]^i := X^{k+i}$ und durch $d^i_{X[k]} = (-1)^k d^{i+k}_X$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ definieren wir $X[k] \xrightarrow{f[k]} Y[k]$ durch $f[k]^i := f^{k+i}$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Es ist $(-)[k]$ ein Funktor. Es ist $(-)[0] = \mathrm{id}_{\mathrm{C}(\mathcal{A})}$. Für $k,\, \ell \in \mathbf{Z}$ ist $(-)[\ell] \circ (-)[k] = (-)[k+\ell]$.

Cf. auch Aufgabe 75.

Ist nun X split azyklisch, so auch $X[k]$; cf. Aufgabe 58.(2). Also induziert $(-)[k]$ einen gleichnamigen Funktor auf $\mathrm{K}(\mathcal{A})$; cf. Definition 142, Bemerkung 116.

7.1.2 Quasiisomorphismen induzieren Isomorphismen

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Für $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$ haben wir den Morphismus

$$\left(\begin{array}{c} X \\ \downarrow{\scriptstyle \zeta_X} \\ \mathrm{c}(X) \end{array}\right) := \left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^{i-1} \oplus X^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^i \oplus X^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^{i+1} \oplus X^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \end{tikzcd}\right)$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ist genau dann nullhomotop, wenn er als $f = \zeta_X f'$ faktorisiert für ein f' in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Lösung zu Aufgabe 65.(1).

Bemerkung 183 *Sei $X \xrightarrow{g} Y$ punktweise split monomorph in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Dann faktorisiert $(X \xrightarrow{\zeta_X} \mathrm{c}(X)) = (X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{t} \mathrm{c}(X))$ für ein g in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.*

Beweis. Nach punktweiser isomorpher Ersetzung können wir g schreiben als den oberen Morphismus des folgenden Diagramms; cf. §5.6. Die Faktorisierung von ζ_X über f ergibt sich wie im Diagramm; beachte, daß $u^{i-1}d+du^i = 0$ für $i \in \mathbf{Z}$ aus der Differentialbedingung des mittleren Komplexes Y folgt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\,0)"'] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "(1\,0)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \oplus Z^{i-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ u^{i-1} & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & u^{i-1} \end{pmatrix}"'] & X^i \oplus Z^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ u^i & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & u^i \end{pmatrix}"'] & X^{i+1} \oplus Z^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & u^{i+1} \end{pmatrix}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \oplus X^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] & X^i \oplus X^{i+1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] & X^{i+1} \oplus X^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

Wir können nun Aufgabe 65.(1) etwas verallgemeinern.

Korollar 184 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $X \xrightarrow{g} U$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ punktweise split monomorph mit U split azyklisch. Dann ist f nullhomotop genau dann, wenn es eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{g} U \xrightarrow{u} Y)$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gibt.*

Beweis. Gibt es eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{g} U \xrightarrow{s} Y)$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, so ist wegen $U \simeq 0$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ in der Tat das Bild von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ gleich null, i.e. f ist nullhomotop; cf. Aufgabe 65.(1).

Sei umgekehrt f als nullhomotop vorausgesetzt. Dann gibt es eine Faktorisierung $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{\zeta_X} \mathrm{c}(X) \xrightarrow{s} Y)$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Lösung zu Aufgabe 65.(1). Ferner können wir $(X \xrightarrow{\zeta_X} \mathrm{c}(X)) = (X \xrightarrow{g} U \xrightarrow{t} \mathrm{c}(X))$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ faktorisieren; cf. Bemerkung 183. Insgesamt wird $(X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{g} U \xrightarrow{ts} Y)$, wie verlangt. □

Bemerkung 185 *Seien $X \xrightarrow{f} Y$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $K \in$ $\mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Komplex, für welchen es ein $\ell \in \mathbf{Z}$ gibt mit $K^i = 0$ für $i < \ell$. Dann erhalten wir einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(X, K) \xleftarrow[\sim]{f(-)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(Y, K) .$$

Beweis. Zeigen wir die *Injektivität* von $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(f, K)$.

Da ζ_X punktweise split monomorph, f ein Quasiisomorphismus und $\mathrm{c}(X)$ azyklisch ist, ist $X \xrightarrow{(f\ \zeta_X)} Y \oplus \mathrm{c}(X)$ ein punktweise split monomorpher Quasiisomorphismus. Wir ergänzen zu einer punktweise split kurz exakten Sequenz

$$X \xrightarrow{(f\ \zeta_X)} Y \oplus \mathrm{c}(X) \xrightarrow{\binom{g}{v}} V\ .$$

Da $(f\ \zeta_X)$ ein Quasiisomorphismus ist, ist V azyklisch; cf. Aufgabe 72.(1). Dank Bemerkung 148 ist also $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(V, K) = 0$.

Sei nun $Y \xrightarrow{t} K$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ so gegeben, daß ft nullhomotop ist. Wir haben zu zeigen, daß t nullhomotop ist. Gemäß Lösung zu Aufgabe 65.(1) (oder Korollar 184) gibt es eine Faktorisierung $ft = \zeta_X u$. Somit ist $(f\ \zeta_X)\binom{t}{-u} = 0$. Folglich gibt es eine Faktorisierung $\binom{t}{-u} = \binom{g}{v} w$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Insbesondere ist $t = gw$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, also auch in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. Da $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(V, K) = 0$, ist aber w und somit auch $t = gw$ nullhomotop.

Zeigen wir die *Surjektivität* von $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(f, K)$. Bis auf Vorzeichen dual zu $X \xrightarrow{\zeta_X} \mathrm{c}(X)$ haben wir einen Morphismus $\mathrm{c}(Y)[-1] \xrightarrow{\xi_Y} Y$, welcher punktweise split epimorph ist; viz.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y^{i-2} \oplus Y^{i-1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\binom{-d}{1}"] & Y^{i-1} \oplus Y^{i} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\binom{-d}{1}"] & Y^{i} \oplus Y^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\binom{-d}{1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^{i} \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r] & \cdots\ .
\end{tikzcd}$$

Wir ergänzen zu folgender punktweise split exakten Sequenz.

$$V' \xrightarrow{(g'\ v')} X \oplus \mathrm{c}(Y)[-1] \xrightarrow{\binom{f}{\xi_Y}} Y$$

Wegen f Quasiisomorphismus und $\mathrm{c}(Y)[-1]$ azyklisch ist auch $\binom{f}{\xi_Y}$ ein Quasiisomorphismus. Daher ist V' azyklisch; cf. Aufgabe 72.(1).

Sei nun $X \xrightarrow{t'} K$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben ein $Y \xrightarrow{s'} K$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ so zu finden, daß $t' - fs'$ nullhomotop ist. Da V' azyklisch ist, ist $(g'\ v')\binom{t'}{0}$ nullhomotop; cf. Bemerkung 148. Somit gibt es eine Faktorisierung $(g'\ v')\binom{t'}{0} = (g'\ v')\,\zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}\,u'$, da die ersten beiden Faktoren der rechten Seite punktweise split monomorph sind, und also auch ihr Kompositum; cf. Korollar 184. Also ist

$$(g'\ v')\left(\binom{t'}{0} - \zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}u'\right) \;=\; 0\ .$$

Folglich gibt es eine Faktorisierung $\binom{t'}{0} - \zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}u' = \binom{f}{\xi_Y} s'$. Schreibe $\binom{\zeta_1}{\zeta_2} := \zeta_{X\oplus\mathrm{c}(Y)[-1]}$. Wir erhalten $t' - fs' = \zeta_1 u'$. Da das Zielobjekt $\mathrm{c}(X \oplus \mathrm{c}(Y)[-1])$ von ζ_1 split azyklisch ist, folgt $t' - fs'$ nullhomotop, wie gewünscht. $\square$

7.1.3 Ext als Hom

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Seien $X,\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Sei I eine injektive Auflösung von X. Sei $\operatorname{Konz} X \xrightarrow{e_{X,I}} I$ ein Quasiisomorphismus.

Sei J eine injektive Auflösung von Y.

Cf. Bemerkungen 151 und 161.

Bemerkung 186 *Sei $k \geqslant 0$. Sei $Z \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Wir haben einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Z)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k])\ ,$$

natürlich in $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Z \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

Beweis. Beachte, daß gemäß unserer Wahl von Kernen und Cokernen in $\mathbf{Z}$-Mod sich

$$\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \;=\; \frac{\operatorname{Kern}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^k)}{\operatorname{Im}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})}$$

ergibt. Ferner haben wir einen $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Kern}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^k) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k]) \\ f & \longmapsto & (\dots, 0, f, 0, \dots)\ , \end{array}$$

wobei der Eintrag f an Position 0 stehe. Der Kern des Kompositums

$$\operatorname{Kern}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathrm{C}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k]) \xrightarrow{R} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k])$$

ist gerade gleich $\operatorname{Im}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})$; cf. Aufgabe 65.(1).

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Z^{k-1} \arrow[r, "(-1)^k d_Z^{k-1}"'] & Z^k \arrow[r, "(-1)^k d_Z^k"'] & Z^{k+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dies liefert nach Homomorphiesatz, Lemma 30, den $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) & \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Z)} & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} X, Z[k]) \\ f + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1}) & \longmapsto & (\dots, 0, f, 0, \dots)\ . \end{array}$$

Sind nun $X' \xrightarrow{x} X$ in $\mathcal{A}$ und $Z \xrightarrow{z} Z'$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben, so wird

$$\begin{array}{rl} & \big(f + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})\big)\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(x, z)\Phi^k(X', Z') \\ = & \big(xfz^k + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', d_{Z'}^{k-1})\big)\Phi^k(X', Z') \\ = & (\dots, 0, xfz^k, 0, \dots) \\ = & (\dots, 0, f, 0, \dots)\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} x, z[k]) \\ = & \big(f + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d_Z^{k-1})\big)\Phi^k(X, Z)\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\operatorname{Konz} x, z[k])\ ; \end{array}$$

cf. §6.3.3. $\square$

Korollar 187 *Sei $k \geqslant 0$.*

Wir haben einen Isomorphismus $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Konz}\,X, (\mathrm{IRes}\,Y)[k])$, *natürlich in* $X,\ Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Insbesondere ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Konz}\,X, J[k])$, *natürlich in* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Beweis. Zunächst sei an $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) = \mathrm{H}^k\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y)$ erinnert; verwende dann Bemerkung 186.

Ferner sind $\mathrm{IRes}\,Y$ und J isomorph in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, cf. Bemerkung 151.(1). Es folgt, daß $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Konz}\,X, J[k]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Konz}\,X, (\mathrm{IRes}\,Y)[k]) \simeq \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$, natürlich in $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. $\square$

Bemerkung 188 *Sei $k \geqslant 0$.*

Es ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Konz}\,X, J[k]) \xleftarrow[\sim]{e_{X,I}(-)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(I, J[k])$.

Insbesondere haben wir den Isomorphismus

$$
\begin{array}{rl}
& \big(\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{\Psi^k(X,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,X, (\mathrm{IRes}\,Y)[k])\big) \\
:= & \big(\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{\Phi^k(X,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{Konz}\,X, (\mathrm{IRes}\,Y)[k]) \xrightarrow[\sim]{(eX(-))^{-1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,X, (\mathrm{IRes}\,Y)[k])\big)
\end{array}
$$

abelscher Gruppen, natürlich in $X,\ Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Beweis. Daß $e_{X,I}(-)$ ein Isomorphismus ist, folgt aus $e_{X,I}$ Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 185.

Ferner ist auch eX ein Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 173. Die Natürlichkeit von $eX(-)$ in X und Y folgt aus der Natürlichkeit von eX in X. Denn seien $X' \xrightarrow{x} X$ und $Y \xrightarrow{y} Y'$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Sei ferner $\mathrm{IRes}\,X \xrightarrow{f} (\mathrm{IRes}\,Y)[k]$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir erhalten

$$
\begin{array}{rcl}
\big((\mathrm{IRes}\,x) f (\mathrm{IRes}\,y)[k]\big)(eX'(-)) & = & (eX')(\mathrm{IRes}\,x) f (\mathrm{IRes}\,y)[k] \\
& = & (\mathrm{Konz}\,x)(eX) f (\mathrm{IRes}\,y)[k] \\
& = & (\mathrm{Konz}\,x)\big(f(eX(-))\big)(\mathrm{IRes}\,y)[k]\ .
\end{array}
$$

$\square$

Bemerkung 189 *Wir haben einen Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{IRes}} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,X, \mathrm{IRes}\,Y) \\
f & \longmapsto & \mathrm{IRes}\,f\ ,
\end{array}
$$

natürlich in $X,\ Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Wir haben einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon(X,Y)} & \mathrm{Z}^0\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y) \;=\; \mathrm{H}^0\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y) \;=\; \mathrm{Ext}^0(X,Y) \\
f & \longmapsto & f(eY)^0\ ,
\end{array}
$$

natürlich in $X,\ Y\ \in\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$*.*

Insgesamt haben wir folgendes kommutative Dreieck.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[r, "\varepsilon(X,Y)", "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{IRes}"', "\wr"] & \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[d, "\Psi^0(X,Y)", "\wr"'] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,X, \mathrm{IRes}\,Y)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die vom Funktor IRes gelieferte Abbildung ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen, da dieser Funktor voll, treu und additiv ist; cf. Lemma 149, Bemerkung 111.

Zu $\varepsilon(X,Y)$. Es ist

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,(eY)^0)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,(\mathrm{IRes}\,Y)^0) \\
f & \longmapsto & f(eY)^0
\end{array}$$

Diese Abbildung faktorisiert als $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(X,(eY)^0) = \varepsilon(X,Y)\,\iota_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(X,d)}$. Gemäß Bemerkung 164 ist $\varepsilon(X,Y)$ ([7]) also ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Natürlichkeit in Y wurde dort schon festgestellt. Natürlichkeit in X ist anhand der Abbildungsvorschrift erkennbar; cf. §6.3.3.

Zur Kommutativität des angegebenen Dreiecks. Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ gegeben. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{IRes}\,f)\Psi^0(X,Y)^{-1} & = & ((eX)(\mathrm{IRes}\,f))\Phi^0(X,Y)^{-1} \\
& = & ((\mathrm{Konz}\,f)(eY))\Phi^0(X,Y)^{-1} \\
& = & ((\mathrm{Konz}\,f)(eY))^0 \\
& = & f(eY)^0 \\
& = & f\varepsilon(X,Y)\ .
\end{array}$$

□

7.1.4 Produkte auf Ext

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Seien $X,\ Y,\ Z,\ W\ \in\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Seien $k,\ \ell,\ m\ \geqslant\ 0$.

Definition 190 Wir haben die **Z**-bilineare Kompositionsabbildung

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,X,(\mathrm{IRes}\,Y)[k]) & \times & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,Y,(\mathrm{IRes}\,Z)[\ell]) & \xrightarrow{(\star)} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,X,(\mathrm{IRes}\,Z)[k+\ell]) \\
(f & , & g) & \longmapsto & f \star g\ :=\ f\cdot g[k]\ ;
\end{array}$$

[7] In loc. cit. nur als εY bezeichnet.

cf. Definition 142, Bemerkung 105, Aufgabe 66.(2, 4).

Ferner, sind $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, X, (\mathrm{IRes}\, Y)[k])$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, Y, (\mathrm{IRes}\, Z)[\ell])$ und $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, Z, (\mathrm{IRes}\, W)[m])$ gegeben, so gilt

$$f \star (g \star h) \;=\; (f \star g) \star h \;\in\; \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\, X, (\mathrm{IRes}\, W)[k+\ell+m])\;.$$

Denn $f \star (g \star h) = f \cdot (g \cdot h[\ell])[k] = f \cdot g[k] \cdot h[\ell + k] = (f \star g) \star h$.

Definition 191 Strukturtransport gibt uns die mißbräuchlich wieder mit $(\star)$ bezeichnete **Z**-bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccl} \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) & \times & \mathrm{Ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z) & \xrightarrow{(\star)} & \mathrm{Ext}^{k+\ell}_{\mathcal{A}}(X,Z) \\ (\rho & , & \sigma) & \longmapsto & \rho \star \sigma \;:=\; \big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \sigma\Psi^\ell(Y,Z)\big)\Psi^{k+\ell}(X,Z)^{-1}\;; \end{array}$$

cf. Definition 190, Bemerkung 188.

Bemerkung 192

(1) *Seien* $\rho \in \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$, $\sigma \in \mathrm{Ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z)$ *und* $\tau \in \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{A}}(Z,W)$. *Dann ist*

$$\rho \star (\sigma \star \tau) \;=\; (\rho \star \sigma) \star \tau \;\in\; \mathrm{Ext}^{k+\ell+m}_{\mathcal{A}}(X,W)\;.$$

(2) *Seien* $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X',X)$, $\rho \in \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *und* $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Y')$. *Dann ist*

$$u\varepsilon(X',X) \star \rho \star v\varepsilon(Y,Y') \;=\; \rho\,\mathrm{Ext}^k(u,v) \;\in\; \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X',Y')\;;$$

cf. Bemerkung 189.

Beweis.

Zu (1). Es ist

$$\begin{array}{cl} & \rho \star (\sigma \star \tau) \\ = & \Big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \big(\big(\sigma\Psi^\ell(Y,Z) \star \tau\Psi^m(Z,W)\big)\Psi^{\ell+m}(Y,W)^{-1}\big)\Psi^{\ell+m}(Y,W)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = & \Big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \big(\sigma\Psi^\ell(Y,Z) \star \tau\Psi^m(Z,W)\big)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = & \Big(\big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \sigma\Psi^\ell(Y,Z)\big) \star \tau\Psi^m(Z,W)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = & \Big(\Big(\big(\rho\Psi^k(X,Y) \star \sigma\Psi^\ell(Y,Z)\big)\Psi^{k+\ell}(X,Z)^{-1}\Big)\Psi^{k+\ell}(X,Z) \star \tau\Psi^m(Z,W)\Big)\Psi^{k+\ell+m}(X,W)^{-1} \\ = & (\rho \star \sigma) \star \tau\;. \end{array}$$

Zu (2). Unter Zuhilfenahme der Rechnung zu (1), Bemerkung 189 und der Natürlichkeit von $\Psi^k(X,Y)$ aus Bemerkung 188 wird

$$\begin{array}{cl} & u\varepsilon(X',X)\star\rho\star v\varepsilon(Y,Y') \\ = & \big(u\varepsilon(X',X)\Psi^0(X',X)\star\rho\Psi^k(X,Y)\star v\varepsilon(Y,Y')\Psi^0(Y,Y')\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\ = & \big(\mathrm{IRes}\,u\star\rho\Psi^k(X,Y)\star\mathrm{IRes}\,v\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\ = & \big(\mathrm{IRes}\,u\cdot\rho\Psi^k(X,Y)\cdot(\mathrm{IRes}\,v)[k]\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\ = & \big(\rho\Psi^k(X,Y)\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(\mathrm{IRes}\,u,(\mathrm{IRes}\,v)[k])\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\ = & \big(\rho\,\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(u,v)\Psi^k(X',Y')\big)\Psi^k(X',Y')^{-1} \\ = & \rho\,\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(u,v)\ . \end{array}$$

□

7.1.5 Ext **und Erweiterungen: das Yoneda-**ext

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Seien X, Y, Z, $W\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Definition 193 Sei $k\geqslant 1$. Sei $\hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ die Menge ([3]) der lang exakten Sequenzen der Form

$$0\longrightarrow Y\longrightarrow M^0\longrightarrow M^1\longrightarrow\cdots\longrightarrow M^{k-2}\longrightarrow M^{k-1}\longrightarrow X\longrightarrow 0\ ,$$

manchmal auch ohne die Nullobjekte notiert.

Es heißen E, $E'\in\hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *elementar äquivalent,* falls ein Diagrammorphismus der folgenden Form existiert, worin E die obere und E' die untere Zeile ist.

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccccccc} Y & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & M^{k-2} & \longrightarrow & M^{k-1} & \longrightarrow & X \\ \| & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \| \\ Y & \longrightarrow & M'^0 & \longrightarrow & M'^1 & \longrightarrow\cdots\longrightarrow & M'^{k-2} & \longrightarrow & M'^{k-1} & \longrightarrow & X \end{array}$$

Darin sind also alle Vierecke kommutativ.

Sei die Äquivalenzrelation $(\sim)$ auf $\hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ erzeugt von der Relation der elementaren Äquivalenz. Informell ausgedrückt, für E, $E'\in\hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ist $E\sim E'$ genau dann, wenn es eine Zickzackverbindung von E nach E' beliebiger endlicher Länge bestehend aus Diagrammorphismen von der Art $(*)$ gibt. Schreibe $[E]$ für die Äquivalenzklasse von E bezüglich $(\sim)$.

Definiere die *Yoneda*-ext-*Menge*

$$\mathrm{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\ :=\ \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)/(\sim)\ =\ \{[E]\ :\ E\in\hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\}\ .$$

Bemerkung 194 Im Fall $k=1$ ist der Morphismus $M^0\longrightarrow M'^0$ in $(*)$ gemäß Schlangenlemma, Lemma 136, ein Isomorphismus. Insbesondere ist diesenfalls $E\sim E'$ genau dann, wenn E und E' elementar äquivalent sind.

Lemma 195 *Seien*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & X'' \arrow[d, "f''"'] \\ K \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y'' \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, equal] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X'' \arrow[d, "\tilde{f}''"'] \\ K \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y'' \end{tikzcd}$$

Morphismen kurz exakter Sequenzen in $\mathcal{A}$. Sei $\tilde{f}'' - f'' = gs$ für ein $X'' \xrightarrow{g} Y$ in $\mathcal{A}$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\wr"'] & X'' \arrow[d, equal] \\ K \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & X'' \end{tikzcd}$$

kurz exakter Sequenzen.

Beweis. Gemäß Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134, sind (X, X'', Y, Y'') und $(\tilde{X}, X'', Y, Y'')$ Quadrate, haben also insbesondere kurz exakte Diagonalsequenzen.

Es genügt, einen Morphismus $X \xrightarrow{x} \tilde{X}$ mit $x\tilde{r} = r$ und $x\tilde{f} = f$ zu finden. Denn dann ist $ix\tilde{r} = ir = 0 = \tilde{i}\tilde{r}$ und $ix\tilde{f} = if = j = \tilde{i}\tilde{f}$, und somit wegen des Monomorphismus $(\tilde{f}\ \tilde{r})$ aus der Diagonalsequenz von $(\tilde{X}, X'', Y, Y'')$ auch $ix = \tilde{i}$; schließlich ist x dank Schlangenlemma, Lemma 136, ein Isomorphismus.

Nun aber haben wir folgendes kommutative Diagramm mit horizontal den kurz exakten Diagonalsequenzen.

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&] X \arrow[r, "(f\ r)"] \& Y \oplus X'' \arrow[r, "\binom{f''}{-s}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] \& Y'' \arrow[d, equal] \\ \tilde{X} \arrow[r, "(\tilde{f}\ \tilde{r})"] \& Y \oplus X'' \arrow[r, "\binom{\tilde{f}''}{-s}"] \& Y'' \end{tikzcd}$$

Sei x der auf den Kernen induzierten Morphismus. $\square$

Satz 196 (Korrespondenz) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $k \geqslant 1$. Wir haben die im folgenden erklärte Bijektion*

$$\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y) \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha^k_{X,Y}}} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)\ .$$

Ist $s \in \mathrm{Z}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y)$, so schreiben wir $[s] := s + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, d^k_{\operatorname{IRes} Y}) \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$; cf. auch Beweis zu Bemerkung 186.

$\overset{\sim}{\longmapsto}$: *Für* $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \in \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *ist* $[E]\alpha^k_{X,Y}$ *wie folgt gegeben. Wähle ein kommutatives Diagramm*

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(eY)^0"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^0 \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1} \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^k \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k+1} \\ Y \arrow[u, equal] \arrow[r] & M^0 \arrow[u] \arrow[r] & M^1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u, "s"'] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

mit E *als unterer Zeile. Es ist* $[E]\alpha^k_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Beachte, daß die Kommutativität des letzten Vierecks in $(**)$ *schon mit Hilfe der Epimorphie von* $M^{k-1} \longrightarrow X$ *und der Kommutativität des vorletzten Vierecks folgt.*

$\overset{\sim}{\longleftarrow\!\!\dashv}$: *Das Bild von* $[s] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *unter* $(\alpha^k_{X,Y})^{-1}$ *ist wie folgt gegeben. Bilde folgendes kommutative Diagramm.*

$$(***)\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(eY)^0"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^0 \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-2} \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1} \arrow[r, two heads, "\bar{d}"] & \mathrm{I}_d \arrow[r, tail, "\dot{d}"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^k \\ Y \arrow[u, equal] \arrow[r, "(eY)^0"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^0 \arrow[u, equal] \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^1 \arrow[u, equal] \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-2} \arrow[u, equal] \arrow[r, "v"] & M^{k-1} \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & & X \arrow[ul] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

Hierbei sei v *dadurch charakterisiert, daß das Diagramm kommutiert und das Kompositum mit* $M^{k-1} \longrightarrow X$ *verschwindet. Sei* E *die untere Zeile des Diagramms. Dann ist* $[s](\alpha^k_{X,Y})^{-1} = [E] \in \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Beachte, daß wegen $\dot{d}$ *monomorph auch* $(M^{k-1}, X, (\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1}, (\mathrm{IRes}\,Y)^k)$ *in* $(***)$ *ein Pullback ist; betrachte etwa seine Diagonalsequenz.*

Beweis.

Zeigen wir, daß $\longmapsto$ *wie angegeben wohldefiniert ist.* Mit demselben Argument wie dem für die Vollheit im Beweis zur Auflösungsäquivalenz, Lemma 149, sehen wir, daß wir ein kommutatives Diagramm $(**)$ wählen können.

Sind zwei solche kommutativen Diagramme $(**)$ gegeben mit E als unterer Zeile, so bilden die Differenzen der vertikalen Morphismen einen Komplexmorphismus von E, aufgefaßt als Komplex, nach $\mathrm{IRes}\,Y$. Nach Bemerkung 148 ist dieser Morphismus nullhomotop. Ist s der aus dem ersten und s' der aus dem zweiten Diagramm $(**)$ resultierende Morphismus, so faktorisiert insbesondere $s - s'$ über $(\mathrm{IRes}\,Y)^{k-1} \xrightarrow{d} (\mathrm{IRes}\,Y)^k$, in anderen Worten, die Bilder von s und s' in $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{IRes}\,Y)$ stimmen überein, i.e. $[s] = [s']$; cf. Aufgabe 65.(1).

Seien nun E, $E' \in \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ mit $E \sim E'$ gegeben. Wir dürfen annehmen, daß E und E' elementar äquivalent sind. Sei s der aus einem gewählten Diagramm $(**)$ mit E als unterer Zeile resultierende Morphismus. Komposition von $(**)$ mit einem Diagramm der Form $(*)$ zeigt, daß s auch aus einem Diagramm mit unterer Zeile E' resultieren kann. Also ist $\longmapsto$ auf $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ wohldefiniert.

Zeigen wir, daß $\longleftarrow\!\!\dashv$ *wie angegeben wohldefiniert ist.* Seien $s,\, \tilde{s} \in \mathrm{Z}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y)$ gegeben, deren Bild in $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y)$ übereinstimmt, i.e. $[s] = [\tilde{s}]$. Sei also $s - \tilde{s} = hd$ für ein $h : X \longrightarrow (\operatorname{IRes} Y)^{k-1}$. Da $sd = 0$, gibt es ein $t : X \longrightarrow \mathrm{I}_d$ mit $t\dot{d} = s$. Da $\tilde{s}d = 0$, gibt es ein $\tilde{t} : X \longrightarrow \mathrm{I}_d$ mit $\tilde{t}\dot{d} = \tilde{s}$. Es ist $(t - \tilde{t})\dot{d} = s - \tilde{s} = hd = h\bar{d}\dot{d}$. Also ist $t - \tilde{t} = h\bar{d}$.

Wir bilden Pullbacks und erhalten mit Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134, und isomorpher Ersetzung folgende Morphismen kurz exakter Sequenzen.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_d \arrow[r, "\dot{d}"] & (\operatorname{IRes} Y)^{k-1} \arrow[r, "\bar{d}"] & \mathrm{I}_d \\
\mathrm{I}_d \arrow[r] \arrow[u, equal] & M^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_d \arrow[r, "\dot{d}"] & (\operatorname{IRes} Y)^{k-1} \arrow[r, "\bar{d}"] & \mathrm{I}_d \\
\mathrm{I}_d \arrow[r] \arrow[u, equal] & \tilde{M}^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[u, "\tilde{t}"']
\end{tikzcd}
$$

Dank Lemma 195 gibt es folgenden Isomorphismus kurz exakter Sequenzen.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_d \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] & X \\
\mathrm{I}_d \arrow[r] \arrow[u, equal] & \tilde{M}^{k-1} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & X \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
$$

Also liefert die Konstruktion $(***)$, i.e. das Zusammenfügen von $(Y, (\operatorname{IRes} Y)^0, \ldots, (\operatorname{IRes} Y)^{k-2}, \mathrm{I}_d)$ mit $(\mathrm{I}_d\,, M^{k-1}, \mathrm{I}_d)$ resp. mit $(\mathrm{I}_d\,, \tilde{M}^{k-1}, \mathrm{I}_d)$, äquivalente untere Zeilen. Also ist $\longleftarrow\!\!\dashv$ auf $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$ wohldefiniert.

Wir erkennen, daß $\longleftarrow\!\!\dashv$*, gefolgt von* $\longmapsto$ *die Identität liefert.*

Zeigen wir, daß $\longmapsto$*, gefolgt von* $\longleftarrow\!\!\dashv$ *die Identität liefert.*

Sei $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \in \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Schreibe kurz $I := \operatorname{IRes} Y$. Anwendung beider Abbildungen liefert folgendes Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
Y \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & I^0 \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & \cdots \arrow[rr] & & I^{k-2} \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & I^{k-1} \arrow[rr] & & I^k \arrow[rr] & & I^{k+1} \\
& Y \arrow[rr] & & I^0 \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & I^{k-2} \arrow[rr] & & \tilde{M}^{k-1} \arrow[rr] \arrow[ul] & & X \arrow[rr] \arrow[ul, "s"'] & & 0 \arrow[ul] \\
Y \arrow[rr] \arrow[uu, equal] \arrow[ur, equal] & & M^0 \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur] & & \cdots \arrow[rr] & & M^{k-2} \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur] & & M^{k-1} \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur, dotted] & & X \arrow[rr] \arrow[uu, "s"] \arrow[ur, equal] & & 0 \arrow[uu] \arrow[ur, equal]
\end{tikzcd}
$$

Die Äquivalenzklasse der unteren Zeile wird insgesamt auf die der mittleren abgebildet. Der Morphismus $M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1}$ ist eindeutig existent bezüglich der Kommutativität von $(M^{k-1}, \tilde{M}^{k-1}, I^{k-1})$ und von $(M^{k-1}, X, \tilde{M}^{k-1}, X)$. Uns bleibt zu zeigen, daß das Viereck $(M^{k-2}, M^{k-1}, I^{k-2}, \tilde{M}^{k-1})$ kommutiert. Zum einen ist

$$
\begin{aligned}
(M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow X) &= (M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \\
&= (M^{k-2} \xrightarrow{0} X) \\
&= (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow X)\,.
\end{aligned}
$$

Zum anderen ist

$$\begin{array}{rcl}(M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow I^{k-1}) & = & (M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow I^{k-1}) \\ & = & (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow I^{k-1}) \\ & = & (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1} \longrightarrow I^{k-1})\ .\end{array}$$

Die Monomorphie des Morphismus $\tilde{M}^{k-1} \longrightarrow X \oplus I^{k-1}$ aus der linksexakten Diagonalsequenz des Pullbacks $(\tilde{M}^{k-1}, X, I^{k-1}, I^k)$ gibt also $(M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1}) = (M^{k-2} \longrightarrow I^{k-2} \longrightarrow \tilde{M}^{k-1})$.

Dieses Argument ist auch im Fall $k = 1$ gültig, sofern wir $(M^{-1} \longrightarrow I^{-1}) := (Y = Y)$ setzen. $\square$

Zusammenfassung 197 Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Sei $k \geqslant 1$.

Stellen wir einmal alle erhaltenen Interpretationen von $\operatorname{Ext}^k(X, Y)$ zusammen.

$$\begin{array}{rcl}\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) & \simeq & \mathrm{H}^k \mathrm{t}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{PRes} X, \operatorname{IRes} Y) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} Y) \\ & \simeq & \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\operatorname{PRes} X, Y) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{Konz} X), (\operatorname{IRes} Y)[k]\big) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{IRes} X), (\operatorname{IRes} Y)[k]\big) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{PRes} X), (\operatorname{Konz} Y)[k]\big) \\ & \simeq & \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{PRes} X), (\operatorname{PRes} Y)[k]\big) \\ & \simeq & \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\end{array}$$

Cf. Beispiel 181.(1), Korollar 187, Bemerkung 188, Satz 196 und duale Aussagen.

Im allgemeinen ist aber natürlich $\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \not\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}\big((\operatorname{Konz} X), (\operatorname{Konz} Y)[k]\big)$. Um diese Isomorphie zu erhalten, muß die Homotopiekategorie $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ noch durch die sogenannte *derivierte Kategorie* $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ ersetzt werden, die aus $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ durch formales Invertieren der Quasiisomorphismen hervorgeht, also durch einen Prozeß ähnlich dem in §7.2 unten beschriebenen.

Bemerkung 198 (Funktorialität) *Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Seien $X' \xrightarrow{x} X$ und $Y \xrightarrow{y} Y'$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Sei $k \geqslant 1$. Kommutiere*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[r, "\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y)"] \arrow[d, "\alpha^k_{X,Y}"', "\wr"] & \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X',Y') \arrow[d, "\wr"', "\alpha^k_{X',Y'}"] \\ \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) \arrow[r, "\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y)"] & \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X',Y')\ , \end{tikzcd}$$

i.e. definiere $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y) := \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y)(\alpha^k_{X',Y'})^{-1}$.

Schreibe $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,Y) := \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, \mathrm{id}_Y)$ *und* $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,y) := \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_X,\, y)$.

Sei $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \longrightarrow X) \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ *gegeben.*

(1) *Es wird* $[E]\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,y)$ *repräsentiert durch die untere Zeile des folgenden kommutativen Diagramms.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, "y"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & M^0 \arrow[r] \arrow[d] & M^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r] & M'^0 \arrow[r] & M^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Der Pushout ist beliebig gewählt. Es ist $M'^0 \longrightarrow M^1$ *charakterisiert durch die Kommutativität von* (M^0, M^1, M'^0, M^1) *und durch* $(Y' \longrightarrow M'^0 \longrightarrow M^1) = (Y' \xrightarrow{0} M^1)$.

(2) *Es wird* $[E]\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,Y)$ *repräsentiert durch die untere Zeile des folgenden kommutativen Diagramms.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] & M^0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-2} \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r] & X \\
Y \arrow[r] \arrow[u, equal] & M^0 \arrow[r] \arrow[u, equal] & \cdots \arrow[r] & M^{k-2} \arrow[r] \arrow[u, equal] & M'^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X' \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

Der Pullback ist beliebig gewählt. Es ist $M^{k-2} \longrightarrow M'^{k-1}$ *charakterisiert durch die Kommutativität von* $(M^{k-2}, M'^{k-1}, M^{k-2}, M^{k-1})$ *und durch* $(M^{k-2} \longrightarrow M'^{k-1} \longrightarrow X') = (M^{k-2} \xrightarrow{0} X')$.

(3) *Es ist* $\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,y) = \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,y)\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,Y') = \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x,Y)\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X',y)$.

Beweis.

Zu (1). Zunächst bemerken wir, daß das Diagramm wie in (1) behauptet existiert und auch seine untere Zeile E' lang exakt ist; cf. Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134°.

Schreibe $I := \operatorname{IRes} Y$ und $I' := \operatorname{IRes} Y'$. Sei pars pro toto $k = 2$. Konstruiere weiter zu folgendem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Y \arrow[rr] \arrow[dl, "y"'] \arrow[dd, equal] & & M^0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & M^1 \arrow[rr] \arrow[dl, equal] \arrow[dd] & & X \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "s"] \\
Y' \arrow[rr] \arrow[dd, equal] & & M'^0 \arrow[rr] \arrow[dd] & & M^1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd, "s\tilde{y}" near start] & \\
& Y \arrow[rr, "(eY)^0" near start] \arrow[dl, "y"'] & & I^0 \arrow[rr] \arrow[dl] & & I^1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & I^2 \arrow[dl, "\tilde{y}"] \\
Y' \arrow[rr, "(eY')^0"] & & I'^0 \arrow[rr] & & I'^1 \arrow[rr] & & I'^2 &
\end{tikzcd}$$

Hierbei entstammen die Morphismen $I^i \longrightarrow J^i$ für $i \in [0,2]$ einem Repräsentanten von $\operatorname{IRes} y$; cf. Definition 160, cf. auch Treuheit im Beweis zu Lemma 149.

Ferner sei der Morphismus $M'^0 \longrightarrow I'^0$ vom Pushout induziert. Das Viereck (M'^0, M^1, I'^0, I'^1) kommutiert, da dies nach Vorkomposition mit $Y' \longrightarrow M'^0$ und mit $M^0 \longrightarrow M'^0$ der Fall ist.

Es ist $[E]\alpha^2_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Es ist $[s] \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, y) = [s]\mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \operatorname{IRes} y) = [s\tilde{y}] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I') = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, Y')$; cf. Definition 159.

Die Vorderseite des Diagramms zeigt, daß $[E']\alpha^2_{X,Y'} = [s\tilde{y}]$.

Zu (2). Zunächst bemerken wir, daß das Diagramm wie in (2) behauptet existiert und auch seine untere Zeile E' lang exakt ist; cf. Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134.

Schreibe $I := \operatorname{IRes} Y$. Konstruiere weiter zu folgendem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \\
Y \arrow[u, equal] \arrow[r] & M^0 \arrow[u] \arrow[r] & M^1 \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u, "s"'] \\
Y \arrow[u, equal] \arrow[r] & M^0 \arrow[u, equal] \arrow[r] & M'^1 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & X' \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

Es ist $[E]\alpha^2_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Es ist $[s] \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(x, Y) = [s]\mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(x, \operatorname{IRes} Y) = [xs] \in \mathrm{H}^2 \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X', I) = \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X', Y)$. Durch Betrachtung der oberen und der unteren Zeile erkennen wir, daß $[E']\alpha^2_{X',Y} = [xs]$.

Zu (3). Für die erste Gleichheit rechnen wir

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, y) & = & \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x, y)(\alpha^k_{X',Y'})^{-1} \\
& = & \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, y) \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x, Y')(\alpha^k_{X',Y'})^{-1} \\
& = & \alpha^k_{X,Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, y)\alpha^k_{X,Y'}(\alpha^k_{X,Y'})^{-1} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(x, Y')(\alpha^k_{X',Y'})^{-1} \\
& = & \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, y) \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(x, Y') \,.
\end{array}$$

Für die zweite Gleichheit entsprechend. ▫

Beispiel 199 (Negation) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei $k \geqslant 1$. Schreibe $I := \operatorname{IRes} Y$.

Sei $E = (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \xrightarrow{r} X) \in \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Sei

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \arrow[r, "d"] & I^{k+1} \\
Y \arrow[u, equal] \arrow[r] & M^0 \arrow[u, "f^0"'] \arrow[r] & M^1 \arrow[u, "f^1"'] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[u, "f^{k-1}"'] \arrow[r, "r"] & X \arrow[u, "s"'] \arrow[r] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Es ist $[E]\alpha^k_{X,Y} = [s] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I)$. Nun ist auch

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \arrow[r, "d"] & I^{k+1} \\
Y \arrow[u, equal] \arrow[r] & M^0 \arrow[u, "f^0"'] \arrow[r] & M^1 \arrow[u, "f^1"'] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[u, "f^{k-1}"'] \arrow[r, "-r"] & X \arrow[u, "-s"'] \arrow[r] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Schreibe $E' := (Y \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k-2} \longrightarrow M^{k-1} \xrightarrow{-r} X)$. Letzteres kommutative Diagramm zeigt, daß

$$[E']\alpha^k_{X,Y} \;=\; [-s] \;=\; -[s] \;=\; -([E]\alpha^k_{X,Y})\;.$$

Beispiel 200 (Addition) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Sei $k \geqslant 1$. Schreibe $I := \mathrm{IRes}\, Y$. Seien

$$\begin{array}{rcl} E &=& (Y \xrightarrow{i} M^0 \xrightarrow{m} M^1 \xrightarrow{m} \cdots \xrightarrow{m} M^{k-2} \xrightarrow{m} M^{k-1} \xrightarrow{r} X) \;\in\; \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\;, \\ \tilde{E} &=& (Y \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{M}^0 \xrightarrow{\tilde{m}} \tilde{M}^1 \xrightarrow{\tilde{m}} \cdots \xrightarrow{\tilde{m}} \tilde{M}^{k-2} \xrightarrow{\tilde{m}} \tilde{M}^{k-1} \xrightarrow{\tilde{r}} \tilde{X}) \;\in\; \hat{\mathrm{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\;. \end{array}$$

Seien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(eY)^0"] & I^0 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \\ Y \arrow[u, equal] \arrow[r, "i"] & M^0 \arrow[u, "f^0"'] \arrow[r, "m"] & \cdots \arrow[r, "m"] & M^{k-1} \arrow[u, "f^{k-1}"'] \arrow[r, "m"] & X \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(eY)^0"] & I^0 \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & I^{k-1} \arrow[r, "d"] & I^k \\ Y \arrow[u, equal] \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{M}^0 \arrow[u, "\tilde{f}^0"'] \arrow[r, "\tilde{m}"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{m}"] & \tilde{M}^{k-1} \arrow[u, "\tilde{f}^{k-1}"'] \arrow[r, "\tilde{m}"] & X \arrow[u, "\tilde{s}"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Es ist $[E]\alpha^k_{X,Y} = [s]$ und $[\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y} = [\tilde{s}]$ in $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

Beachte, daß die direkte Summe zweier lang exakter Sequenzen e.g. nach Aufgabe 72.(1) oder nach Aufgabe 71.(2) lang exakt ist.

Schreibe $\hat{I} := \mathrm{IRes}(Y \oplus Y)$. Wähle ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \oplus Y \arrow[r, "(e(Y\oplus Y))^0"] & \hat{I}^0 \arrow[r, "d"] & \hat{I}^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \\ Y \oplus Y \arrow[u, equal] \arrow[r, "\begin{pmatrix} (eY)^0 & 0 \\ 0 & (eY)^0 \end{pmatrix}"] & I^0 \oplus I^0 \arrow[u, "b^0"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & I^1 \oplus I^1 \arrow[u, "b^1"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & \cdots \\ Y \oplus Y \arrow[u, equal] \arrow[r, "(e(Y\oplus Y))^0"] & \hat{I}^0 \arrow[u, "a^0"] \arrow[r, "d"] & \hat{I}^1 \arrow[u, "a^1"] \arrow[r, "d"] & \cdots\;, \end{tikzcd}$$

so daß [sic] ab und ba in der Homotopiekategorie Identitäten sind; cf. Beweise zu Voll- und Treuheit für Lemma 149. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} (eY)^0 & 0 \\ 0 & (eY)^0 \end{pmatrix}"] & I^0 \oplus I^0 \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & \cdots \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & I^{k-1} \oplus I^{k-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & I^k \oplus I^k \arrow[r, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}"] & \cdots \\ Y \oplus Y \arrow[u, equal] \arrow[r, "\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \tilde{i} \end{pmatrix}"] & M^0 \oplus \tilde{M}^0 \arrow[u, "\begin{pmatrix} f^0 & 0 \\ 0 & \tilde{f}^0 \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{pmatrix}"] & \cdots \arrow[r, "\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{pmatrix}"] & M^{k-1} \oplus \tilde{M}^{k-1} \arrow[u, "\begin{pmatrix} f^{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{f}^{k-1} \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \tilde{r} \end{pmatrix}"] & X \oplus X\;, \arrow[u, "\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{pmatrix}"'] \end{tikzcd}$$

dessen untere Zeile wir mit $E \oplus \tilde{E}$ bezeichnen, zeigt, daß $[E \oplus \tilde{E}]\alpha^k_{X\oplus X,\,Y\oplus Y} = [\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X \oplus X, \hat{I}) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X \oplus X, Y \oplus Y)$.

Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "(eY)^0"] & I^0 \arrow[r, "d"] & I^1 \arrow[r, "d"] & \cdots \\
Y \oplus Y \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} (eY)^0 & 0 \\ 0 & (eY)^0 \end{smallmatrix}\right)"] & I^0 \oplus I^0 \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)"] & I^1 \oplus I^1 \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

zeigt, daß $\operatorname{IRes}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ durch $a\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ repräsentiert wird; cf. Definition 160, Treuheit im Beweis zu Lemma 149.

Nun kommt $[\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X \oplus X, \hat{I}) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X \oplus X, Y \oplus Y)$ unter

$$\operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \;=\; \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}), \operatorname{IRes}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \;=\; \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}), a\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$$

auf $[(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix})\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] = [(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] \in \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Da $I \oplus I \xrightarrow{ba} I \oplus I$ und $I \oplus I \xrightarrow{\mathrm{id}} I \oplus I$ in der Homotopiekategorie denselben Morphismus repräsentieren, gilt das auch für $ba\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, und somit stimmen die Abbildungen $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, ba\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ und $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ überein; cf. §5.3 und Bemerkung 144. Erstere schickt $[(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix})]$ auf $[(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)]$, zweitere auf $[(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix})\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] = [s + \tilde{s}] = [s] + [\tilde{s}] = [E]\alpha^k_{X,Y} + [\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y}$ in $\mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, I) = \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Zusammenfassend haben wir ausgerechnet, daß

$$\begin{aligned}
[E \oplus \tilde{E}]\alpha^k_{X\oplus X,\,Y\oplus Y} \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) &= [\left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{smallmatrix}\right) b^k] \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \\
&= [(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix}) b^k a^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] \\
&= [(\begin{smallmatrix} s & \tilde{s} \end{smallmatrix})\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)] \\
&= [s] + [\tilde{s}] \\
&= [E]\alpha^k_{X,Y} + [\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y}\ .
\end{aligned}$$

Bilde folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & \tilde{i} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & M^0 \oplus \tilde{M}^0 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d] & M^1 \oplus \tilde{M}^1 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] & M^{k-2} \oplus \tilde{M}^{k-2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & M^{k-1} \oplus \tilde{M}^{k-1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & \tilde{r} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & X \oplus X \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\llcorner"] & X \oplus X \\
Y \arrow[r] & N^0 \arrow[r] & N^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & N^{k-2} \arrow[r] & N^{k-1} \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[u, "(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix})"']
\end{tikzcd}$$

Gemäß Bemerkung 198 ist seine untere Zeile $\hat{E}$ ein Repräsentant von

$$[E \oplus \tilde{E}] \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \end{smallmatrix}), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \;\in\; \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X, Y)\ .$$

Insgesamt ist also

$$[\hat{E}]\alpha^k_{X,Y} \;=\; [E]\alpha^k_{X,Y} + [\tilde{E}]\alpha^k_{X,Y}\;;$$

cf. Bemerkung 198. Man nennt $[\hat{E}]$ auch die *Baersumme* von $[E]$ und $[\tilde{E}]$.

Beispiel 201 (Konnektor) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive und genügend Projektive. Sei

$$Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$$

eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Schreibe $P := \operatorname{PRes} X$.

Wir haben die kurz exakte Sequenz $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y') \xrightarrow{(-)j} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y) \xrightarrow{(-)s} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$. Nach Aufgabe 85 ist die lang exakte Homologiesequenz auf dieser isomorph zur lang exakten $\mathrm{R}^*\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,-) = \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{A}}(X,-)$-Sequenz auf (Y',Y,Y'').

Sei $k \geqslant 1$. Sei $\mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'') \xrightarrow{\partial := \partial^k_{(-)j,(-)s}} \mathrm{H}^{k+1}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')$ der Konnektor unserer lang exakten Homologiesequenz an dieser Stelle.

Nach Satz 196° haben wir den dort konstruierten Isomorphismus

$$\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y'') \xrightarrow[\sim]{\beta^k_{X,Y''}} \mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$$

Sei

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y'') \arrow[r, "\partial^{\mathrm{Yon}}"] \arrow[d, "\beta^k_{X,Y''}"', "\wr"] & \operatorname{ext}^{k+1}_{\mathcal{A}}(X,Y') \arrow[d, "\beta^{k+1}_{X,Y'}", "\wr"'] \\
\mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'') \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{H}^{k+1}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Wir wollen $-\partial^{\mathrm{Yon}}$ berechnen. Sei hierzu

$$E \;=\; (Y'' \xrightarrow{i} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y'')$$

gegeben. Bilde ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{k+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\
& 0 \arrow[r] & Y'' \arrow[r, "i"] & M_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Es ist $[E]\beta^k_{X,Y''} = [t] \in \mathrm{H}^k\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$.

Nun ist ∂ der Konnektor folgender Schlangenlemmasequenz; cf. §5.4.4.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^k(P,Y') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^k(P,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^k(P,Y'') \arrow[d] \arrow[dddll, dotted, bend left, "\partial"] \\
\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y') \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y) \arrow[r, "\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,s)"] \arrow[d, "\hat{d}^k_{(P,Y)}"'] & \tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y'') \arrow[d] \\
\mathrm{Z}^{k+1}(P,Y') \arrow[r, "\mathrm{Z}^{k+1}(P,j)"] \arrow[d] & \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y'') \arrow[d] \\
\mathrm{H}^{k+1}(P,Y') \arrow[r] & \mathrm{H}^{k+1}(P,Y) \arrow[r] & \mathrm{H}^{k+1}(P,Y'')
\end{tikzcd}$$

Bilde ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
& P_{k+1} \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "v"'] & P_k \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, "t"] \\
Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y''
\end{tikzcd}$$

Beachte hierbei, daß $vs = dt = 0$.

Das Bild von u in $\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y)$ wird also in unserem Schlangenlemmadiagramm horizontal auf das Bild von t in $\tilde{\mathrm{Z}}^k(P,Y'')$ und vertikal auf $v \in \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y)$ abgebildet. Schließlich wird $w \in \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y')$ horizontal auf $v \in \mathrm{Z}^{k+1}(P,Y)$ abgebildet.

Gemäß Aufgabe 86 bildet $-\partial$ also das Bild von t in $\mathrm{H}^k(P,Y'') = \mathrm{H}^k \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y'')$ auf das Bild von w in $\mathrm{H}^{k+1}(P,Y') = \mathrm{H}^{k+1} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')$ ab.

Betrachte folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
P_{k+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "w"'] & P_k \arrow[rr] \arrow[d, "u"'] \arrow[ddr, "t"] & & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[dr, "s"'] & & M_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & X \\
& & Y'' \arrow[ur, "i"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Dieses zeigt, daß die Äquivalenzklasse von $(Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{si} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X)$ unter $\beta^{k+1}_{X,Y'}$ auf das Bild von w in $\mathrm{H}^{k+1} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y')$ kommt.

Alles in allem bildet $-\partial^{\mathrm{Yon}}$ also die Äquivalenzklasse von

$$(Y'' \xrightarrow{i} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X, Y'')$$

auf die Äquivalenzklasse von

$$(Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{si} M_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow X) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^{k+1}_{\mathcal{A}}(X, Y')$$

ab. Kurz, dazu muß $Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$ von links an einen Repräsentanten angefügt werden.

Beispiel 202 (Produkte) Habe $\mathcal{A}$ genügend Injektive. Seien $k,\, \ell \geqslant 1$.

Strukturtransport gibt uns die mißbräuchlich wieder mit $(\star)$ bezeichnete $\mathbf{Z}$-bilineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccl} \operatorname{ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y) & \times & \operatorname{ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z) & \xrightarrow{(\star)} & \operatorname{ext}^{k+\ell}_{\mathcal{A}}(X,Z) \\ ([E] & , & [F]) & \longmapsto & [E]\star[F] \;:=\; \big([E]\alpha^k_{X,Y}\star[F]\alpha^\ell_{Y,Z}\big)(\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1}\;; \end{array}$$

cf. Definition 191, Satz 196.

Wie wollen einen Repräsentanten von $[E]\star[F]$ berechnen. Schreibe hierzu

$$\begin{array}{rcl} E & = & (Y \xrightarrow{i} M^0 \xrightarrow{m} M^1 \xrightarrow{m} \cdots \xrightarrow{m} M^{k-2} \xrightarrow{m} M^{k-1} \xrightarrow{r} X) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)\;, \\ F & = & (Z \xrightarrow{j} N^0 \xrightarrow{n} N^1 \xrightarrow{n} \cdots \xrightarrow{n} N^{\ell-2} \xrightarrow{n} N^{\ell-1} \xrightarrow{s} Y) \;\in\; \hat{\operatorname{ext}}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z)\;. \end{array}$$

Schreibe $I := \operatorname{IRes} X$, $J := \operatorname{IRes} Y$ und $K := \operatorname{IRes} Z$.

Fall $k \geqslant 1$ und $\ell \geqslant 1$. Sei pars pro toto $k = 2$ und $\ell = 2$. Konstruiere ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M^0 \arrow[r, "m"] \arrow[d] & M^1 \arrow[r, "r"] \arrow[d] & X \arrow[r, "(eX)^0"] \arrow[dr, "u"] & I^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & I^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \cdots \\
Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & N^0 \arrow[r, "n"] \arrow[d] & N^1 \arrow[r, "s"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "(eY)^0"] \arrow[dr, "v"] & J^0 \arrow[r, "(-1)^k d"] \arrow[d] & J^1 \arrow[rr, "(-1)^k d"] \arrow[d] & & J^2 \arrow[r, "(-1)^k d"] \arrow[d, "f"'] & J^3 \arrow[r, "(-1)^k d"] \arrow[d] & \cdots \\
Z \arrow[r, "(eZ)^0"] & K^0 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & K^1 \arrow[rr, "(-1)^{k+\ell} d"] & & K^2 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & K^3 \arrow[rr, "(-1)^{k+\ell} d"] & & K^4 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & K^5 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell} d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beachte, daß die Kommutativität eines Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & A^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & A^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^0"'] & A^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^1"'] & A^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g^2"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & B^{-1} \arrow[r, "d"] & B^0 \arrow[r, "d"] & B^1 \arrow[r, "d"] & B^2 \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$ äquivalent ist zur Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & A^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "-g^{-1}"'] & A^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "+g^0"'] & A^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "-g^1"'] & A^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "+g^2"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "-d"] & B^{-1} \arrow[r, "-d"] & B^0 \arrow[r, "-d"] & B^1 \arrow[r, "-d"] & B^2 \arrow[r, "-d"] & \cdots\;.
\end{tikzcd}$$

Somit ist $[E]\alpha^k_{X,Y} = (-1)^{k\cdot k}[u] \in \operatorname{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)$ und $[F]\alpha^\ell_{Y,Z} = (-1)^{\ell\cdot(k+\ell)}[v] \in \operatorname{Ext}^\ell_{\mathcal{A}}(Y,Z)$.

Nach Entfernen aller Objekte nicht aus I, J oder K erkennen wir im Diagramm oben $[u]\Psi^k(X,Y)$ und unten $[v]\Psi^\ell(Y,Z)[k]$; cf. Bemerkung 188. Nun kommt

$$[u]\Psi^k(X,Y) \star [v]\Psi^\ell(Y,Z) \;=\; [u]\Psi^k(X,Y)\cdot[v]\Psi^\ell(Y,Z)[k]$$

unter $\Psi^{k+\ell}(X,Z)^{-1}$ auf $[uf]$ in $\operatorname{Ext}^{k+\ell}_{\mathcal{A}}(X,Z)$. Insgesamt ist $[u]\star[v] = [uf]$; cf. Definition 191.

Zusammengesetzt ergibt sich folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & N^0 \arrow[r, "n"] \arrow[d] & N^1 \arrow[r, "si"] \arrow[d] & M^0 \arrow[r, "m"] \arrow[d] & M^1 \arrow[r, "r"] \arrow[d] & X \arrow[d, "uf"] \\
Z \arrow[r, "(eZ)^0"] & K^0 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^1 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^2 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^3 \arrow[r, "(-1)^{k+\ell}d"] & K^4
\end{tikzcd}$$

Dieses zeigt, daß mit

$$G \;:=\; (Z \xrightarrow{j} N^0 \xrightarrow{n} N^1 \xrightarrow{si} M^0 \xrightarrow{m} M^1 \xrightarrow{r} X)$$

die Äquivalenzklasse $[G]$ unter $\alpha^{k+\ell}_{X,Z}$ auf $(-1)^{(k+\ell)\cdot(k+\ell)}[uf]$ abgebildet wird. Wir erhalten so insgesamt

$$\begin{array}{rcl}
[E]\star[F] & = & ([E]\alpha^k_{X,Y}\star[F]\alpha^\ell_{Y,Z})(\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1} \\
& = & (-1)^{k\cdot k+\ell\cdot(k+\ell)}([u]\star[v])(\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1} \\
& = & (-1)^{k\cdot k+\ell\cdot(k+\ell)}[uf](\alpha^{k+\ell}_{X,Z})^{-1} \\
& = & (-1)^{k\cdot k+\ell\cdot(k+\ell)+(k+\ell)\cdot(k+\ell)}[G] \\
& = & (-1)^{k\cdot\ell}[G]\;.
\end{array}$$

Gehen wir zurück zum allgemeinen Fall, so erkennen wir, daß mit

$$G \;:=\; (\underbrace{Z \xrightarrow{j} N^0 \xrightarrow{n} \cdots \xrightarrow{n} N^{\ell-1}}_{\text{aus } F} \xrightarrow{si} \underbrace{M^0 \xrightarrow{m} \cdots \xrightarrow{m} M^{k-1} \xrightarrow{r} X}_{\text{aus } E})$$

gilt, daß

$$[E]\star[F] \;=\; (-1)^{k\cdot\ell}[G]\;.$$

Warum aber $[E]\star[(Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'')]$ in Beispiel 201 bis auf Vorzeichen das Bild von $[E]$ unter dem Konnektor ist, ist mir unklar. Obige Rechnungen liefern dies eben.

7.2 Lokalisierung an einer dicken Teilkategorie

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

7.2.1 Dicke Teilkategorien $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$

Definition 203 Eine volle Teilkategorie $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ heiße *dick,* falls sie ein Nullobjekt von $\mathcal{A}$ enthält, und falls für jede kurz exakte Sequenz $X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ in $\mathcal{A}$ genau dann das mittlere Objekt X in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegt, wenn die beiden äußeren Objekte X' und X'' in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegen.

Split kurz exakte Sequenzen zeigen, daß eine dicke Teilkategorie insbesondere eine volle additive Teilkategorie ist; cf. Definition 108. Ist ferner $X' \simeq X$ in $\mathcal{A}$, so ist genau dann $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, wenn $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Ferner ist eine dicke Teilkategorie $\mathcal{N}$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ selbst wieder abelsch, und der Inklusionsfunktor $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{A}$ ist exakt. In der Tat können Kerne und Cokerne in $\mathcal{N}$ bereits in $\mathcal{A}$ gebildet werden, die erforderlichen Eigenschaften vererben sich dann aus $\mathcal{A}$.

Ein Morphismus in $\mathcal{A}$, welcher einen Kern aus $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ und einen Cokern aus $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ hat, heiße $\mathcal{N}$-*Quasiisomorphismus*, symbolisch oft $X \Longrightarrow Y$ geschrieben ([8]). Es ist dann jeder Kern und jeder Cokern eines $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Beispiel 204

(1) Sei R ein Ring. Sei $\mathcal{A} = R$-Mod. Sei $M \subseteq R$ eine Teilmenge. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ die volle Teilkategorie der R-Linksmoduln X, für die ein $k \geqslant 0$ so existiert, daß $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k \cdot x = 0$ für alle $m_1\,, m_2\,, \ldots\,, m_k \in M$ und alle $x \in X$.

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Es ist $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$.

Sei zum einen $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $k \geqslant 0$ so, daß $m_1 \cdots m_k \cdot x = 0$ für alle $m_1\,, \ldots\,, m_k \in M$ und alle $x \in X$.

Sei $x' \in X'$. Seien $m_1\,, \ldots\,, m_k \in M$ gegeben. Dann ist $(m_1 \cdots m_k \cdot x')i = m_1 \cdots m_k \cdot (x'i) = 0$ und folglich $m_1 \cdots m_k \cdot x' = 0$. Also ist $X' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Sei $x'' \in X''$. Seien $m_1\,, \ldots\,, m_k \in M$ gegeben. Wähle $x \in X$ mit $xr = x''$. Dann ist $m_1 \cdots m_k \cdot x'' = m_1 \cdots m_k \cdot (xr) = (m_1 \cdots m_k \cdot x)r = 0$. Also ist $X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Seien zum anderen $X', X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $k' \geqslant 0$ so, daß $m_1 \cdots m_{k'} \cdot x' = 0$ für alle $m_1\,, \ldots\,, m_{k'} \in M$ und alle $x' \in X'$. Sei $k'' \geqslant 0$ so, daß $m_1 \cdots m_{k''} \cdot x'' = 0$ für alle $m_1\,, \ldots\,, m_{k''} \in M$ und alle $x'' \in X''$. Sei $x \in X$. Seien $m_1, \ldots, m_{k'+k''} \in M$. Es ist $(m_{k'+1} \cdots m_{k'+k''} \cdot x)r = m_{k'+1} \cdots m_{k'+k''} \cdot (xr) = 0$ und folglich $m_{k'+1} \cdots m_{k'+k''} \cdot x = x'i$ für ein $x' \in X'$. Nun ist $m_1 \cdots m_{k'+k''} \cdot x = m_1 \cdots m_{k'} \cdot (x'i) = (m_1 \cdots m_{k'} \cdot x')i = 0$. Also ist $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

[8] Nicht mit einer Identität oder einer Implikation verwechseln.

(2) Sei R ein Ring. Sei $\mathcal{A} = R$-Mod. Sei $M \subseteq R$ eine nichtleere Teilmenge so, daß $m \cdot m' \in M$ für alle $m, m' \in M$. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ die volle Teilkategorie der R-Linksmoduln X, für die ein $m \in M$ existiert mit $mx = 0$ für alle $x \in X$; kurz, mit $mX = 0$.

Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Es ist $0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$.

Sei zum einen $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Sei $m \in M$ so, daß $mX = 0$.

Sei $x' \in X'$. Es ist $(mx')i = m(x'i) = 0$, und also $mx' = 0$. Also ist $mX' = 0$, und mithin $X' \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$.

Sei $x'' \in X''$. Wähle $x \in X$ mit $xr = x''$. Dann ist $mx'' = m(xr) = (mx)r = 0$. Also ist $mX'' = 0$ und mithin $X'' \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$.

Seien zum anderen $X', X'' \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Sei $m' \in M$ so, daß $mX' = 0$. Sei $m'' \in M$ so, daß $m''X'' = 0$. Sei $x \in X$. Es ist $(m''x)r = m''(xr) = 0$. Also gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'i = m''x$. Es wird $m'm''x = m'(x'i) = (m'x')i = 0$. Also ist $m'm''X = 0$ und wegen $m'm'' \in M$ mithin $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$.

(3) Sei R ein Ring. Sei $M \subseteq R$ eine Teilmenge. Sei $\mathcal{A} \subseteq R$-Mod die volle Teilkategorie der als Mengen endlichen R-Linksmoduln. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ die durch

$$\operatorname{Ob} \mathcal{N} \;:=\; \{X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A} \;:\; X \longrightarrow X,\; x \longmapsto mx \text{ ist bijektiv für alle } m \in M\}$$

gegebene volle Teilkategorie. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Es ist $0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Wir betrachten den Morphismus

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "m\cdot(-)"'] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "m\cdot(-)"'] & X'' \arrow[d, "m\cdot(-)"'] \\
X' \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "r"] & X''
\end{tikzcd}$$

kurz exakter Sequenzen abelscher Gruppen für $m \in M$.

Sind $X', X'' \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, so haben wir außen zwei vertikale Isomorphismen für $m \in M$. Es zeigt das Schlangenlemma, Lemma 136, daß dann auch der mittlere vertikale Morphismus ein Isomorphismus ist für $m \in M$. Also ist auch $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$.

Ist $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, so haben wir in der Mitte einen vertikalen Isomorphismus für $m \in M$. Es folgt wieder mit dem Schlangenlemma (oder mit Komposition), daß dann der linke vertikale Morphismus monomorph und der rechte epimorph ist. Da aber X' und X'' endlich sind, folgt hieraus, daß außen zwei vertikale Isomorphismen stehen für $m \in M$. Also sind auch $X', X'' \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$.

(4) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$-Mod. Sei darin $\mathcal{N} = \mathbf{Z}$-mod die Kategorie der endlich erzeugten $\mathbf{Z}$-Moduln; cf. Aufgabe 15. Gemäß Aufgabe 87 ist $\mathbf{Z}$-mod eine dicke Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod.

(5) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$-mod; cf. (4). Sei $\mathcal{N} = \mathbf{Z}$-fin $\subseteq \mathbf{Z}$-mod die volle Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}$-Moduln.

Sei $M = \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$. Es ist $\mathcal{N}$ gerade die volle Teilkategorie der endlich erzeugten $\mathbf{Z}$-Moduln X, für die ein $m \in M$ so existiert, daß $mX = 0$; cf. Aufgabe 18. Das Argument aus (2) zeigt, daß $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{A}$ ist.

Diese Dickheit von $\mathcal{N}$ kann man auch direkt sehen, verwendet man die Tatsache, daß in einer kurz exakten Sequenz $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ von $\mathbf{Z}$-Moduln mit X' und X'' endlich gilt, daß $|X| = |X'||X''|$. In der Tat ist für alle $x'' \in X''$ nach Wahl eines $x \in X$ mit $xr = x''$ die Abbildung $X' \longrightarrow r^{-1}(\{x''\})$, $x' \longmapsto x'i + x$ bijektiv.

7.2.2 Eigenschaften von $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen

Sei $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

Bemerkung 205 *Ist* $\cdots \longrightarrow X_{i-1} \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1} \longrightarrow \cdots$ *eine lang exakte Sequenz, ist* $i \in \mathbf{Z}$ *und sind* X_{i-1}, $X_{i+1} \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, *so ist auch* $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

Beweis. Wähle Faktorisierungen

$$X_{i-2} \twoheadrightarrow J' \rightarrowtail X_{i-1} \twoheadrightarrow I' \rightarrowtail X_i \twoheadrightarrow I'' \rightarrowtail X_{i+1} \twoheadrightarrow J'' \rightarrowtail X_{i+2}\ ;$$

cf. Definition 130. Da $X_{i-1} \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, ist auch $I' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Da $X_{i+1} \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, ist auch $I'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Da I', $I'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, ist auch $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. □

Bemerkung 206 *Sei* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *in* $\mathcal{A}$ *gegeben. Sind aus* f, g, fg *zweie* $\mathcal{N}$*-Quasiisomorphismen, so alle.*

Beweis. Wir haben folgendes Umfangssequenzdiagramm; cf. Lemma 132.

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[rr] \arrow[dr, tail, "k"] & & C \arrow[ddrr] & & \\
 & & & Y \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[dr, "g"] & & & \\
L \arrow[uurr] \arrow[rr, tail, "j"] & & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "fg"] & & Z \arrow[rr, two heads, "q"] \arrow[dr, two heads, "r"] & & D \arrow[dl, two heads] \\
 & K \arrow[ul, tail] \arrow[ur, tail, "i"] & & & & E &
\end{tikzcd}$$

Sind f und g zwei $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen, so sind K, M, C, $E \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Mit Bemerkung 205 folgt, daß auch L und D in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegen und somit fg ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist.

Sind f und fg zwei $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen, so sind K, L, C, $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Mit Bemerkung 205 folgt, daß auch M und E in $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$ liegen und somit g ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist.

Dual dazu, sind fg und g zwei $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen, so auch f. ▫

Bemerkung 207 *Sei*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

ein Pullback in $\mathcal{A}$. Ist f' ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, so auch f.

Beweis. Tragen wir horizonal Kerne und Cokerne ein, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm wie folgt; cf. Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\bullet" marking] \arrow[d, "\wr"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[r, "|" marking] \arrow[d] & C \arrow[d, "\bullet" marking] \\ K' \arrow[r, "\bullet" marking] & X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "|" marking] & C' \end{tikzcd}$$

Ist f' ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, dann sind K', $C' \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Folglich sind auch K, $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Somit ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. ▫

Bemerkung 208 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Genau dann gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $Y \overset{y}{\Longrightarrow} Y'$ mit $fy = 0$, wenn $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.*

Beweis. Sei $(\, X \xrightarrow{f} Y \overset{y}{\Longrightarrow} Y' \,) = (X \xrightarrow{0} Y')$ gegeben. Da y ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist, ist $\mathrm{K}_y \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Da $\dot{f}y = 0$, gibt es ein g mit $g\iota_y = \dot{f}$. Wegen Komposition ist g monomorph. Also ist auch $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{K}_y \arrow[dr, "\iota_y", "\bullet" marking] & & \\ X \arrow[r, "\bar{f}", "|" marking] & \mathrm{I}_f \arrow[u, "g", "\bullet" marking] \arrow[r, "\dot{f}", "\bullet" marking] & Y \arrow[r, Rightarrow, "y"] & Y' \end{tikzcd}$$

Sei umgekehrt $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann ist der Cokern $\rho_{\dot{f}}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, da er $\mathrm{I}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ als ein Kern und $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$ als ein Cokern aufweist. Ferner ist $f\rho_{\dot{f}} = \bar{f}\dot{f}\rho_{\dot{f}} = 0$. ▫

Korollar 209 *Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{A}$. Genau dann gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $Y \overset{y}{\Longrightarrow} Y'$ mit $fy = 0$, wenn es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $X' \overset{x}{\Longrightarrow} X$ mit $xf = 0$ gibt. Kurz,*

$$(\ \xrightarrow{f}\ \overset{\exists}{\Longrightarrow}\ ) = (\ \xrightarrow{0}\ ) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\ \overset{\exists}{\Longrightarrow}\ \xrightarrow{f}\ ) = (\ \xrightarrow{0}\ )\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Bemerkungen 208 und 208°. ▫

7.2.3 Die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$

Sei $\mathcal{N}$ eine dicke Teilkategorie der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$.

Definition 210 Seien $X,\ Y\ \in\ \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Sei $\operatorname{QMQ}(X,Y)$ die Menge ([3]) der Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] & & Y' & \\
X & & & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"']
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$, kurz (t,f,s) geschrieben. Wir definieren auf $\operatorname{QMQ}(X,Y)$ eine Relation $(\sim)$ wie folgt. Es sei $(t,f,s)\sim(\tilde t,\tilde f,\tilde s)$, falls es ein kommutatives Diagramm folgender Form gibt.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] & & Y' \arrow[d, Rightarrow] & \\
X & {} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[rr] \arrow[d, Rightarrow] & & {} & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde s"] \\
 & \tilde X' \arrow[ul, Rightarrow, "\tilde t"] \arrow[rr, "\tilde f"'] & & \tilde Y' \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 211 *Seien* $X,\ Y\ \in\ \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Es ist $(\sim)$ *eine Äquivalenzrelation auf* $\operatorname{QMQ}(X,Y)$.

Beweis. Unter Verwendung von vier Identitäten erkennen wir, daß $(\sim)$ reflexiv ist. Nach Konstruktion ist $(\sim)$ symmetrisch.

Zum Nachweis der Transitivität sei $(t,f,s)\sim(\tilde t,\tilde f,\tilde s)\sim(\tilde{\tilde t},\tilde{\tilde f},\tilde{\tilde s})$ in $\operatorname{QMQ}(X,Y)$ gegeben. Wir konstruieren unter Verwendung von Bemerkungen 207 und 207° folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[rr, "f"] \arrow[ddl, Rightarrow, "t"'] & & {} \arrow[d, Rightarrow, "v_1"'] & & \\
 & {} \arrow[u, Rightarrow, "u_1"'] \arrow[rr, "f_1"] \arrow[d, Rightarrow, "u_2"] & & {} \arrow[ddr, Rightarrow, "v_5"] & & \\
X & {} \arrow[l, Rightarrow, "\tilde t"'] \arrow[rr, "\tilde f"] & & {} \arrow[u, Rightarrow, "v_2"] \arrow[dd, Rightarrow, "v_3"'] & & Y \arrow[uull, Rightarrow, "s"'] \arrow[ll, Rightarrow, "\tilde s"'] \arrow[dddll, Rightarrow, "\tilde{\tilde s}"] \\
 & & {} \arrow[uul, Rightarrow, "u_5"'] \arrow[rr, "f_3"] \arrow[dl, Rightarrow, "u_6"] & & {} & \\
 & {} \arrow[uu, Rightarrow, "u_3"'] \arrow[rr, "f_2"] \arrow[d, Rightarrow, "u_4"] & & {} \arrow[ur, Rightarrow, "v_6"'] & & \\
 & {} \arrow[uuul, Rightarrow, "\tilde{\tilde t}"] \arrow[rr, "\tilde{\tilde f}"'] & & {} \arrow[u, Rightarrow, "v_4"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion kommutieren die linken beiden Vierecke, die mittleren vier Rechtecke und die rechten beiden Vierecke. Ferner ist nach Konstruktion $u_5u_2 = u_6u_3$ und $v_2v_5 = v_3v_6$. Wir setzen $f_3 := u_5f_1v_5 = u_5u_2\tilde{f}v_2v_5 = u_6u_3\tilde{f}v_3v_6 = u_6f_2v_6$.

Es folgt $u_5u_1t = u_5u_2\tilde{t} = u_6u_3\tilde{t} = u_6u_4\tilde{\tilde{t}}$, $u_5u_1fv_1v_5 = u_5f_1v_5 = f_3 = u_6f_2v_6 = u_6u_4\tilde{\tilde{f}}v_4v_6$ und $sv_1v_5 = \tilde{s}v_2v_5 = \tilde{s}v_3v_6 = \tilde{\tilde{s}}v_4v_6$. Somit ist $(t, f, s) \sim (\tilde{\tilde{t}}, \tilde{\tilde{f}}, \tilde{\tilde{s}})$. ▫

Bemerkung 212 Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Es ist $(\sim)$ als Äquivalenzrelation erzeugt ist von folgender Relation der *elementaren Äquivalenz*. Sei $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$. Sei u ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus mit $\mathsf{Ziel}\, u = \mathsf{Start}\, t = \mathsf{Start}\, f$. Sei v ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus mit $\mathsf{Start}\, v = \mathsf{Ziel}\, s = \mathsf{Ziel}\, f$. Dann sei (t, f, s) elementar äquivalent zu (ut, uf, s) und zu (t, fv, sv).

Bemerkung 213 *Seien* $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

(1) *Jedes Element* $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ *ist äquivalent zu einem der Form* (id_X, f', s').

(2) *Zwei Elemente der Form* (id_X, f, s), $(\mathrm{id}_X, \tilde{f}, \tilde{s}) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ *sind genau dann äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm folgender Form gibt.*

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, Rightarrow] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & {} & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde{s}"] \\
 & {} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Die Identitäten in Elementen der Form $(\mathrm{id}_X, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ werden in Diagrammen oft nicht dargestellt.

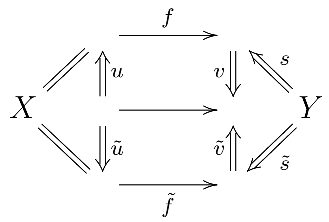
Beweis.

Zu (1). Bilde folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 207°.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dd, Rightarrow, "t"'] \arrow[r, "f"] & {} \arrow[dd, Rightarrow, "t'"] & \\
X \arrow[dr, equal] & & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[dl, Rightarrow, "s'"] \\
 & {} \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & {} &
\end{tikzcd}$$

Es ist $(t, f, s) \sim (t, ft', st') = (t\,\mathrm{id}_X, tf', s') \sim (\mathrm{id}_X, f', s')$.

Zu (2). Nach Definition sind (id_X, f, s) und $(\mathrm{id}_X, \tilde{f}, \tilde{s})$ genau dann äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm folgender Form gibt.



Notwendigerweise ist darin $u = \tilde{u}$. Da $u(fv - \tilde{f}\tilde{v}) = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $(fv - \tilde{f}\tilde{v})w = 0$; cf. Korollar 209. Also ist $f(vw) = \tilde{f}(\tilde{v}w)$ und $s(vw) = \tilde{s}(\tilde{v}w)$, wie verlangt. ▫

Definition 214 Sei $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) := \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Seien X, Y, $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Sei

$$ {}_{\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}}(X, Y) \;:=\; \mathrm{QMQ}(X, Y)/(\sim)\,. $$

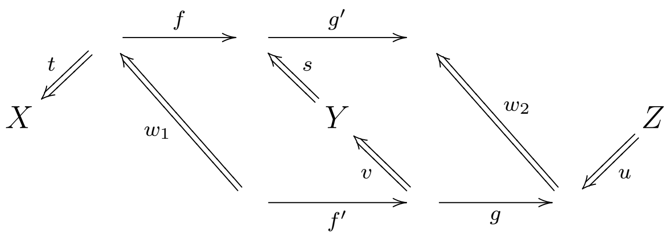
Die Äquivalenzklasse von $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ bezüglich $(\sim)$ werde $t\backslash f/s$ geschrieben und als *Doppelbruch* bezeichnet.

Für $(\mathrm{id}_X, f', s') \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ kürzen wir $\mathrm{id}_X\backslash f'/s' =: f'/s'$ ab und sprechen von einem *Rechtsbruch.*

Für $(t'', f'', \mathrm{id}_Y) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ kürzen wir $t''\backslash f''/\mathrm{id}_Y =: t''\backslash f''$ ab und sprechen von einem *Linksbruch.*

Seien $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ und $(v, g, u) \in \mathrm{QMQ}(Y, Z)$ gegeben. Bilde ein kommutatives Diagramm wie folgt; cf. Bemerkungen 207 und 207°.

(∗)



Hierbei kann das linke Viereck ein Pullback sein, muß aber nicht. Ferner kann das rechte Viereck ein Pushout sein, muß aber nicht.

Wir wollen das Kompositum zu

$$ (t\backslash f/s)\cdot(v\backslash g/u) \;:=\; w_1 t\backslash f'g/u \;=\; t\backslash fg'/uw_2 \;\in\; {}_{\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}}(X, Z) $$

setzen.

Lemma 215 *Die in Definition* 214 *gewünschte Kompositionsabbildung ist wohldefiniert und macht* $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ *zu einer Kategorie, genannt die* Quotientenkategorie *von* $\mathcal{A}$ *nach* $\mathcal{N}$*.*

Beweis. Zunächst einmal merken wir an, daß in der Tat

$$w_1 t\backslash f'g/u \;=\; w_1 t\backslash f'gw_2/uw_2 \;=\; w_1 t\backslash w_1 fg'/uw_2 \;=\; t\backslash fg'/uw_2$$

ist.

Wir haben, bei fester Repräsentantenwahl im ersten und im zweiten Faktor, die Unabhängigkeit von der Wahl der kommutativen Vierecke im Diagramm $(*)$ zu verifizieren. Dazu dürfen wir zum einen einen Pullback (f', f, w_1, vs) und einen Pushout (g, g', vs, w_2) wählen, und haben zum anderen zwei beliebige kommutative Vierecke $(\tilde{f}', f, \tilde{w}_1, vs)$ und $(g, \tilde{g}', vs, \tilde{w}_2)$ mit $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ vorzugeben. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 206.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & {} \\
 & {} \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[r, "f"] & {} \arrow[rr, "g'"] \arrow[urrr, "\tilde{g}'"] & & {} \arrow[ur, Rightarrow, "p_2"] & & \\
X & & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"] & & & Z \arrow[dl, Rightarrow, "u"] \\
 & & {} \arrow[uul, Rightarrow, "w_1"] \arrow[rr, "f'"] & & {} \arrow[ul, Rightarrow, "v"] \arrow[r, "g"] & {} \arrow[uul, Rightarrow, "w_2"] \arrow[uuu, Rightarrow, "\tilde{w}_2"'] & \\
 & {} \arrow[uuu, Rightarrow, "\tilde{w}_1"] \arrow[ur, Rightarrow, "p_1"] \arrow[urrr, "\tilde{f}'"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Daher ist $w_1 t\backslash f'g/u = p_1 w_1 t\backslash p_1 f'g/u = \tilde{w}_1 t\backslash \tilde{f}'g/u$. Oder dual.

Wir haben nun die Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl im ersten und im zweiten Faktor zu verifizieren. Wir zeigen diese im ersten Faktor, im zweiten Faktor gilt sie dann dank Dualität. Seien hierzu $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ und $(v, g, u) \in \mathrm{QMQ}(Y, Z)$ gegeben, sowie $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen q_1 mit $\mathsf{Ziel}\, q_1 = \mathsf{Start}\, t = \mathsf{Start}\, f$ und q_2 mit $\mathsf{Start}\, q_2 = \mathsf{Ziel}\, f = \mathsf{Ziel}\, s$. Zu zeigen genügt, daß die Kompositionskonstruktion mit den Repräsentanten (t, f, s) und (v, g, u) dasselbe liefert wie mit den Repräsentanten $(q_1 t, q_1 f q_2, s q_2)$ und (v, g, u); cf. Bemerkung 212.

Wir konstruieren dazu folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 207°.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, Rightarrow, "q_1"'] \arrow[r, "q_1 f q_2"] & {} \arrow[rr, "\tilde{g}'"] & & {} & & \\
 & {} \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[r, "f"] & {} \arrow[u, Rightarrow, "q_2"'] \arrow[rr, "g'"] & & {} \arrow[u, Rightarrow, "\tilde{q}_2"'] & & \\
X & & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"] & & & Z \arrow[dl, Rightarrow, "u"] \\
 & & & & {} \arrow[ul, Rightarrow, "v"] \arrow[r, "g"'] & {} \arrow[uul, Rightarrow, "w_2"] &
\end{tikzcd}$$

Es resultiert, daß die Kompositionskonstruktion mit den Repräsentanten $(q_1 t, q_1 f q_2, s q_2)$ und (v, g, u) gerade

$$q_1 t\backslash q_1 f q_2 \tilde{g}'/uw_2 \tilde{q}_2 \;=\; t\backslash f q_2 \tilde{g}'/uw_2 \tilde{q}_2 \;=\; t\backslash fg' \tilde{q}_2/uw_2 \tilde{q}_2 \;=\; t\backslash fg'/uw_2$$

liefert, was man auch von den Repräsentanten (t, f, s) und (v, g, u) erhält.

Somit ist die Wohldefiniertheit der Kompositionsabbildung aus Definition 214 nachgewiesen; cf. $(*)$.

Seien $(\mathrm{id}_X, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$ und $(\mathrm{id}_Y, g, u) \in \mathrm{QMQ}(Y, Z)$ gegeben. Für das Kompositum erstellen wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r, "f"] & {} & {} \arrow[r, "g'"] & {} & & \\
X \arrow[ur, equal] & & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, equal] & & & Z \arrow[dl, Rightarrow, "u"] \\
 & & & & {} \arrow[r, "g"'] & {} \arrow[uul, Rightarrow, "w_2"'] &
\end{tikzcd} ,$$

i.e. das kommutative Diagramm

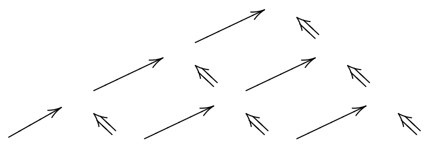
$$\begin{tikzcd}
 & & & {} & & \\
 & {} \arrow[urr, "g'"] & & {} \arrow[u, Rightarrow, "w_2"'] & & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, Rightarrow, "u"'] &
\end{tikzcd} ,$$

und erhalten

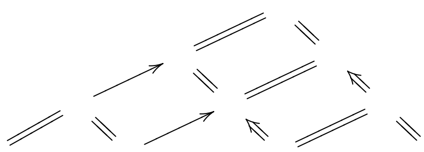
$$(f/s) \cdot (g/u) \;=\; fg'/uw_2 \,.$$

Um Identitäten und Assoziativität nachzuweisen, genügt es dank Bemerkung 213.(1), Rechtsbrüche zu betrachten.

Für die Assoziativität betrachten wir folgendes kommutative Diagramm; cf. Bemerkung 207°.



Für die Identitäten id/id betrachten wir folgendes kommutative Diagramm.



Damit ist nachgewiesen, daß $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit der Komposition aus Definition 214 eine Kategorie ist; cf. $(*)$. $\square$

Bemerkung 216 *Seien $t\backslash f$ und g/u komponierbar in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Es ist $(t\backslash f) \cdot (g/u) = t\backslash fg/u$.*

Speziell ist für einen Morphismus $y\backslash h/x$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ dann $y\backslash h/x = (y\backslash \mathrm{id})(\mathrm{id}\backslash h/\mathrm{id})(\mathrm{id}/x)$.

Diese Bemerkung werden wir weitgehend kommentarlos verwenden.

Beweis. Um $t\backslash f$ und g/u zu komponieren, können wir in $(*)$ wegen $s = \mathrm{id}$ und $v = \mathrm{id}$ speziell $w_1 = \mathrm{id}$ und $w_2 = \mathrm{id}$ wählen. $\square$

Definition 217 Wir haben einen Lokalisierungsfunktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{L = L_{\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}}} & \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \\ f & \longmapsto & \mathrm{id}\backslash f/\mathrm{id}\,, \end{array}$$

welcher also Objekte identisch abbildet.

In der Tat ist für $\xrightarrow{f}\xrightarrow{g}$ in $\mathcal{A}$ auch $(\mathrm{id}\backslash f/\mathrm{id})(\mathrm{id}\backslash g/\mathrm{id}) = (\mathrm{id}\backslash f)(g/\mathrm{id}) = \mathrm{id}\backslash fg/\mathrm{id}$. Ferner ist $\mathrm{id}\backslash\mathrm{id}/\mathrm{id} = \mathrm{id}$.

Bemerkung 218 *Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Sei $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$. Es ist $t\backslash f/s$ genau dann ein Isomorphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$, wenn f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist.*

Ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, so ist $(Lf)^{-1} = f\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id}/f$.

Beweis. Ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, dann ist $(f\backslash\mathrm{id})(Lf) = f\backslash f = \mathrm{id}\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id} = \mathrm{id}/\mathrm{id} = f/f = (Lf)(\mathrm{id}/f)$. Also ist Lf ein Isomorphismus; cf. Aufgabe 36.(3, 5). Ferner folgt, daß $(Lf)^{-1} = f\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id}/f$. Insbesondere ist auch $f\backslash\mathrm{id} = \mathrm{id}/f$ ein Isomorphismus.

Ist umgekehrt $t\backslash f/s$ ein Isomorphismus, dann auch $Lf = (t\backslash\mathrm{id})^{-1}(t\backslash f/s)(\mathrm{id}/s)^{-1}$.

Sei $(Lf)(g/u) = \mathrm{id}$, i.e. $fg/u = \mathrm{id}/\mathrm{id}$. Also gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wfg = wu$. Somit ist fg ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 206. Das Umfangssequenzlemma, Lemma 132, liefert $\mathrm{K}_f \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{K}_{fg} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ und also $\mathrm{K}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ ([9]).

Dual ist auch $\mathrm{C}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Insgesamt ist f als $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus nachgewiesen. $\square$

Lemma 219 *Die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist eine additive Kategorie. Es ist $0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}}$. Ferner ist für $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} = \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N})$ das Objekt $X \oplus Y$ sowohl die direkte Summe in $\mathcal{A}$ als auch in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$; Inklusions- und Projektionsmorphismen in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ sind durch die Bilder der entsprechenden Morphismen in $\mathcal{A}$ unter L gegeben.*

Beweis. Es ist $0 = 0_{\mathcal{A}} =: 0_{\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}}$ auch ein Nullobjekt in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Es ist initial, da für jeden $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus $Y \overset{s}{\Longrightarrow} Y'$ in $\mathcal{A}$ gilt, daß $0_{0,Y'}/s = 0_{0,Y}s/s = 0_{0,Y}/\mathrm{id}_Y$. Dual dazu ist es terminal.

Zu (Add 1). Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Wir wollen zeigen, daß die in $\mathcal{A}$ gebildete direkte Summe $X \oplus Y$, zusammen mit den Inklusionsmorphismen $\iota_1 := L\iota_1$ und $\iota_2 := L\iota_2$ und den Projektionsmorphismen $\pi_1 := L\pi_1$ und $\pi_2 := L\pi_2$ eine direkte Summe ist.

[9] Cf. auch Bemerkung 222 unten.

Dazu zu (Sum 1). Sei $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Seien $S \xrightarrow{t\backslash f} X$ und $S \xrightarrow{v\backslash g} Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ gegeben. Bilde mit Bemerkungen 207 und 206 das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, "v'"] \arrow[d, Rightarrow, "t'"'] \arrow[dr, Rightarrow, "w"] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\ \cdot \arrow[r, Rightarrow, "v"'] & S \end{tikzcd} .$$

Betrachte den Morphismus $S \xrightarrow{w\backslash(v'f\ \ t'g)} X \oplus Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Es wird

$$\begin{aligned} (w\backslash\,(\,v'f\ \ t'g\,))\pi_1 &= (w\backslash\,(\,v'f\ \ t'g\,))(\pi_1/\mathrm{id}_{X\oplus Y}) \\ &= w\backslash v'f/\mathrm{id}_{X\oplus Y} \\ &= v't\backslash v'f \\ &= t\backslash f\ . \end{aligned}$$

Genauso wird $(w\backslash\,(\,v'f\ \ t'g\,))\pi_2 = v\backslash g$.

Wir haben die Eindeutigkeit des Induzierten zu zeigen. Sei $S \xrightarrow{\tilde{w}\backslash(\,\tilde{f}\ \tilde{g}\,)} X \oplus Y$ mit $\tilde{w}\backslash\tilde{f} = (\tilde{w}\backslash\,(\,\tilde{f}\ \tilde{g}\,))\pi_1 = t\backslash f = w\backslash v'f$ und $\tilde{w}\backslash\tilde{g} = (\tilde{w}\backslash\,(\,\tilde{f}\ \tilde{g}\,))\pi_2 = v\backslash g = w\backslash t'g$ gegeben. Wir wollen $\tilde{w}\backslash\,(\,\tilde{f}\ \tilde{g}\,) \overset{!}{=} w\backslash\,(\,v'f\ \ t'g\,)$ nachweisen.

Es gibt kommutative Diagramme wie folgt; cf. Bemerkung 213.(2°).

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde{w}"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ S & \cdot \arrow[u, Rightarrow, "u_1"'] \arrow[d, Rightarrow, "u_2"] & X \\ & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "w"] \arrow[ur, "v'f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde{w}"'] \arrow[dr, "\tilde{g}"] & \\ S & \cdot \arrow[u, Rightarrow, "u_3"'] \arrow[d, Rightarrow, "u_4"] & Y \\ & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "w"] \arrow[ur, "t'g"'] & \end{tikzcd}$$

Bilde folgenden Pullback; cf. Bemerkung 207.

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde{w}"'] & \\ S & & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "w'"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde{w}'"] \arrow[ll, phantom, ">"] \\ & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "w"] & \end{tikzcd}$$

Es gibt $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen q_1 und q_3 mit $u_1 = q_1 w'$, $u_2 = q_1\tilde{w}'$, $u_3 = q_3 w'$ und $u_4 = q_3\tilde{w}'$. Bilde mit Bemerkungen 207 und 206 das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, "q_3'"] \arrow[d, Rightarrow, "q_1'"'] \arrow[dr, Rightarrow, "p"] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "q_1"] \\ \cdot \arrow[r, Rightarrow, "q_3"'] & \cdot \end{tikzcd} .$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dl, Rightarrow, "\tilde w"'] \arrow[dr, "(\tilde f\ \tilde g)"] \arrow[dd, Rightarrow, shift left, "p\tilde w'"] & \\
S & & X \oplus Y \\
 & {} \arrow[ul, Rightarrow, "w"] \arrow[ur, "(v'f\ \ t'g)"'] \arrow[uu, Rightarrow, shift left, "pw'"] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da

$$\begin{array}{rcl} pw'\tilde f & = & q_3'q_1w'\tilde f \\ & = & q_3'u_1\tilde f \\ & = & q_3'u_2v'f \\ & = & q_3'q_1\tilde w'v'f \\ & = & p\tilde w'v'f \end{array}$$

und da genauso $pw'\tilde g = p\tilde w't'g$.

Dazu zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1).

Dazu zu (Sum 3). Es ist $\iota_1\pi_1 = (\mathrm{id}\backslash\iota_1)(\pi_1/\mathrm{id}) = \mathrm{id}\backslash\mathrm{id}/\mathrm{id} = \mathrm{id}$. Es ist $\iota_1\pi_2 = (\mathrm{id}\backslash\iota_1)(\pi_2/\mathrm{id}) = \mathrm{id}\backslash 0_{X,Y}/\mathrm{id} = L0_{X,Y} = (L0_{X,0})(L0_{0,X}) = 0$. Etc.

Zu (Add 2). Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Da (Add 2) in $\mathcal{A}$ gilt, und da ein Funktor gemäß Bemerkung 84 Isomorphismen respektiert, genügt es zu zeigen, daß $L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$. In der Tat ist $\iota_1(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))\pi_1 = (L\iota_1)(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))(L\pi_1) = L(\iota_1\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\pi_1) = L1 = 1$, ferner $\iota_1(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))\pi_2 = (L\iota_1)(L\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right))(L\pi_2) = L(\iota_1\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\pi_2) = L0 = 0$, etc. ▫

Bemerkung 220 *Der Lokalisierungsfunktor* $\mathcal{A} \xrightarrow{L} \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ *ist additiv.*

Beweis. Es ist $L0 = 0$. Seien ferner $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ gegeben. Betrachte die direkte Summe $X \oplus Y$ in $\mathcal{A}$. Es ist $L\pi_1 = \pi_1$ und $L\pi_2 = \pi_2$; cf. Beweis zu (Sum 1) in Lemma 219. Insbesondere ist $(\,L\pi_1\ L\pi_2\,) = (\,\pi_1\ \pi_2\,) = \mathrm{id}_{LX\oplus LY}$ ein Iso-, also auch ein Monomorphismus. Gemäß Definition 110 ist L somit additiv; cf. Bemerkung 109.(3). ▫

Bemerkung 221 *Seien* $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. *Sei* $(t, f, s) \in \mathrm{QMQ}(X, Y)$. *Die folgenden Aussagen* $(1, 2, 2^\circ)$ *sind äquivalent.*

(1) *Es ist* $t\backslash f/s = 0$.

(2) *Es gibt einen* $\mathcal{N}$*-Quasiisomorphismus* w_1 *mit* $w_1 f = 0$.

(2°) *Es gibt einen* $\mathcal{N}$*-Quasiisomorphismus* w_2 *mit* $f w_2 = 0$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2). Da $t\backslash f/s = 0 = (\mathrm{id}_X\backslash 0_{X,0})(0_{0,Y}/\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_X\backslash 0_{X,Y}/\mathrm{id}_Y$, haben wir ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{A}$ wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dl, Rightarrow, "v"'] \arrow[rr, "f"] & & {} \arrow[d, Rightarrow, "u_2"'] & \\
X \arrow[dr, Rightarrow] & {} \arrow[u, Rightarrow, "u_1"'] \arrow[d, Rightarrow] & & {} & Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \\
 & {} \arrow[rr, "0"'] & & {} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $(u_1 f)u_2 = 0$. Folglich gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus u_3 mit $u_3(u_1 f) = 0$; cf. Korollar 209. Setze $w_1 := u_3 u_1$; cf. Bemerkung 206. Es ist $w_1 f = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Es ist $t\backslash f/s = w_1 t\backslash w_1 f/s = w_1 t\backslash 0/s = (w_1 t\backslash 0_{\mathsf{Start}\, w_1, 0})(0_{0,\,\mathsf{Ziel}\, s}/s) = 0$. ▫

Bemerkung 222 *Sei $f/s \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N})$. Es ist f/s genau dann monomorph, wenn der Kern K_f , genommen in $\mathcal{A}$, in $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ liegt.*

Beweis. Sei zum einen f/s monomorph. Es ist $(\mathrm{id}\backslash\iota_f)(f/s) = 0$. Da f/s monomorph ist, folgt $\mathrm{id}\backslash\iota_f = 0$, i.e. $u\,\iota_f = 0$ in $\mathcal{A}$ für einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus u ; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Da ι_f in $\mathcal{A}$ monomorph ist, folgt $u = 0$. Also ist $\mathrm{K}_f = \mathsf{Start}\,\iota_f = \mathsf{Ziel}\, u = \mathrm{C}_u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Sei zum anderen $\mathrm{K}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Sei $v\backslash g$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $(v\backslash g)(f/s) = 0$ gegeben. Wir müssen $v\backslash g \overset{!}{=} 0$ zeigen. Da $v\backslash gf/s = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wgf = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Also gibt es ein a in $\mathcal{A}$ mit $wg = a\,\iota_f$. Folglich ist $v\backslash g = wv\backslash wg = wv\backslash a\,\iota_f = (wv\backslash a)(\iota_f/\,\mathrm{id})$, so daß es genügt, $\iota_f/\mathrm{id} \overset{!}{=} 0$ zu zeigen. Da aber $\mathrm{K}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, ist $0_{0,\mathrm{K}_f}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Da $0_{0,\mathrm{K}_f}\,\iota_f = 0$, ist $\iota_f/\mathrm{id} = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). ▫

Lemma 223 *Die Quotientenkategorie $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist eine abelsche Kategorie. Ist $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$, dann ist $L\iota_f$ ein Kern und $L\rho_f$ ein Cokern von Lf in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$.*

Die übrigen Kerne von Morphismen in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ergeben sich dann durch isomorphe Ersetzung; cf. Aufgabe 58.(1), Bemerkung 222.

Beweis. Dank Lemma 219 ist $\mathcal{A}$ additiv.

Zu (Ab 1). Sei $f/s : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{id}\backslash\iota_f$ ein Kern von f/s in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist.

Zum einen ist $(\mathrm{id}\backslash\iota_f)(f/s) = \mathrm{id}\backslash\iota_f f/s = 0$.

Sei zum anderen $v\backslash g$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $(v\backslash g)(f/s) = 0$ gegeben. Da $\mathrm{id}\backslash\iota_f$ nach Bemerkung 222 ein Monomorphismus ist, genügt es, eine Faktorisierung von $v\backslash g$ über $\mathrm{id}\backslash\iota_f$ zu finden.

Da $v\backslash gf/s = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wgf = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Also gibt es ein a in $\operatorname{Mor}\mathcal{A}$ mit $wg = a\,\iota_f$. Es folgt $v\backslash g = wv\backslash wg = wv\backslash a\,\iota_f = (wv\backslash a)(\iota_f/\mathrm{id}) = (wv\backslash a)(\mathrm{id}\backslash\iota_f)$.

Zu (Ab 1°). Dual zu (Ab 1).

Zu (Ab 2). Sei $t\backslash f$ ein Monomorphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Wir wollen zeigen, daß $t\backslash f$ ein Kern von $L\rho_f$ ist.

Es ist $t\backslash f = (Lt)^{-1}(Lf)$; cf. Bemerkung 218. Somit genügt es zu zeigen, daß der Monomorphismus Lf ein Kern von $L\rho_f$ ist; cf. Bemerkung 119.(5).

Zum einen ist $(Lf)(L\rho_f) = L(f\rho_f) = L0 = 0$.

Sei zum anderen $v\backslash g$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $(v\backslash g)(L\rho_f) = 0$ gegeben. Da Lf monomorph ist, genügt es, eine Faktorisierung von $v\backslash g$ über Lf zu finden. Da $v\backslash g\rho_f/\mathrm{id} = 0$, gibt es einen $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus w mit $wg\rho_f = 0$; cf. Bemerkung 221.(1, 2). Somit gibt es ein $a \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$ mit $wg = a\dot{f}$; cf. Bemerkung 124.(1). Mit Bemerkung 222 ist $\mathrm{K}_{\bar{f}} = \mathrm{K}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Also ist $\bar{f}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Es ist $(L\bar{f})^{-1} = \mathrm{id}/\bar{f}$; cf. Bemerkung 218. Somit wird

$$\begin{aligned} v\backslash g &= wv\backslash wg \\ &= wv\backslash a\dot{f} \\ &= (wv\backslash a)(L\dot{f}) \\ &= (wv\backslash a)(\mathrm{id}/\bar{f})(L\bar{f})(L\dot{f}) \\ &= (wv\backslash a/\bar{f})(Lf)\,. \end{aligned}$$

Zu (Ab 2°). Dual zu (Ab 2). □

Bemerkung 224 *Der Lokalisierungsfunktor $\mathcal{A} \xrightarrow{L} \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist exakt. Es ist $LN \simeq 0$ für $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$.*

Beweis. Dank Bemerkung 220 ist L additiv.

Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Wir haben zu zeigen, daß $LX' \xrightarrow{Li} LX \xrightarrow{Lr} LX$ kurz exakt ist; cf. Definition 128.(1).

Es gibt einen Isomorphismus f mit $i = f\,\iota_r$, da sowohl i als auch ι_r Kerne von r sind; cf. Bemerkung 119.(2). Also ist $Li = (Lf)(L\iota_r)$. Nach Lemma 223 ist $L\iota_r$ ein Kern von Lr. Es ist Lf ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 84.(3). Somit ist auch Li ein Kern von Lr; cf. Bemerkung 119.(5).

Dual ist Lr ein Cokern von Li.

Somit ist (Li, Lr) kurz exakt.

Ist ferner $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, so ist $0 \longrightarrow N$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Also ist $L(0 \longrightarrow N) = 0 \longrightarrow LN$ ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 218. □

Lemma 225 (Universelle Eigenschaft Quotientenkategorie)

Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie.

(1) *Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor so, daß $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen exakten Funktor $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{\bar{F}}} \mathcal{B}$ mit $\bar{\bar{F}} \circ L = F$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \arrow[ur, "\bar{\bar{F}}"'] & \end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s) = (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}$ für $t\backslash f/s \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$.

(2) *Seien $\mathcal{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ exakte Funktoren so, daß $FN \simeq 0$ und $GN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{\bar{F}} \xrightarrow{\bar{\bar{a}}} \bar{\bar{G}}$ so, daß $\bar{\bar{a}}X = \bar{\bar{a}}LX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "a\Downarrow"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \arrow[ur, bend left, "\bar{\bar{F}}"] \arrow[ur, bend right, "\bar{\bar{G}}"'] \arrow[ur, phantom, "\bar{\bar{a}}\searrow"] & \end{tikzcd}$$

Beweis.

Zu (1).

Zur Eindeutigkeit. Sei $t\backslash f/s$ ein Morphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Es ist $t\backslash f/s = (t\backslash\mathrm{id})(Lf)(\mathrm{id}/s) = (Lt)^{-1}(Lf)(Ls)^{-1}$; cf. Bemerkungen 216 und 218. Ist $F' : \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor mit $F' \circ L = F$, so ist folglich $F'(t\backslash f/s) = F'((Lt)^{-1}(Lf)(Ls)^{-1}) = (F'Lt)^{-1}(F'Lf)(F'Ls)^{-1} = (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}$. Dadurch ist F' festgelegt.

Zur Existenz. Setze $\bar{\bar{F}}X := FX$ für $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Da F exakt ist, und da $FN \simeq 0$ für alle $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, werden $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismen unter F auf Isomorphismen abgebildet. Denn ist f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus, dann sind $(\iota_f, \bar{f})$ und $(\dot{f}, \rho_f)$ kurz exakt. Wegen F exakt sind folglich auch $(F\iota_f, F\bar{f})$ und $(F\dot{f}, F\rho_f)$ kurz exakt. Da f ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus ist, liegt $\mathrm{K}_f \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Nach Voraussetzung ist $F\mathrm{K}_f \simeq 0$. Also ist $F\bar{f}$ ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 119.(3,5), Aufgabe 54.(2). Dual ist $F\dot{f}$ ein Isomorphismus. Ingesamt ist also $Ff = (F\bar{f})(F\dot{f})$ ein Isomorphismus. Cf. Definition 203, Bemerkung 124.(1).

Setze $\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s) := (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}$ für $t\backslash f/s \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$.

Dies ist wohldefiniert, denn ist u ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus mit $\mathsf{Ziel}\, u = \mathsf{Start}\, t = \mathsf{Start}\, f$, dann ist

$$(F(ut))^{-1}(F(uf))(Fs)^{-1} \;=\; (Ft)^{-1}(Fu)^{-1}(Fu)(Ff)(Fs)^{-1} \;=\; (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}\,.$$

Dual für den anderen Fall der elementaren Äquivalenz. Cf. Bemerkung 212.

Es ist $\bar{\bar{F}}\,\mathrm{id} = \bar{\bar{F}}(\mathrm{id}\backslash\mathrm{id}/\mathrm{id}) = (F\,\mathrm{id})^{-1}(F\,\mathrm{id})(F\,\mathrm{id})^{-1} = \mathrm{id}$.

Was die Verträglichkeit von $\bar{\bar{F}}$ mit Komposition anbelangt, betrachten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[r, "f"] \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] & {} \arrow[r, "g'"] & {} & \\
{} & & {} \arrow[u, Rightarrow, "s"'] & & {} \arrow[dl, Rightarrow, "u"] \\
& & {} \arrow[u, Rightarrow, "v"] \arrow[r, "g"'] & {} \arrow[uu, Rightarrow, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{A}$ wie in $(*)$. Es wird

$$\begin{array}{rcl}
\bar{\bar{F}}\big((t\backslash f/s)(v\backslash g/u)\big) & = & \bar{\bar{F}}(t\backslash fg'/uw_2) \\
& = & (Ft)^{-1}(F(fg'))(F(uw_2))^{-1} \\
& = & (Ft)^{-1}(Ff)(Fg')(Fw_2)^{-1}(Fu)^{-1} \\
& = & (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(Fv)^{-1}(F(vs))(Fg')(Fw_2)^{-1}(Fu)^{-1} \\
& = & (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(Fv)^{-1}(Fg)(Fw_2)(Fw_2)^{-1}(Fu)^{-1} \\
& = & \big((Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}\big)\big((Fv)^{-1}(Fg)(Fu)^{-1}\big) \\
& = & \big(\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s)\big)\big(\bar{\bar{F}}(v\backslash g/u)\big)\,.
\end{array}$$

Schließlich ist $\bar{\bar{F}}Lf = \bar{\bar{F}}(\mathrm{id}\backslash f/\mathrm{id}) = (F\,\mathrm{id})^{-1}(Ff)(F\,\mathrm{id})^{-1} = Ff$ für $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$, also $\bar{\bar{F}} \circ L = F$.

Zur Additivität. Es ist $\bar{\bar{F}}0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}} = \bar{\bar{F}}L0_{\mathcal{A}} = F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$.

Seien ferner X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ gegeben. Wir betrachten $X \oplus Y$ und haben zu zeigen, daß $\left(\bar{\bar{F}}\pi_1\ \bar{\bar{F}}\pi_2\right)$ monomorph ist; cf. Definition 110.

Nun ist aber $X \oplus Y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ durch die in $\mathcal{A}$ gebildete direkte Summe gegeben, und es ist auch $\pi_1 = L\pi_1$ und $\pi_2 = L\pi_2$; cf. Lemma 219. Es folgt $\left(\bar{\bar{F}}\pi_1\ \bar{\bar{F}}\pi_2\right) = \left(\bar{\bar{F}}L\pi_1\ \bar{\bar{F}}L\pi_2\right) = \left(F\pi_1\ F\pi_2\right)$, und dies ist ein Isomorphismus, also insbesondere ein Monomorphismus, da F additiv ist; cf. loc. cit.

Zur Exaktheit. Sei $(t\backslash f, g/u)$ eine kurz exakte Sequenz. Wir haben zu zeigen, daß $\big(\bar{\bar{F}}(t\backslash f), \bar{\bar{F}}(g/u)\big)$ eine kurz exakte Sequenz ist.

Da $t\backslash f = (Lt)^{-1}(Lf)$ und $g/u = (Lg)(Lu)^{-1}$ nach Bemerkungen 216 und 218, ist auch (Lf, Lg) eine kurz exakte Sequenz; cf. Bemerkung 119.(5, 6).

Es ist $\big(\bar{\bar{F}}(t\backslash f), \bar{\bar{F}}(g/u)\big) = \big((Ft)^{-1}(Ff), (Fg)(Fu)^{-1}\big)$ kurz exakt genau dann, wenn (Ff, Fg) kurz exakt ist; cf. loc. cit. Es genügt also, letzteres zu zeigen.

Zeigen wir, daß Ff ein Kern von Fg ist. Bilde ι_g in $\mathcal{A}$. Es ist $L\iota_g$ wie Lf ein Kern von Lg; cf. Lemma 223. Also gibt es einen Isomorphismus $x\backslash y$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ mit $Lf = (x\backslash y)(L\iota_g)$;

cf. Bemerkung 119.(2). Es sind $(\iota_g\,,\,\bar{g})$ und $(\dot{g},\rho_g)$ kurz exakt, und also auch $(F\iota_g\,,\,F\bar{g})$ und $(F\dot{g},F\rho_g)$. Insbesondere ist $F\dot{g}$ monomorph, und somit $F\iota_g$ ein Kern von $Fg = (F\bar{g})(F\dot{g})$; cf. Bemerkung 119.(6). Nun ist $Ff = \bar{\bar{F}}Lf = \bar{\bar{F}}\big((x\backslash y)(L\iota_g)\big) = (\bar{\bar{F}}(x\backslash y))(F\iota_g)$. Da $\bar{\bar{F}}(x\backslash y)$ wie $x\backslash y$ ein Isomorphismus ist, folgt, daß auch Ff ein Kern von Fg ist; cf. Bemerkung 119.(5).

Dual ist Fg ein Cokern von Ff.

Somit ist (Ff, Fg) kurz exakt.

Zu (2).

Zur Eindeutigkeit. Es operiert L identisch, damit insbesondere surjektiv, auf den Objekten. Ist $a'LX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ verlangt, so legt dies also a' fest.

Zur Existenz. Setze $\bar{\bar{a}}X := aX$ für $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}) = \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Können wir zeigen, daß das Tupel $(\bar{\bar{a}}X)_{X\in\operatorname{Ob}(\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N})}$ natürlich ist, so haben wir eine Transformation $\bar{\bar{a}}$ wie verlangt gefunden.

In der Tat wird für einen Morphismus $t\backslash f/s$ in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ von X nach Y, setzen wir $X' := \mathsf{Start}\,t$ und $Y' := \mathsf{Ziel}\,s$,

$$\begin{aligned}
(\bar{\bar{a}}X)(\bar{\bar{G}}(t\backslash f/s)) &= (aX)(Gt)^{-1}(Gf)(Gs)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ft)(aX)(Gt)^{-1}(Gf)(Gs)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(aX')(Gt)(Gt)^{-1}(Gf)(Gs)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(aX')(Gf)(Gs)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(aY')(Gs)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(Fs)(aY')(Gs)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(aY)(Gs)(Gs)^{-1} \\
&= (Ft)^{-1}(Ff)(Fs)^{-1}(aY) \\
&= (\bar{\bar{F}}(t\backslash f/s))(\bar{\bar{a}}Y)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & FX' \arrow[r, "Ff"] \arrow[dl, "Ft"', "\sim"] \arrow[dd, "aX'"] & FY' \arrow[dd, "aY'"'] & \\
FX \arrow[dd, "aX"'] & & & FY \arrow[ul, "Fs"', "\sim"] \arrow[dd, "aY"] \\
 & GX' \arrow[r, "Gf"] \arrow[dl, "Gt"', "\sim"] & GY' & \\
GX & & & GY \arrow[ul, "Gs"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

□

Cf. auch Aufgabe 91.

Bemerkung 226 *Jede kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ ist isomorph zum Bild einer kurz exakten Sequenz in $\mathcal{A}$ unter L.*

Dies hätte auch zum Beweis der Exaktheit von $\bar{\bar{F}}$ für Lemma 225 herangezogen werden können. Denn das Bild einer kurz exakten Sequenz in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ unter $\bar{\bar{F}}$ ist genau dann kurz exakt, wenn das Bild einer zu ihr isomorphen Sequenz kurz exakt ist; cf. Aufgabe 58.(1). Ist aber letztere im Bild unter L, so ist ihr Bild unter $\bar{\bar{F}}$ das Bild einer kurz exakten Sequenz unter $\bar{\bar{F}} \circ L = F$, und somit seinerseits kurz exakt.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ isomorph zum Bild eines Monomorphismus in $\mathcal{A}$ unter L ist. Denn wegen dieser Isomorphie (oder wegen L exakt) ist ein solches Bild dann wieder ein Monomorphismus. Die Ergänzungen dieser beiden Monomorphismen zu kurz exakten Sequenzen in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$ sind daher dann möglich und zueinander isomorph; cf. Bemerkung 124.(2), Lemma 136 (oder mehrfach erstere Bemerkung). Und als Ergänzung zu einer kurz exakten Sequenz eines Monomorphismus im Bild von L kann man das Bild einer solchen Ergänzung unter L verwenden, da L exakt ist.

Sei also f/s ein Monomorphismus in $\mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N}$. Nach Bemerkung 222 ist $\mathrm{K}_f \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Also ist $\bar{f}$ ein $\mathcal{N}$-Quasiisomorphismus. Da $f/s = (L\bar{f})(L\dot{f})(Ls)^{-1}$, ist f/s in der Tat isomorph zu $L\dot{f}$; cf. Bemerkung 218. ▫

Beispiel 227 Da $LN \simeq 0$ für $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, haben wir folgendes kommutatives Dreieck von Funktoren; cf. Bemerkungen 224 und 116.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{A}/\!\!/\mathcal{N} \\
\mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\bar{L}"] &
\end{tikzcd}$$

Wir wollen skizzieren, daß $\bar{L}$ im allgemeinen keine Äquivalenz ist.

1. Sei $\mathcal{N} := \mathbf{Z}\text{-fin} \subseteq \mathbf{Z}\text{-mod} =: \mathcal{A}$; cf. Beispiel 204.(4, 5). Sei $\mathbf{Z}$-lat $\subseteq$ $\mathbf{Z}$-mod die volle Teilkategorie der $\mathbf{Z}$-Moduln isomorph zu $\mathbf{Z}^{\oplus m}$ für ein $m \geqslant 0$ (engl. lattices, dt. Gitter). Sei $\mathbf{Q}$-mod die Kategorie der endlichdimensionalen $\mathbf{Q}$-Vektorräume.

2. Wir *behaupten,* daß das Kompositum $\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{R} \mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-fin}$ eine Äquivalenz ist.

Dicht. Jedes Objekt in $\mathbf{Z}$-mod ist isomorph zu einem der Form $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ mit $m \geqslant 0$ und $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Z}\text{-fin}$; cf. Aufgabe 18. Nun ist $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A \simeq \mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus 0 \simeq \mathbf{Z}^{\oplus m}$ in $\mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-fin}$, und dieses Objekt liegt im Bild von $\mathbf{Z}$-lat unter R.

Voll. Das Kompositum zweier voller Funktoren ist voll.

Treu. Es genügt zu zeigen, daß kein Morphismus der Form $X \longrightarrow Y$ ungleich 0 in $\mathbf{Z}$-lat auf den Nullmorphismus in $\mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-fin}$ abgebildet wird. Wäre sein Bild gleich 0, so würde $(X \longrightarrow Y) = (X \longrightarrow A \longrightarrow Y)$ faktorisieren für ein $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Z}\text{-fin}$. Nun ist aber ${}_{\mathbf{Z}}(A, Y) = 0$, da für $A \xrightarrow{f} Y$ und $a \in A$ stets $|A|a = 0$ gilt, somit auch $|A|(a)f = (|A|a)f = 0$, und also, wegen $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Z}\text{-lat}$, auch $(a)f = 0$; cf. Aufgabe 18.

Dies zeigt die *Behauptung.*

3. Schreibe $F : \mathbf{Z}\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-mod}$ für die Einschränkung von $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} - : \mathbf{Z}\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-Mod}$. Beachte, wenn $X = {}_{\mathbf{Z}}\langle x_1 , \dots , x_n\rangle$, dann $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} X = {}_{\mathbf{Z}}\langle 1 \otimes x_1 , \dots , 1 \otimes x_n\rangle$.

Es ist $FA \simeq 0$ für $A \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-fin}$. Denn $\frac{1}{z} \otimes a = \frac{1}{|A|z} \otimes |A|a = 0$ für $z \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ und $a \in A$.

Sei ein Morphismus $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathbf{Z}$-mod gegeben. Ohne Einschränkung ist $X' = \mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ und $X = \mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ mit $m', m \geqslant 0$ und $A', A \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-fin}$; cf. Aufgabe 18. Dann ist f von der Form

$$\mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$$

mit $M \in \mathbf{Z}^{m' \times m}$. Nun ist Ff isomorph zu

$$\mathbf{Q}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Q}^{\oplus m'} ,$$

da $FA' \simeq 0$ und $FA \simeq 0$; cf. Bemerkung 112.

Ist nun $f = \left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ monomorph, so auch $\mathbf{Z}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Z}^{\oplus m}$ und somit auch $\mathbf{Q}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Q}^{\oplus m}$. Also ist F exakt.

Somit existiert $\bar{\bar{F}} : \mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-mod}$; cf. Lemma 225. Wir *behaupten,* daß $\bar{\bar{F}}$ eine Äquivalenz ist.

Dicht. Für $m \geqslant 0$ ist $\mathbf{Q}^{\oplus m}$ isomorph zum Bild von $\mathbf{Z}^{\oplus m}$ unter $\bar{\bar{F}}$.

Voll. Seien o.E. $\mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ und $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ in $\operatorname{Ob}(\mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin}) = \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-mod}$ mit $m', m \geqslant 0$ und $A', A \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-fin}$ gegeben. Sei ferner ein Morphismus $\mathbf{Q}^{\oplus m'} \xrightarrow{M} \mathbf{Q}^{\oplus m}$ mit $M \in \mathbf{Q}^{m' \times m}$ vorgegeben. Wir haben einen Morphismus von $\mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ nach $\mathbf{Z}^{\oplus m} \oplus A$ in $\mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin}$ zu finden, der bis auf fest gewählte isomorphe Ersetzung auf M abgebildet wird.

Sei $M = \frac{1}{z}\hat{M}$ für ein geeignetes $z \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ und ein entsprechendes $\hat{M} \in \mathbf{Z}^{m \times m'}$. Sei $Z := \begin{pmatrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^{m' \times m'}$. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : \mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A' \longrightarrow \mathbf{Z}^{\oplus m'} \oplus A'$ ein $\mathbf{Z}$-fin-Quasiisomorphismus, da sowohl sein Kern A' als auch sein Cokern $(\mathbf{Z}/z)^{\oplus m'} \oplus A'$ endlich ist; cf. Aufgabe 17. Somit können wir ein Urbild wie gesucht mit $\left(\begin{smallmatrix} Z & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \setminus \left(\begin{smallmatrix} \hat{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ angeben.

Treu. In obigen Bezeichnungen wird ein Morphismus $\left(\begin{smallmatrix} M' & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \setminus \left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$, mit $M' \in \mathbf{Z}^{m' \times m'}$ von Rang m' und $M \in \mathbf{Z}^{m' \times m}$, unter F nach $M'^{-1}M$ abgebildet. Letzterer veschwindet genau dann, wenn $M = 0$. Dann aber ist $\left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Dies zeigt $\left(\begin{smallmatrix} M' & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \setminus \left(\begin{smallmatrix} M & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) = 0$, da $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ein $\mathbf{Z}$-fin-Quasiisomorphismus ist; cf. Bemerkung 221.

Dies zeigt die *Behauptung.*

4. *Wäre* nun $\bar{L}$ eine Äquivalenz, so nach vorstehenden beiden Behauptungen auch das Kompositum

$$\begin{array}{rl} & (\mathbf{Z}\text{-lat} \longrightarrow \mathbf{Q}\text{-mod}) \\ := & (\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{R} \mathbf{Z}\text{-mod}/\mathbf{Z}\text{-fin} \xrightarrow{\bar{L}} \mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin} \xrightarrow{\bar{\bar{F}}} \mathbf{Q}\text{-mod}) \\ = & (\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{L} \mathbf{Z}\text{-mod}/\!\!/\mathbf{Z}\text{-fin} \xrightarrow{\bar{\bar{F}}} \mathbf{Q}\text{-mod}) \\ = & (\mathbf{Z}\text{-lat} \hookrightarrow \mathbf{Z}\text{-mod} \xrightarrow{F} \mathbf{Q}\text{-mod}) . \end{array}$$

Dieses schickt aber den Nichtisomorphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ bis auf isomorphe Ersetzung auf den Isomorphismus $\mathbf{Q} \xrightarrow{2} \mathbf{Q}$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Cf. auch Aufgabe 91.

7.3 Freydkategorie

7.3.1 Begriff der schwach abelschen Kategorie

Sei $\mathcal{K}$ eine additive Kategorie.

Definition 228 Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{K}$ gegeben.

(1) Ein Morphismus $K \xrightarrow{i} X$ heißt *schwacher Kern* von f, falls $if = 0$ und falls für jeden Morphismus $T \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f} Y$ mit $tf = 0$ ein Morphismus $T \xrightarrow{t'} K$ mit $t'i = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ T \arrow[u, dotted, "\exists t'"] \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

(1°) Ein Morphismus $Y \xrightarrow{r} C$ heißt *schwacher Cokern* von f, falls $fr = 0$ und falls für jeden Morphismus $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{t} T$ mit $ft = 0$ ein Morphismus $C \xrightarrow{t'} T$ mit $rt' = t$ existiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "0"'] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "t"] & C \arrow[d, dotted, "\exists t'"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

Cf. Definition 118.

Definition 229 Die additive Kategorie $\mathcal{K}$ heißt *schwach abelsch,* falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

(SAb 1) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ hat einen schwachen Kern.

(SAb 1°) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ hat einen schwachen Cokern.

(SAb 2) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ ist ein schwacher Kern eines Morphismus in $\mathcal{K}$.

(SAb 2°) Jeder Morphismus in $\mathcal{K}$ ist ein schwacher Cokern eines Morphismus in $\mathcal{K}$.

Cf. Definition 120.

Vorsicht, i.a. sind abelsche Kategorien nicht schwach abelsch. Z.B. ist in $\mathbf{Z}$-Mod der Morphismus $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ kein schwacher Cokern eines Morphismus $X \longrightarrow \mathbf{Z}$. Denn dieser Morphismus wäre wegen $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ monomorph notwendig gleich 0. Sodann wäre $(X \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}) = (X \xrightarrow{0} \mathbf{Z})$, wohingegen $\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}$ nicht über $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ faktorisiert.

Beispiel 230

(1) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ eine schwach abelsche Kategorie ist. Cf. §5.2. Dank Dualität genügt es, (SAb 1°, 2) nachzuweisen.

Zu (SAb 1°).

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, zu dem die Existenz eines schwachen Cokerns gezeigt werden soll. Sei $X \xrightarrow{c_X} C_X$ der punktweise split Monomorphismus in den split azyklischen Komplex C_X aus der Lösung zu Aufgabe 65.(1). Wir bilden in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ einen Pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ C_X \arrow[r, "t"] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner" near end] & T \end{tikzcd} ;$$

cf. Korollar 135.(2).

Wir *behaupten,* daß g ein schwacher Cokern zu f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ist.

Zum einen repräsentiert fg einen Nullmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, da $fg = c_X t$ und da C_X split azyklisch, also isomorph zu 0 in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ist.

Sei zum anderen $Y \xrightarrow{u} U$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, der komponiert mit der Restklasse von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ verschwindet. Dann gibt es einen Morphismus $C_X \xrightarrow{v} U$ mit $fu = tv$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$; cf. Aufgabe 65.(1). Die universelle Eigenschaft des Pushouts gibt folgendes kommutative Diagramm in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "u"] & \\ C_X \arrow[r, "t"] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner" near end] \arrow[drr, bend right, "v"'] & T \arrow[dr, "w"] & \\ & & U \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $gw = u$ auch noch in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Zu (SAb 2).

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ein Repräsentant eines Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, von dem gezeigt werden soll, daß er ein schwacher Kern ist. Da $X \xrightarrow{f} Y$ und $X \xrightarrow{(f\ c_X)} Y \oplus C_X$ in $[\![\Delta_1\, , \mathrm{K}(\mathcal{A})]\!]$ isomorph sind, weil C_X in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ isomorph zu 0 ist, genügt es zu zeigen, daß $(f\ c_X)$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ einen schwachen Kern repräsentiert. Somit dürfen wir o.E. annehmen, daß f selbst punktweise split monomorph ist.

Wir ergänzen zu einer punktweise split kurz exakten Sequenz

$$X \overset{f}{\xrightarrow{\bullet}} Y \overset{g}{\xrightarrow{+}} Z\ .$$

Wir wollen zeigen, daß f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ein schwacher Kern von g ist.

Sei $U \xrightarrow{u} Y$ gegeben mit ug nullhomotop.

Die zur Lösung der Aufgabe 65.(1) duale Konstruktion gibt einen punktweise split Epimorphismus $D \overset{p}{\xrightarrow{+}} Z$ mit D split azyklisch und eine Faktorisierung $ug = vp$. Nach Eintragen und Ausnutzen eines Pullbacks (Y', D, Y, Z) und eines Kerns erhalten wir das folgende kommutative Diagramm in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ mit kurz exakten Zeilen; cf. Lemma 134.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
X \arrow[r, "f'", "\bullet"'] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "g'", "+"'] \arrow[d, "p'"', "+"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & D \arrow[d, "p", "+"'] \\
X \arrow[r, "f"', "\bullet"] & Y \arrow[r, "g"', "+"] & Z
\end{tikzcd}$$

Können wir zeigen, daß es ein $X \xleftarrow{r} Y'$ mit $f'r = 1$ gibt, so folgt $(wr)f - u = wrf'p' - wp' = w(rf' - 1)p'$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Aber da $f'(rf' - 1) = 0$, faktorisiert $rf' - 1$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ über D. Da D split azyklisch ist, folgt, daß in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ in der Tat $(wr)f = u$ ist.

Es genügt zu zeigen, daß g' in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine Retraktion ist, da dies nach Aufgabe 58.(2°) impliziert, daß f' eine Coretraktion ist.

Zeigen wir zunächst, daß g' punktweise split epimorph ist. Hierzu genügt es dank Aufgabe 58.(2°) zu zeigen, daß in $\mathcal{A}$ ein Pullback eines Morphismus $A' \xrightarrow{a} A$ entlang $A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} A$ wieder eine Retraktion ist. In der Tat zeigt das Kern-Cokern-Kriterium, Lemma 134, daß

$$\begin{tikzcd}
A' \oplus B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right)"'] & A' \arrow[d, "a"] \\
A \oplus B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] & A
\end{tikzcd}$$

ein Pullback ist.

Bleibt zu zeigen, daß in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ der punktweise split Epimorphismus $Y' \xrightarrow{g'} D$ mit split azyklischem Zielobjekt D eine Retraktion ist. Ohne Einschränkung ist dieser punktweise split Epimorphismus von der Form

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\cdots \arrow[r] \& A^{i-1} \oplus A^i \oplus B^{i-1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & k^{i-1} \\ 1 & 0 & \ell^{i-1} \\ 0 & 0 & m^{i-1} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \& A^i \oplus A^{i+1} \oplus B^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & k^{i} \\ 1 & 0 & \ell^{i} \\ 0 & 0 & m^{i} \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \& A^{i+1} \oplus A^{i+2} \oplus B^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] \& \cdots \\
\cdots \arrow[r] \& A^{i-1} \oplus A^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \& A^i \oplus A^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \& A^{i+1} \oplus A^{i+2} \arrow[r] \& \cdots
\end{tikzcd}$$

mit $k^{i-1}m^i = 0$, $k^i + \ell^{i-1}m^i = 0$ und $m^{i-1}m^i = 0$ für alle $i \in \mathbf{Z}$. Als zugehörige Coretraktion können wir daher

$$\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
\cdots \arrow[r] \& A^{i-1} \oplus A^i \oplus B^{i-1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & k^{i-1} \\ 1 & 0 & \ell^{i-1} \\ 0 & 0 & m^{i-1} \end{smallmatrix}\right)"] \& A^i \oplus A^{i+1} \oplus B^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & k^{i} \\ 1 & 0 & \ell^{i} \\ 0 & 0 & m^{i} \end{smallmatrix}\right)"] \& A^{i+1} \oplus A^{i+2} \oplus B^{i+1} \arrow[r] \& \cdots \\
\cdots \arrow[r] \& A^{i-1} \oplus A^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \ell^{i-2} \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \& A^i \oplus A^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \ell^{i-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \& A^{i+1} \oplus A^{i+2} \arrow[r] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \ell^{i} \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \& \cdots
\end{tikzcd}$$

wählen.

Allgemeiner ist jede sogenannte *triangulierte* Kategorie schwach abelsch.

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven und genügend Projektiven. Sei ferner vorausgesetzt, daß ein Objekt in $\mathcal{A}$ genau dann injektiv ist, wenn es projektiv ist. Dann heißt $\mathcal{A}$ auch eine *abelsche Frobeniuskategorie.*

Für p prim und $n \geqslant 1$ ist z.B. $\mathbf{Z}/p^n$-mod eine abelsche Frobeniuskategorie; cf. Aufgabe 64.(1, 2).

Wir wollen zeigen, daß $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ ($= \operatorname{Inj}\mathcal{A}$) eine schwach abelsche Kategorie ist. Dank Dualität genügt es, (SAb 1, 2°) nachzuweisen.

Zu (SAb 1). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ gegeben. Wir wählen ein Diagramm

$$P \xrightarrow{u} \mathrm{K}_f \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{f} Y$$

in $\mathcal{A}$ mit P projektiv und wollen zeigen, daß $u\,\iota$ in $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ ein schwacher Kern von f ist.

Sei $Q \xrightarrow{q} X$ mit Q projektiv und $qf = 0$ gegeben. Dann gibt es ein q' mit $q'\iota = q$. Wegen Q projektiv und u epimorph gibt es ein q'' mit $q''u = q'$. Insgesamt ist also $q''(u\,\iota) = q'\iota = q$.

Zu (SAb 2°). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\operatorname{Proj}\mathcal{A}$ gegeben. Wieder wählen wir ein Diagramm

$$P \xrightarrow{u} \mathrm{K}_f \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{I}_f \xrightarrow{\dot{f}} Y$$

in $\mathcal{A}$ mit P projektiv und wollen zeigen, daß f ein schwacher Cokern von $u\,\iota$ ist.

Sei $X \xrightarrow{r} R$ mit R projektiv und $(u\,\iota)r = 0$ gegeben. Wegen u epimorph ist $\iota\, r = 0$. Also gibt es ein r' mit $\bar{f}r' = r$; cf. Bemerkung 124.(1). Wegen R auch injektiv und $\dot{f}$ monomorph gibt es ein r'' mit $\dot{f}r'' = r'$. Insgesamt ist also $fr'' = \bar{f}\dot{f}r'' = \bar{f}r' = r$.

7.3.2 Konstruktion der Freydkategorie

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Definition 231 Sei $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]_0$ die volle additive Teilkategorie in $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$ der Objekte der Form $X \xrightarrow{0} Y$, wobei $X,\, Y \,\in\, \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Definiere die *Freydkategorie* $\hat{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{K}$ als Faktorkategorie

$$\hat{\mathcal{K}} \;:=\; [\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]/[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]_0\;;$$

cf. Definition 114.

Es ist $\hat{\mathcal{K}}$ eine additive Kategorie; cf. Aufgabe 57.(1), Bemerkung 115.

Objekte in $\hat{\mathcal{K}}$ sind also gegeben durch Morphismen in $\mathcal{K}$.

Morphismen in $\hat{\mathcal{K}}$ werden durch kommutative Vierecke in $\mathcal{K}$ repräsentiert.

Seien $(X \xrightarrow{f} Y)$, $(X' \xrightarrow{f'} Y') \,\in\, \operatorname{Ob}\hat{\mathcal{K}}$. Sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

ein Morphismus in $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$, i.e. sei $fy = xf'$. Der vom Morphismus

$$(X \xrightarrow{f} Y) \;\xrightarrow{(x,y)}\; (X' \xrightarrow{f'} Y')$$

aus $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$ in $\hat{\mathcal{K}}$ repräsentierte Morphismus werde

$$(X \xrightarrow{f} Y) \;\xrightarrow{[x,y]}\; (X' \xrightarrow{f'} Y')$$

geschrieben.

Bemerkung 232 *Seien* $(X \xrightarrow{f} Y)$, $(X' \xrightarrow{f'} Y') \,\in\, \operatorname{Ob}\hat{\mathcal{K}}$. *Seien*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{x}"'] & Y \arrow[d, "\tilde{y}"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

zwei Morphismen von $(X \xrightarrow{f} Y)$ *nach* $(X' \xrightarrow{f'} Y')$ *in* $[\![\Delta_1\,,\mathcal{K}]\!]$.

Es ist $[x,y] = [\tilde{x},\tilde{y}]$ *genau dann, wenn* $(x-\tilde{x})f' = f(y-\tilde{y})$ *gleich null ist.*

Beweis. O.E. ist $\tilde{x} = 0$ und $\tilde{y} = 0$.

Es ist $[x, y] = [0, 0]$ genau dann, wenn es in $\mathcal{K}$ ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x_1"'] & Y \arrow[d, "y_1"] \\ \bar{X} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "x_2"'] & \bar{Y} \arrow[d, "y_2"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

mit $x = x_1 x_2$ und $y = y_1 y_2$ gibt.

Gibt es solch ein Diagramm, dann ist $xf' = x_1 x_2 f' = x_1 \cdot 0 \cdot y_2 = 0$.

Ist umgekehrt $xf' = 0$, dann existiert ein solches Diagramm mit $x_1 := \mathrm{id}_X$, $x_2 := x$, $y_1 := y$ und $y_2 := \mathrm{id}_{Y'}$. ▫

7.3.3 Freydkategorie abelsch

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Satz 233 (Freydkategorie abelsch)

(1) *Es ist die Freydkategorie* $\hat{\mathcal{K}}$ *abelsch; cf. Definitionen* 231 *und* 120.

(2) *Jeder Monomorphismus in* $\hat{\mathcal{K}}$ *ist isomorph in* $[\![\Delta_1 , \hat{\mathcal{K}}]\!]$ *zu einem Morphismus der Form* $[x, \mathrm{id}_Y]$ *; jeder Morphismus dieser Form ist monomorph.*

(2°) *Jeder Epimorphismus in* $\hat{\mathcal{K}}$ *ist isomorph in* $[\![\Delta_1 , \hat{\mathcal{K}}]\!]$ *zu einem Morphismus der Form* $[\mathrm{id}_X, y]$ *; jeder Morphismus dieser Form ist epimorph.*

(3) *Jede kurz exakte Sequenz in* $\hat{\mathcal{K}}$ *ist isomorph in* $[\![\Delta_2 , \hat{\mathcal{K}}]\!]$ *zu einer der Form*

$$(X' \xrightarrow{xf} Y) \xrightarrow{[x, \mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[\mathrm{id}_X , y]} (X \xrightarrow{fy} Y'') ,$$

wobei y *ein schwacher Cokern von* xf *ist; jede solche Sequenz ist kurz exakt.*

(3°) *Jede kurz exakte Sequenz in* $\hat{\mathcal{K}}$ *ist isomorph in* $[\![\Delta_2 , \hat{\mathcal{K}}]\!]$ *zu einer der Form*

$$(X' \xrightarrow{xf} Y) \xrightarrow{[x, \mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[\mathrm{id}_X , y]} (X \xrightarrow{fy} Y'') ,$$

wobei x *ein schwacher Kern von* fy *ist; jede solche Sequenz ist kurz exakt.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $\hat{\mathcal{K}}$ additiv; cf. Definition 231.

Schritt 1. *Ein Morphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ der Form $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,\mathrm{id}_Y]} (X' \xrightarrow{f'} Y)$ ist monomorph.*

Dies zeigt dann den zweiten Teil von (2).

Sei $[s,t]$ so gegeben, daß $[0,0] = [s,t][x,\mathrm{id}_Y] = [sx,t]$. Dann ist $sxf' = sf = 0$. Also ist auch $[s,t] = [0,0]$.

Schritt 2. *Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')$ in $\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. Sei $K \xrightarrow{i} X$ in $\mathcal{K}$ ein schwacher Kern von $xf' = fy$. Dann ist $(K \xrightarrow{if} Y) \xrightarrow{[i,\mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y)$ ein Kern von $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')$.*

Dies zeigt dann (Ab 1) für (1).

Es ist $[i,\mathrm{id}_Y][x,y] = [0,0]$, da $ify = 0$.

Sei $(S \xrightarrow{g} T) \xrightarrow{[s,t]} (X \xrightarrow{f} Y)$ mit $[0,0] = [s,t][x,y]$, i.e. mit $sxf' = 0$ gegeben. Wir haben die Existenz einer Faktorisierung von $[s,t]$ über $[i,\mathrm{id}_Y]$ zu zeigen; die Eindeutigkeit folgt dann mit Schritt 1.

Da i in $\mathcal{K}$ ein schwacher Kern von xf' ist, gibt es ein s' mit $s'i = s$. Es ist $s'if = sf = gt$. Folglich ist $[s,t] = [s',t][i,\mathrm{id}_Y]$.

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "s'"'] \arrow[ddl, "s"] & & T \arrow[dl, "t"'] \arrow[ddl, "t"] \\
K \arrow[rr, "if"] \arrow[d, "i"'] & & Y \arrow[d, equal] & \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "x"'] & & Y \arrow[d, "y"] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] & & Y' &
\end{tikzcd}$$

Schritt 3. *Ein Morphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ der Form $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,\mathrm{id}_Y]} (X' \xrightarrow{f'} Y)$ ist ein Kern eines Morphismus in $\hat{\mathcal{K}}$.*

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{K}$ ein schwacher Kern von $Y \xrightarrow{z} Z$.

Es ist $[x,\mathrm{id}_Y][\mathrm{id}_{X'}, z] = [0,0]$, da $fz = 0$.

Sei $(S \xrightarrow{g} T) \xrightarrow{[s,t]} (X \xrightarrow{f} Y)$ mit $[0,0] = [s,t][\mathrm{id}_{X'}, z]$, i.e. mit $sf'z = 0$ gegeben. Wir haben die Existenz einer Faktorisierung von $[s,t]$ über $[x,\mathrm{id}_Y]$ zu zeigen; die Eindeutigkeit folgt dann mit Schritt 1.

Da f in $\mathcal{K}$ ein schwacher Kern von z ist, gibt es ein s' mit $s'f = sf'$. Es ist $s'f = sf' = gt$.

Es ist $g(t \cdot \mathrm{id}_Y - t) = 0$. Folglich ist $[s,t] = [s',t][x, \mathrm{id}_Y]$.

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "s'"'] \arrow[ddl, "s"] & & T \arrow[dl, "t"'] \arrow[ddl, "t"] \\
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "x"'] & & Y \arrow[d, equal] & \\
X' \arrow[rr, "f'"] \arrow[d, equal] & & Y \arrow[d, "z"] & \\
X' \arrow[rr, "f'z"] & & Z &
\end{tikzcd}$$

Schritt 4. *Jeder Monomorphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $\llbracket \Delta_1, \hat{\mathcal{K}} \rrbracket$ zu einem Morphismus der Form $[x, \mathrm{id}_Y]$. Jeder Monomorphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ ist ein Kern eines Morphismus in $\hat{\mathcal{K}}$.*

Dies zeigt dann den ersten Teil von (2) und (Ab 2) für (1).

Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')$ ein Monomorphismus. Es ist $[x,y] = [\mathrm{id}_X, y][x, \mathrm{id}_{Y'}]$. Daher ist $[\mathrm{id}_X, y]$ monomorph; cf. Aufgabe 36.(1).

Nach Schritt 3° ist $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Cokern eines Morphismus $[s,t]$ in $\hat{\mathcal{K}}$. Insbesondere ist $[s,t][\mathrm{id}_X, y] = 0$. Da $[\mathrm{id}_X, y]$ monomorph ist, folgt $[s,t] = 0$. Also ist $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 119.(4°, 2°).

Nach Schritt 3 ist $[x, \mathrm{id}_{Y'}]$ Kern eines Morphismus $[u,v]$ in $\hat{\mathcal{K}}$. Da $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Isomorphismus ist, ist auch $[x,y] = [\mathrm{id}_X, y][x, \mathrm{id}_{Y'}]$ ein Kern von $[u,v]$; cf. Bemerkung 119.(5).

Schritt 5. *Jede kurz exakte Sequenz in $\hat{\mathcal{K}}$ ist isomorph in $\llbracket \Delta_2, \hat{\mathcal{K}} \rrbracket$ zu einer der Form*

$$(X' \xrightarrow{xf} Y') \xrightarrow{[x,\mathrm{id}_Y]} (X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[\mathrm{id}_X, y]} (X \xrightarrow{fy} Y'') ,$$

wobei y ein schwacher Cokern von xf ist. Jede Sequenz dieser Form ist kurz exakt.

Dies zeigt dann (3).

Nach Schritt 2° und Schritt 1 ist eine Sequenz dieser Form kurz exakt.

Sei umgekehrt eine kurz exakte Sequenz in $\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. Nach Schritt 4 ist ihr Monomorphismus isomorph zu einem der Form $[x, \mathrm{id}_Y]$. Sei y ein schwacher Cokern von xf. Nach Schritt 2° ist $[\mathrm{id}_X, y]$ ein Cokern von $[x, \mathrm{id}_Y]$. Nach Bemerkung 124.(2) wird nun auf den Cokernen ein Isomorphismus so induziert, daß die gegebene kurz exakte Sequenz isomorph zur kurz exakten Sequenz $([x, \mathrm{id}_Y], [\mathrm{id}_X, y])$ ist. $\square$

7.3.4 Einbettung von $\mathcal{K}$ in $\hat{\mathcal{K}}$

Bemerkung 234

(1) *Wir haben einen vollen und treuen additiven Funktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \xrightarrow{E = E_{\mathcal{K}}} & \hat{\mathcal{K}} \\ (X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & \big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X) \xrightarrow{[f,f]} (Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y)\big) \end{array}$$

(2) *Jedes Objekt im Bild von E ist injektiv und projektiv.*

(3) *Zu allen Objekten aus $\hat{\mathcal{K}}$ gibt es einen Epimorphismus von einem Objekt aus dem Bild von E.*

(3°) *Von allen Objekten aus $\hat{\mathcal{K}}$ gibt es einen Monomorphismus zu einem Objekt aus dem Bild von E.*

Wir schreiben auch $\hat{X} := EX$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ und $\hat{f} := Ef$ für $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}$.

Beweis.

Zu (1). Der Funktor E ist additiv, da $\left(\begin{smallmatrix} E\pi_1 & E\pi_2 \end{smallmatrix}\right) : E(X \oplus Y) \longrightarrow EX \oplus EY$ (bei der sich aus der Konstruktion ergebenden Wahl der direkten Summe auf $\hat{\mathcal{K}}$) die Identität ist für $X,\, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$; cf. Definition 110.

Der Funktor E ist treu, da $[f,f] = [0,0]$ genau dann gilt, wenn $f = \mathrm{id}_X\, f = 0$ ist. Er ist voll, da jeder Morphismus von $(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X)$ nach $(Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y)$ in $\hat{\mathcal{K}}$ von der Form $[f,f]$ ist.

Zu (2). Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X)$ projektiv ist.

Sei $(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{[y,z]} (Y' \xrightarrow{g'} Z')$ in $\hat{\mathcal{K}}$ gegeben.

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y) & \xrightarrow{\lambda_g} & \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), (Y \xrightarrow{g} Z)\big) \\ s & \longmapsto & [s, sg] \end{array}$$

ist surjektiv, da jeder Morphismus in $\hat{\mathcal{K}}$ von der angegebenen Form ist. Das Viereck

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y) \arrow[r, "\lambda_g"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,y)"'] & \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), (Y \xrightarrow{g} Z)\big) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\left((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), [y,z]\right)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y') \arrow[r, "\lambda_{g'}"] & \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), (Y' \xrightarrow{g'} Z')\big) \end{tikzcd}$$

kommutiert, da zum einen $s \longmapsto [s, sg] \longmapsto [sy, sgz]$ und zum anderen $s \longmapsto sy \longmapsto [sy, syg'] = [sy, sgz]$ abgebildet wird.

Sei $[y,z]$ nun ein Epimorphismus. Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), [y,z]\big)$ surjektiv ist. Nach Satz 233.(2°) ist $[y,z]$ isomorph zu einem Morphismus mit einer Identität als erstem Eintrag. Also ist o.E. $y = \mathrm{id}_Y$. Diesenfalls steht in unserem kommutativen Viereck links eine Identität, so daß die Surjektivität von $\lambda_{g'}$ die Surjektivität von $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}\big((X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X), [y,z]\big)$ nach sich zieht.

Zu $(3, 3°)$. Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathrm{Ob}\,\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. In $\hat{\mathcal{K}}$ wird

$$(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X) \overset{[\mathrm{id}_X, f]}{\twoheadrightarrow} (X \xrightarrow{f} Y) \overset{[f, \mathrm{id}_Y]}{\rightarrowtail} (Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y)\ .$$

□

Definition 235 In einer additiven Kategorie heiße ein Objekt U ein *direkter Summand* eines Objektes B, wenn es ein Objekt A' mit $A \oplus A' \simeq B$ gibt.

Korollar 236

(1) *Ein Objekt in $\hat{\mathcal{K}}$ ist genau dann projektiv, wenn es injektiv ist.*

(2) *Die projektiven Objekte von $\hat{\mathcal{K}}$ sind genau die direkten Summanden von Objekten im Bild von E.*

Cf. Beispiel 230.(2).

Beweis.

Zu (2). Ein direkter Summand eines Objekts im Bild von E ist projektiv; cf. Bemerkungen 234.(2) und 141.

Sei umgekehrt P ein projektives Objekt von $\hat{\mathcal{K}}$. Wähle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ mit $\hat{X} \overset{x}{\twoheadrightarrow} P$; cf. Bemerkung 234.(3). Wegen P projektiv ist der Epimorphismus x eine Retraktion; verwende hierzu ein Urbild von id_P unter der Surjektion $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{K}}}(P, x)$. Also ist $\hat{X} \simeq \mathrm{K}_x \oplus P$; cf. Aufgabe 58.(2°).

Zu (1). Dies folgt aus (2) und (2°).

□

7.3.5 Exakte Sequenzen

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Definition 237 In einer abelschen Kategorie heiße eine Sequenz $U \xrightarrow{a} V \xrightarrow{b} W$ *exakt bei V* oder *exakt in der Mitte,* falls die Sequenz $\mathrm{I}_a \overset{\dot{a}}{\rightarrowtail} V \overset{\bar{b}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{I}_b$ kurz exakt ist; cf. Definitionen 125.(1) und 130.

Bemerkung 238 (und Definition) *Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{K}$ gegeben. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(1) *Es ist f ein schwacher Kern von g.*

(1°) *Es ist g ein schwacher Cokern von f.*

(2) *Es ist die Sequenz $\hat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Y} \xrightarrow{\hat{g}} \hat{Z}$ exakt bei $\hat{Y}$.*

Diesenfalls heiße die Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exakt bei Y *oder* exakt in der Mitte.

Beweis.

Zu (1) $\Rightarrow$ (2). Sei f ein schwacher Kern von g.

Wegen $\hat{f}\hat{g} = 0$ können wir $\hat{f} = f'\iota_{\hat{g}}$ faktorisieren. Wir wollen zeigen, daß f' epimorph ist.

Wiederholt wird verwandt werden, daß E voll, treu und additiv ist ; cf. Bemerkung 234.(1).

Wähle $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ mit $\hat{U} \xrightarrow{u} \mathrm{K}_{\hat{g}}$; cf. Bemerkung 234.(3). Da E voll ist, ist $u\,\iota_{\hat{g}} = \hat{v}$ für ein $U \xrightarrow{v} Y$ in $\mathcal{K}$. Es ist $\hat{v}\hat{g} = u\,\iota_{\hat{g}}\hat{g} = 0$, wegen E treu und additiv also $vg = 0$. Da f ein schwacher Kern von g ist, gibt es ein $U \xrightarrow{w} X$ in $\mathcal{K}$ mit $wf = v$. Es folgt

$$u\,\iota_{\hat{g}} \;=\; \hat{v} = \hat{w}\hat{f} \;=\; \hat{w}f'\iota_{\hat{g}} \;,$$

und somit $u = \hat{w}f'$. Da u epimorph ist, gilt dies auch für f' ; cf. Aufgabe 36.(1°).

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[rr, "\hat{f}"] \arrow[dr, "f'"'] & & \hat{Y} \arrow[r, "\hat{g}"] & \hat{Z} \\
& \mathrm{K}_{\hat{g}} \arrow[ur, "\iota_{\hat{g}}"'] & & \\
\hat{U} \arrow[uu, "\hat{w}"] \arrow[ur, "u"'] \arrow[uurr, bend right, "\hat{v}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Dual dazu gibt es auch eine Faktorisierung $\hat{g} = \rho_{\hat{f}}\, g'$ mit g' monomorph. Daher ist $\iota_{\hat{g}}$ auch ein Kern von $\rho_{\hat{f}}$; cf. Bemerkung 119.(6). Somit ist die Sequenz $(\iota_{\hat{g}}\,,\rho_{\hat{f}})$ kurz exakt. Also ist die Sequenz $(\hat{f},\hat{g})$ exakt bei $\hat{Y}$; cf. Bemerkungen 124.(3) und 119.(5).

Zu (2) $\Rightarrow$ (1). Sei $\hat{X} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{Y} \xrightarrow{\hat{g}} \hat{Z}$ exakt bei $\hat{Y}$. Wir wollen zeigen, daß f ein schwacher Kern von g ist. Sei $U \xrightarrow{u} Y$ mit $ug = 0$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß u über f faktorisiert.

Es ist $\hat{u}\hat{g} = 0$. Da $\dot{\hat{f}}$ ein Kern von $\bar{\hat{g}}$ ist und da $\bar{\hat{g}}\dot{\hat{g}} = \hat{g}$ mit $\dot{\hat{g}}$ monomorph ist, ist $\dot{\hat{f}}$ auch ein Kern von $\hat{g}$; cf. Bemerkung 119.(6). Also gibt es ein $\hat{U} \xrightarrow{u'} \mathrm{I}_{\hat{f}}$ mit $u'\dot{\hat{f}} = \hat{u}$.

Wegen $\hat U$ projektiv und $\bar{\hat f}$ epimorph und E voll gibt es ein $U \xrightarrow{u''} X$ mit $\hat u'' \bar{\hat f} = u'$; cf. Bemerkung 234.(2). Insgesamt wird $\hat u'' \hat f = \hat u'' \bar{\hat f} \dot{\hat f} = u' \dot{\hat f} = \hat u$, wegen E treu also $u'' f = u$.

$$
\begin{tikzcd}
\hat X \arrow[r, "\bar{\hat f}"] & \mathrm{I}_{\hat f} \arrow[r, "\dot{\hat f}"] & \hat Y \arrow[r, "\bar{\hat g}"] & \mathrm{I}_{\hat g} \arrow[r, "\dot{\hat g}"] & \hat Z \\
 & & \hat U \arrow[ull, "\hat u''"] \arrow[ul, "u'"'] \arrow[u, "\hat u"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

7.3.6 Universelle Eigenschaft der Freydkategorie

Sei $\mathcal{K}$ eine schwach abelsche Kategorie; cf. Definition 229.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Definition 239 Ein additiver Funktor $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ heißt *exakt* oder *cohomologisch,* wenn für alle Sequenzen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

in $\mathcal{K}$, die exakt in der Mitte sind, auch die Sequenz

$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$$

exakt in der Mitte ist.

Es ist e.g. $\mathcal{K} \xrightarrow{E} \hat{\mathcal{K}}$ exakt; cf. Bemerkung 238.

Bezeichne ${}_{\mathrm{ex}}[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ die volle additive Teilkategorie von $[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ der exakten Funktoren.

Bezeichne ${}_{\mathrm{ex}}[\![\mathcal{A}, \mathcal{B}]\!]$ die volle additive Teilkategorie von $[\![\mathcal{A}, \mathcal{B}]\!]$ der exakten Funktoren im Sinne von Definition 128.(1).

Sind $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ exakte Funktoren, so auch $\mathcal{K} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{A}$.

Definition 240 Ein additiver Funktor $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ heiße *provisorisch exakt,* wenn für alle Morphismen $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{K}$ ein schwacher Cokern $Y \xrightarrow{g} Z$ so existiert, daß die Sequenz

$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$$

exakt in der Mitte ist.

Bezeichne ${}_{\mathrm{pex}}[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ die volle Teilkategorie von $[\![\mathcal{K}, \mathcal{A}]\!]$ der provisorisch exakten Funktoren.

Exakte Funktoren von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{A}$ sind provisorisch exakt.

Ist $\mathcal{K} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ ein provisorisch exakter Funktor und ist $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor, so ist $\mathcal{K} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{A}$ provisorisch exakt.

In Korollar 243 werden wir zeigen, daß ein additiver Funktor von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{A}$ genau dann provisorisch exakt ist, wenn er exakt ist. Um dies zeigen zu können, werden wir folgendes Lemma 242 mit dem provisorischen Exaktheitsbegriff durchführen. Die Äquivalenz der beiden Begriffe wird uns dann in Beispiel 244 zugute kommen.

Definition 241 Seien Funktoren $\mathcal{U} \xrightarrow{S} \mathcal{V} \overset{T}{\underset{T'}{\rightrightarrows}} \mathcal{W}$ und eine Transformation $T \xrightarrow{t} T'$ gegeben. Wir definieren die Transformation $T \circ S \xrightarrow{t \circ S} T' \circ S$ als

$$t \circ S \;:=\; (tSX)_{X \in \operatorname{Ob} \mathcal{U}} \;.$$

Beachte hierzu, daß das Viereck

$$\begin{tikzcd}
(T \circ S)X \arrow[r, "(t\circ S)X"] \arrow[d, "(T\circ S)f"'] & (T' \circ S)X \arrow[d, "(T'\circ S)f"] \\
(T \circ S)X' \arrow[r, "(t\circ S)X'"] & (T' \circ S)X'
\end{tikzcd}$$

für $X \xrightarrow{f} Y$ aus $\mathcal{U}$ wegen der Natürlichkeit von t kommutiert.

Lemma 242 (Universelle Eigenschaft der Freydkategorie)
Der additive Funktor

$$\begin{array}{rcl}
{}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!] & \longrightarrow & {}_{\mathrm{pex}}[\![\mathcal{K}, \mathcal{B}]\!] \\
(F \xrightarrow{a} F') & \longmapsto & (F \circ E \xrightarrow{a \circ E} F' \circ E)
\end{array}$$

ist voll, treu und strikt dicht.

Somit haben wir eine inverse Äquivalenz, die jedem provisorisch exakten Funktor $\mathcal{K} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ einen exakten Funktor $\hat{\mathcal{K}} \xrightarrow{\hat{G}} \mathcal{B}$ so zuordnet, daß $\hat{G} \circ E = G$; cf. Lemma 96.

Beweis.

Zur Additivität. Mit jeweils der punktweise genommenen direkten Summe wird

$$(F \oplus F') \circ E \xrightarrow{(\pi_1 \circ E \;\; \pi_2 \circ E)} (F \circ E) \oplus (F' \circ E)$$

die Identität für $F,\, F' \in \operatorname{Ob} {}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!]$; cf. Definition 110, Aufgabe 57.(1).

Zur Treuheit. Sei $F \xrightarrow{a} F'$ in ${}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!]$ so gegeben, daß $a \circ E = 0$. Wir haben zu zeigen, daß $a \overset{!}{=} 0$.

Sei $U \in \operatorname{Ob} \hat{\mathcal{K}}$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß $aU \overset{!}{=} 0$.

Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ mit $EX \overset{f}{\twoheadrightarrow} U$; cf. Bemerkung 234.(3). Wegen F exakt ist Ff epimorph. Es wird

$$(Ff)(aU) \;=\; (aEX)(F'f) \;=\; 0(F'f) \;=\; 0 \;,$$

und also $aU = 0$.

Zur Vollheit. Seien $F,\ F' \in \operatorname{Ob}{}_{\mathrm{ex}}[\![\hat{\mathcal{K}}, \mathcal{B}]\!]$ gegeben. Sei $F \circ E \xrightarrow{b} F' \circ E$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß es ein $F \xrightarrow{a} F'$ mit $a \circ E = b$ gibt.

Sei $U \in \operatorname{Ob}\hat{\mathcal{K}}$. Wir wollen aU definieren. Wir wählen ein $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ mit $EX \overset{f}{\twoheadrightarrow} U$ und ein $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ mit $U \overset{g}{\rightarrowtail} EY$; cf. Bemerkung 234.(3, 3°). Wegen E voll und treu gibt es genau ein $X \xrightarrow{s} Y$ mit $Es = fg$; cf. Bemerkung 234.(1). Insbesondere wird

$$(bX)(F'f)(F'g) \;=\; (bX)((F' \circ E)s) \;=\; ((F \circ E)s)(bY) \;=\; (Ff)(Fg)(bY)\ .$$

Wir können also

$$\begin{tikzcd}
FEX \arrow[r, "Ff", "\shortmid" marking] \arrow[d, "bX"'] & FU \arrow[r, "Fg", "\bullet" marking] \arrow[d, "aU"'] & FEY \arrow[d, "bY"] \\
F'EX \arrow[r, "F'f", "\shortmid" marking] & F'U \arrow[r, "F'g", "\bullet" marking] & F'EY
\end{tikzcd}$$

setzen; cf. Bemerkung 124.(2).

Wir wollen die Unabhängigkeit von aU von den getroffenen Wahlen nachweisen. Da aU bereits durch die Kommutativität des linken Vierecks bestimmt ist, genügt es, eine alternative Wahl $\tilde{X} \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ mit $E\tilde{X} \overset{\tilde{f}}{\twoheadrightarrow} U$ zu betrachten und zu zeigen, daß aus $(F\tilde{f})(\tilde{a}U) = (b\tilde{X})(F'\tilde{f})$ bereits $\tilde{a}U = aU$ folgt.

Wir bilden in $\hat{\mathcal{K}}$ folgenden Pullback, für den wir sogleich ein Objekt $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ zusammen mit einem Epimorphismus auf den Pullback wählen; cf. Korollar 135.(2), Bemerkung 234.(3). Unter Verwendung von E voll und treu kommutiere insgesamt

$$\begin{tikzcd}
EZ \arrow[dr, "\shortmid" marking] \arrow[drr, "E\tilde{h}", "\shortmid" marking] \arrow[ddr, "Eh"', "\shortmid" marking] & & \\
& W \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[d, "\shortmid" marking] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" very near start] & E\tilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}", "\shortmid" marking] \\
& EX \arrow[r, "f"', "\shortmid" marking] & U\ ;
\end{tikzcd}$$

cf. Bemerkung 234.(1). Wegen F exakt sind u.a. FEh und Ff epimorph.

Es genügt also, $(FEh)(Ff)(\tilde{a}U) \overset{!}{=} (FEh)(Ff)(aU)$ zu zeigen.

In der Tat ergibt sich

$$\begin{array}{rcl}
(FEh)(Ff)(\tilde{a}U) & = & (FE\tilde{h})(F\tilde{f})(\tilde{a}U) \\
& = & (FE\tilde{h})(b\tilde{X})(F'\tilde{f}) \\
& = & (bZ)(F'E\tilde{h})(F'\tilde{f}) \\
& = & (bZ)(F'Eh)(F'f) \\
& = & (FEh)(bX)(F'f) \\
& = & (FEh)(Ff)(aU)\ .
\end{array}$$

Wir wollen nachweisen, daß $(aU)_{U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}}$ eine Transformation ist.

Sei $U_1 \xrightarrow{t} U_2$ in $\hat{\mathcal{K}}$ gegeben. Zu zeigen ist, daß $(aU_1)(F't) \overset{!}{=} (Ft)(aU_2)$.

Sei $X_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ mit $EX_1 \xrightarrow{f_1} U_1$ und $(Ff_1)(aU_1) = (bX_1)(F'f_1)$ gewählt; möglich nach Konstruktion von a.

Sei $Y_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ mit $U_2 \xrightarrow{g_2} EY_2$ und $(aU_2)(F'g_2) = (Fg_2)(bY_2)$ gewählt; möglich nach Konstruktion von a.

Wegen F exakt ist Ff_1 epimorph und $F'g_2$ monomorph. Es genügt also, $(Ff_1)(aU_1)(F't)(F'g_2) \overset{!}{=} (Ff_1)(Ft)(aU_2)(F'g_2)$ zu zeigen.

Wegen E voll und treu finden wir ein r mit $Er = f_1 t g_2$; cf. Bemerkung 234.(1)

Damit ergibt sich in der Tat

$$\begin{aligned} (Ff_1)(aU_1)(F't)(F'g_2) &= (bX_1)(F'f_1)(F't)(F'g_2) \\ &= (bX_1)(F'Er) \\ &= (FEr)(bY_2) \\ &= (Ff_1)(Ft)(Fg_2)(bY_2) \\ &= (Ff_1)(Ft)(aU_2)(F'g_2)\ . \end{aligned}$$

Wir wollen nachweisen, daß $a \circ E \overset{!}{=} b$.

Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$. Wir haben zu zeigen, daß $aEX \overset{!}{=} bX$. Zur Berechnung von aEX dürfen wir $EX \xrightarrow{1} EX \xrightarrow{1} EX$ verwenden und erhalten in der Tat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} FEX \arrow[r, "F1"] \arrow[d, "bX"'] & FEX \arrow[r, "F1"] \arrow[d, "aEX"'] & FEX \arrow[d, "bX"] \\ F'EX \arrow[r, "F'1"] & F'EX \arrow[r, "F'1"] & F'EX\ . \end{tikzcd}$$

Zur strikten Dichtheit. Sei gegeben $\mathcal{K} \xrightarrow{G} \mathcal{A}$ provisorisch exakt. Wir definieren einen Funktor $\hat{\mathcal{K}} \xrightarrow{\hat{G}} \mathcal{A}$ wie folgt. Ein Morphismus $[x, y]$ in $\hat{\mathcal{K}}$ ist repräsentiert durch ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y'\ . \end{tikzcd}$$

Wir bilden

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r, "\overline{Gf}"] \arrow[d, "Gx"'] & \mathrm{I}_{Gf} \arrow[r, "\dot{Gf}"] \arrow[d, "z"'] & GY \arrow[d, "Gy"] \\ GX' \arrow[r, "\overline{Gf'}"] & \mathrm{I}_{Gf'} \arrow[r, "\dot{Gf'}"] & GY' \end{tikzcd}$$

gemäß Bemerkung 124.(2) und setzen

$$\hat{G}\big((X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{[x,y]} (X' \xrightarrow{f'} Y')\big) \;:=\; (\mathrm{I}_{Gf} \xrightarrow{z} \mathrm{I}_{Gf'})\;.$$

Der Morphismus z hängt hierbei nicht von der Wahl des Repräsentanten ab. Denn ist $[\tilde{x},\tilde{y}] = [x,y]$, dann ist $f(y-\tilde{y}) = (x-\tilde{x})f' = 0$, also $(\overset{\bullet}{G}f)(Gy - G\tilde{y}) = 0$ und $(Gx - G\tilde{x})(\overline{Gf'}) = 0$, und somit zum einen

$$(G\tilde{x})(\overline{Gf'}) \;=\; (Gx)(\overline{Gf'}) \;=\; (\overline{Gf})z\;,$$

zum anderen

$$(\overset{\bullet}{G}f)(G\tilde{y}) \;=\; (\overset{\bullet}{G}f)(Gy) \;=\; z(\overset{\bullet}{G}f')\;.$$

Da kommutative Vierecke sich zu kommutativen Vierecken zusammensetzen, ist $\hat{G}$ ein Funktor.

Nach Konstruktion ist $\hat{G} \circ E = G$; cf. Bemerkung 124.(1).

Wir wollen zeigen, daß $\hat{G}$ exakt ist. Dazu haben wir zu zeigen, daß $\hat{G}$ kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen abbildet; cf. Aufgabe 62.

Nach Satz 233.(3) dürfen wir annehmen, daß die abzubildende kurz exakte Sequenz repräsentiert ist von

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "y"] \\
X \arrow[r, "f''"] & Y''
\end{tikzcd}$$

ist, mit einem beliebig wählbaren schwachen Cokern y von $f' = xf$. Wir wählen y so, daß (Gf', Gy) exakt in der Mitte ist; dies ist möglich wegen G provisorisch exakt; cf. Definition 240. Wir bilden mit G ab und tragen Bildobjekte und gemäß Bemerkung 124.(2) induzierte Morphismen a, b und c ein.

$$\begin{tikzcd}
GX' \arrow[r] \arrow[d, "Gx"'] & \mathrm{I}_{Gf'} \arrow[r, "\overset{\bullet}{G}f'"] \arrow[d, "a"'] & GY \arrow[d, equal] \\
GX \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \mathrm{I}_{Gf} \arrow[r, "\overset{\bullet}{G}f"] \arrow[dd, "b"'] & GY \arrow[d, "\overline{Gy}"] \\
 & & \mathrm{I}_{Gy} \arrow[d, "\overset{\bullet}{G}y"] \\
GX \arrow[r] & \mathrm{I}_{Gf''} \arrow[r] \arrow[ur, "c"] & GY''
\end{tikzcd}$$

Darin ist $(\dot{G}f', \overline{Gy})$ kurz exakt. Wir haben zu zeigen, daß das Bild (a, b) unserer kurz exakten Sequenz unter $\hat{G}$ wieder kurz exakt ist.

Das Umfangssequenzlemma, Lemma 132, angewandt auf $a(\dot{G}f) = \dot{G}f'$, gibt ein Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{C}_a \arrow[ddr, "u"] & \\
& \mathrm{I}_{Gf} \arrow[ur, "\rho_a"] \arrow[dr, "\dot{G}f"] & & \\
\mathrm{I}_{Gf'} \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "\dot{G}f'"'] & & GY \arrow[r, "\overline{Gy}"'] & \mathrm{I}_{Gy}
\end{tikzcd}$$

Da $\rho_a u = (\dot{G}f)(\overline{Gy}) = bc$, liefert Bemerkung 124.(3) nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{I}_{Gf''} \arrow[dd, "\wr"'] \arrow[dr, "c"] & \\
\mathrm{I}_{Gf} \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "\rho_a"'] & & \mathrm{I}_{Gy} \, . \\
& \mathrm{C}_a \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

Also ist auch b ein Cokern von a. ▫

Korollar 243 *Sei $\mathcal{K} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.*

Es ist G exakt genau dann, wenn G provisorisch exakt ist.

Beweis. Sei G provisorisch exakt. Zu zeigen ist, daß G exakt ist.

Es gibt einen exakten Funktor $\hat{\mathcal{K}} \xrightarrow{\hat{G}} \mathcal{B}$ mit $\hat{G} \circ E = G$; cf. Lemma 242. Da E und $\hat{G}$ exakt sind, gilt dies auch für $G = \hat{G} \circ E$; cf. Bemerkung 238, Definition 239. ▫

Beispiel 244 Es ist $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ schwach abelsch; cf. Beispiel 230.(1).

Sei $k \in \mathbf{Z}$. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{H}^k : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ exakt ist. Es genügt zu zeigen, daß H^k provisorisch exakt ist; cf. Korollar 243.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben einen Morphismus $Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ so anzugeben, daß g in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ein schwacher Cokern von f ist und daß die Sequenz $(\mathrm{H}^k f, \mathrm{H}^k g)$ exakt in der Mitte ist; cf. Definition 240.

Sei $X \xrightarrow{c_X} C_X$ der punktweise split Monomorphismus in den split azyklischen Komplex C_X aus der Lösung zu Aufgabe 65.(1). Da $X \xrightarrow{f} Y$ und $X \xrightarrow{(f\ c_X)} Y \oplus C_X$ in $[\![\Delta_1, \mathrm{K}(\mathcal{A})]\!]$ isomorph sind, weil C_X in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ isomorph zu 0 ist, und da letzterer Morphismus punktweise split monomorph ist, dürfen wir annehmen, daß $X \xrightarrow{f} Y$ selbst punktweise split monomorph ist.

Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ punktweise split kurz exakt in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. In Beispiel 230 wurde gezeigt, daß g ein schwacher Cokern von f ist; cf. Bemerkung 238. Ferner ist die Sequenz $(\mathrm{H}^k f, \mathrm{H}^k g)$ exakt in der Mitte; cf. die lang exakte Homologiesequenz aus Lemma 145.

Anhang A

Aufgaben und Lösungen

A.1 Aufgaben

Aufgabe 1 (§1.1.1) Sei R ein Ring. Seien $r,\ s\ \in\ R$.

Zeige, daß $(-r) \cdot s = -(r \cdot s) = r \cdot (-s)$.

Aufgabe 2 (§1.1.1) Sei R ein Ring. Sei $n \geqslant 1$. Zeige.

(1) Es bildet die Menge $R^{n\times n}$ der $n\times n$-Matrizen mit Einträgen in R, der Matrixaddition $(+)$ und der Matrixmultiplikation $(\cdot)$ einen Ring.

(2) Es ist $R^{n\times n}$ nicht kommutativ, falls $n \geqslant 2$ und $0 \neq 1$ in R.

Aufgabe 3 (§1.1.2) Sei R ein Ring. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal.

Für $r \in R$ schreiben wir $r + I = \{r + x\ :\ x \in I\}$. Zeige.

(1) Es ist $r + I = r' + I$ genau dann, wenn $r - r' \in I$, wobei $r,\ r'\ \in\ R$.

(2) Es wird $R/I := \{r + I\ :\ r \in R\}$ mittels $(r + I) + (r' + I) := (r + r') + I$ und $(r + I) \cdot (r' + I) := (r \cdot r') + I$ ein Ring. (Hinweis: Wohldefiniertheit!)

Aufgabe 4 (§1.1.2)

(1) Zeige, daß jedes Ideal in $\mathbf{Z}$ von der Form $n\mathbf{Z}$ ist für ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(2) Zeige, daß $\mathbf{Z}/n$ für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ genau dann ein Körper ist, wenn n prim ist.

(3) Ein Element r in einem kommutativen Ring heiße *invertierbar,* falls es ein s in diesem Ring gibt mit $rs = 1$.

Finde verschiedene Werte für $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ so, daß $\mathbf{Z}/n$ genau 8 invertierbare Elemente enthält.

Aufgabe 5 (§1.1.1, §1.1.2) Zeige oder widerlege.

(1) Ist R ein Ring, so folgt für $x \in R$ aus $x^2 = 1$, daß $x \in \{-1, +1\}$.

(2) Sei $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$. Sei $x \in \mathbf{Z}/n$ invertierbar. Es ist die *Ordnung* $\min\{i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1} \ : \ x^i = 1\}$ von x ein Teiler von $n(n-1)$.

Aufgabe 6 (§1.1.3) Sei R ein Ring. Seien $I,\ J \subseteq R$ Ideale in R.

Gebe es ein $x \in I$ und ein $y \in J$ mit $1 = x + y$.

Zeige, daß wir einen Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcll} R/(I \cap J) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & R/I & \times \ R/J \\ r + (I \cap J) & \longmapsto & (r + I & , \ \ r + J) \end{array}$$

haben. Gib die Umkehrabbildung an, unter Verwendung von x und y.

Aufgabe 7 (§1.2.2) Sei R ein Ring. Sei M ein R-Linksmodul. Sei $N \subseteq M$ ein Teilmodul.

Zeige, daß M/N via $(m + N) + (m' + N) := (m + m') + N$ für $m,\ m' \in M$ und via $r \cdot (m + N) := (r \cdot m) + N$ für $r \in R$ und $m \in M$ ein R-Linksmodul wird.

Aufgabe 8 (§1.1.3, §1.2.3)

(1) Sei $R \xrightarrow[\sim]{f} S$ ein Ringisomorphismus, i.e. ein bijektiver Ringmorphismus. Zeige, daß auch $R \xleftarrow{f^{-1}} S$ ein Ringisomorphismus ist.

(2) Sei R ein Ring. Sei $M \xrightarrow[\sim]{g} N$ ein Isomorphismus von R-Linksmoduln, i.e. eine bijektive R-lineare Abbildung. Zeige, daß auch $M \xleftarrow{g^{-1}} N$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 9 (§1.1.3) Sei $R = (R, +, \cdot)$ ein Ring. Sei R° als Menge gleich R, ausgestattet mit derselben Addition wie R, aber mit der Multiplikation $r * r' := r' \cdot r$, wobei $r,\ r' \in R$. Offenbar ist R° wieder ein Ring, der zu R *entgegengesetzte.*

Zeige oder widerlege.

(1) Seien R und S Ringe. Ist f ein Ringmorphismus von R nach S, so ist f auch ein Ringmorphismus von R° nach S°.

(2) Es ist $\mathbf{Q}^{2\times 2}$ isomorph zu $(\mathbf{Q}^{2\times 2})^\circ$.

(3) Stets ist R isomorph zu R°.

Aufgabe 10 (Elementarteilersatz) Seien $m,\ n \geqslant 0$. Sei $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$.

Zeige, daß es $S \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ (ganzzahlig) invertierbar und $T \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ (ganzzahlig) invertierbar so gibt, daß SAT eine Diagonalmatrix ist. (Hinweis: Reduziere auf $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & A' \end{smallmatrix}\right)$.)

Aufgabe 11 (§1.2.3) Seien $m,\, n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$.

(1) Zeige, daß jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}/m$ nach $\mathbf{Z}/n$ von der Form $\mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/n$ ist für ein $a \in \mathbf{Z}$ mit $am \equiv_n 0$.

(2) Wieviele $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen gibt es von $\mathbf{Z}/m$ nach $\mathbf{Z}/n$?

Aufgabe 12 (§1.2.3)

(1) Man bestimme alle $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen von $\mathbf{Z}/9$ nach $\mathbf{Z}/27$.

(2) Zu jeder Abbildung aus (1) bestimme man Kern, Bild und Cokern.

Aufgabe 13 (§1.2.3) Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$.

(1) Sei $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ die Inklusionsabbildung.
Gibt es eine R-lineare Abbildung $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \xleftarrow{f} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$ mit $\iota f = \mathrm{id}$?

(2) Sei $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\rho} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Restklassenabbildung.
Gibt es eine R-lineare Abbildung $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) \xleftarrow{g} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $g\rho = \mathrm{id}$?

Aufgabe 14 (§1.2.4) Sei $M := \mathbf{Z}/3 \oplus \mathbf{Z}/9$. Sei $X := \mathbf{Z}/3$. Sei $N := \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27$.

(1) Man beschreibe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, N)$ und bestimme damit $|\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, N)|$.

(2) Sei

$$H_X \;:=\; \{\, f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, N) \;:\; \text{es gibt } u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, X) \text{ und } v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X, N) \text{ mit } f = u \cdot v \,\}$$

Man bestimme $|H_X|$. Ist H_X eine Untergruppe von $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, N)$?

Aufgabe 15 (§1.2.3) Ein $\mathbf{Z}$-Modul M heiße *endlich erzeugt,* wenn es eine endliche Teilmenge $X \subseteq M$ mit $M = {}_{\mathbf{Z}}\langle X \rangle$ gibt.

(1) Sei $M \xrightarrow{p} M''$ eine surjektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung zwischen $\mathbf{Z}$-Moduln. Seien M'' und $\mathrm{Kern}\, p$ endlich erzeugt. Zeige, daß M endlich erzeugt ist.

(2) Sei $\ell \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$. Sei $M \subseteq \mathbf{Z}^{\oplus \ell}$ ein Teilmodul. Zeige, daß M endlich erzeugt ist.
(Hinweis: Sei M'' das Bild von M unter einer Projektion $\mathbf{Z}^{\oplus \ell} \longrightarrow \mathbf{Z}^{\oplus(\ell-1)}$. Der Kern von $M \longrightarrow M''$ bettet nach $\mathbf{Z}$ ein.)

Aufgabe 16 (§1.2.6) Sei R ein Ring. Sei ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

von R-Linksmoduln und R-linearen Abbildungen gegeben. Zeige.

(1) Es gibt genau eine R-lineare Abbildung $\operatorname{Cokern} f \xrightarrow{c} \operatorname{Cokern} f'$ mit $\eta\rho = \rho c$.

(2) Aus ξ und η surjektiv und $\operatorname{Kern}\eta \subseteq \operatorname{Im} f$ folgt, daß c ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 17 (§1.2.4) Sei R ein Ring. Seien $0 \leqslant \ell \leqslant k$. Seien M_i für $i \in [1,k]$ und N_j für $j \in [1,\ell]$ alles R-Linksmoduln. Sei

$$\delta \;=\; (\delta_{i,j})_{i,j} \;:\; \bigoplus_{i\in[1,k]} M_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in[1,\ell]} N_j$$

eine R-lineare Abbildung mit $\delta_{i,j} = 0$ falls $i \neq j$. Zeige, daß

$$\operatorname{Cokern}\delta \;\simeq\; \bigoplus_{i\in[1,\ell]} \operatorname{Cokern}\delta_{i,i}\;.$$

Aufgabe 18 (§1.2.4) Zeige.

(1) Jeder endlich erzeugte $\mathbf{Z}$-Modul ist isomorph zu einem von der Form $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/e_i$ für ein gewisses $\ell \geqslant 0$ und gewisse $e_i \in \mathbf{Z}$ für $i \in [1,\ell]$, i.e. direkte Summe zyklischer abelscher Gruppen. (Hinweis: Surjektion von $\mathbf{Z}^{\oplus\ell}$, deren Kern, darauf Surjektion von $\mathbf{Z}^{\oplus k}$. Nun Aufgabe 10.)

(2) Jeder endliche $\mathbf{Z}$-Modul ist von der Form $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/e_i$ für ein gewisses $\ell \geqslant 0$ und gewisse $e_i \in \mathbf{Z}_{\geqslant 2}$ für $i \in [1,\ell]$.

Aufgabe 19 (§1.2.9)

(1) Seien $k,\,\ell \geqslant 0$. Seien $m_i \geqslant 2$ für $i \in [1,k]$. Seien $n_j \geqslant 2$ für $j \in [1,\ell]$. Sei $F = (f_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Z}^{k\times\ell}$ so, daß $m_i f_{i,j} \equiv_{n_j} 0$ für $i \in [1,k]$ und $j \in [1,\ell]$. Schreibe $N := \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_\ell \end{pmatrix}$. Weise folgendes kommutative Diagramm von $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen nach.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in[1,k]} \mathbf{Z}/m_i \arrow[r, "F"] & \bigoplus_{j\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/n_j \arrow[r, "\rho"] & \operatorname{Cokern} F \\
\mathbf{Z}^{\oplus(k+\ell)} \arrow[u, "\binom{\mathrm{E}_k}{0}"] \arrow[r, "\binom{F}{N}"'] & \mathbf{Z}^{\oplus\ell} \arrow[u, "\mathrm{E}_\ell"'] \arrow[r, "\rho"'] & \operatorname{Cokern}\binom{F}{N} \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

(2) Wieviele $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen gibt es von $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16$ nach $\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$?

(3) Sei $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8)$. Bestimme eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $Y \xrightarrow{g} Z$ so, daß $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ rechtsexakt und Z direkte Summe zyklischer abelscher Gruppen ist.

(4) Wie (3), nur für $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/16)$.

(5) Wie (3), nur für $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}2&2&4\\2&2&2\\2&2&4\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8)$.

(6) Wie (3), nur für $(X \xrightarrow{f} Y) := (\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8)$.

(Hinweis: Maple, ismith.)

Aufgabe 20 (§1.2.5) Sei R ein Ring. Sei I eine Menge. Sei für jedes $i \in I$ ein R-Linksmodul M_i gegeben. Seien M ein R-Linksmodul und $(M_i \xrightarrow{\mu_i} M)_{i\in I}$ ein Tupel von R-linearen Abbildungen derart, daß für jeden R-Linksmodul X und jedes Tupel $(M_i \xrightarrow{x_i} X)$ genau eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{x} X$ mit $\mu_i x = x_i$ für $i \in I$ existiert.

Kurz, es "habe M zusammen mit den μ_i die universelle Eigenschaft des Coprodukts".

Zeige, daß es einen Isomorphismus $M \xrightarrow{f} \coprod_{i\in I} M_i$ gibt mit $\mu_i f = \iota_i$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 21 (§1.2.5) Sei R ein Ring. Seien α und β Ringisomorphismen von R nach R. Sei der R-R-Bimodul ${}_\alpha R_\beta$ via $s \cdot r * t := (s\alpha)r(t\beta)$ für $r \in R$ und $s,\, t \in R$ erklärt.

Wann sind die R-R-Bimoduln ${}_\alpha R_\beta$ und ${}_{\mathrm{id}}R_{\mathrm{id}}$ isomorph?

Aufgabe 22 (§1.2.10.1, §1.2.10.2) Sei R ein Ring. Seien α, β, γ, δ Ringisomorphismen von R nach R. Wir bilden den R-R-Bimodul ${}_\alpha R_\beta$ wie in Aufgabe 21.

(1) Finde Ringisomorphismen ε und ϑ von R nach R so, daß
$$\mathrm{Hom}_R({}_\alpha R_\beta\,,\ {}_\gamma R_\delta) \;\simeq\; {}_\varepsilon R_\vartheta$$
ist als R-R-Bimoduln.

(2) Finde Ringisomorphismen ε und ϑ von R nach R so, daß
$${}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta \;\simeq\; {}_\varepsilon R_\vartheta$$
ist als R-R-Bimoduln.

Aufgabe 23 (§1.2.10.1, §1.2.10.2) Seien R, S und T Ringe.

(1) Seien ${}_R M_S$ und ${}_R N_T$ gegeben. Zeige, daß es auf $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ eine S-T-Bimodulstruktur gibt, für welche $m(s \cdot f * t) = ((m * s)f) * t$ ist für $m \in M$, $s \in S$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ und $t \in T$.

(2) Seien ${}_S M_R$ und ${}_R N_T$ gegeben. Zeige, daß es auf $M \underset{R}{\otimes} N$ eine S-T-Bimodulstruktur gibt, für welche $s \cdot (m \otimes n) * t = (sm) \otimes (nt)$ ist für $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$ und $t \in T$.

Aufgabe 24 (§1.2.10.2) Seien R, S, T, und U Ringe. Seien ${}_R X_S$, ${}_S Y_T$, ${}_T Z_U$ gegeben.

Zeige, daß folgender Isomorphismus von R-U-Bimoduln existiert.
$$\begin{array}{ccc} X \underset{S}{\otimes} (Y \underset{T}{\otimes} Z) & \xrightarrow{\sim} & (X \underset{S}{\otimes} Y) \underset{T}{\otimes} Z \\ x \otimes (y \otimes z) & \longmapsto & (x \otimes y) \otimes z \end{array}$$

Aufgabe 25 (§1.2.10.2) Zeige oder widerlege.

Sei K ein Körper. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über K, aufgefaßt als K-K-Bimoduln via $\lambda \cdot v * \mu := \mu\lambda v$ für $\lambda,\ \mu \in K$ und $v \in V$, analog für W.

(1) Es ist $V \times W \xrightarrow{\tau} V \underset{K}{\otimes} W,\ (v, w) \longmapsto v \otimes w$ surjektiv.

(2) Es ist $\dim_K(V \underset{K}{\otimes} W) = (\dim_K V)(\dim_K W)$.

Eine Variante von Aufgabe 25.(1) ist die folgende Aufgabe 26.(1).

Aufgabe 26 (§1.2.10.2)

(1) Wir betrachten den $\mathbf{Q}^{2\times 2}$-$\mathbf{Q}$-Bimodul $\mathbf{Q}^{2\times 1}$. Wir betrachten den $\mathbf{Q}$-$\mathbf{Q}^{3\times 3}$-Bimodul $\mathbf{Q}^{1\times 3}$. Wir betrachten den $\mathbf{Q}^{2\times 2}$-$\mathbf{Q}^{3\times 3}$-Bimodul $\mathbf{Q}^{2\times 3}$.

Man finde einen Isomorphismus von $\mathbf{Q}^{2\times 2}$-$\mathbf{Q}^{3\times 3}$-Bimoduln

$$\mathbf{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{Q}^{1\times 3} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}^{2\times 3}\ .$$

Man finde ein Element in $\mathbf{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{Q}^{1\times 3}$, das kein Elementartensor ist.

(2) Seien $m,\ n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$.

Man zeige: Jedes Element von $\mathbf{Z}/m \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}/n$ ist ein Elementartensor.

Aufgabe 27 (§1.2.10.1, §1.2.10.2) Sei I eine Menge. Seien R, S und T Ringe. Für jedes $i \in I$ sei ein R-S-Bimodul M_i gegeben. Seien ferner ${}_R X_T$ und ${}_T Y_R$ gegeben.

Zeige folgende Isomorphismen.

(1) $\operatorname{Hom}_R(X, \prod_i M_i) \xrightarrow{\sim} \prod_i \operatorname{Hom}_R(X, M_i),\ f \longmapsto (f\pi_i)_i$, von T-S-Bimoduln.

(2) $\operatorname{Hom}_R(\coprod_i M_i\,, X) \xrightarrow{\sim} \prod_i \operatorname{Hom}_R(M_i\,, X),\ f \longmapsto (\iota_i f)_i$, von S-T-Bimoduln.

(3) $Y \underset{R}{\otimes} (\coprod_i M_i) \xrightarrow{\sim} \coprod_i (Y \underset{R}{\otimes} M_i),\ y \otimes (m_i)_i \longmapsto (y \otimes m_i)_i$, von T-S-Bimoduln.

Aufgabe 28 (§1.2.8.2, §1.2.10.2) Sei R ein kommutativer Ring. Eine R-Algebra ist ein Ring A, zusammen mit einem Ringmorphismus $R \xrightarrow{\varphi} A$ so, daß $ra := (r\varphi)a = a(r\varphi) =: ar$ für alle $a \in A$ und $r \in R$. Es ist e.g. jeder Ring auf eindeutige Weise eine $\mathbf{Z}$-Algebra; cf. Beispiel 15.(2). Eine R-Algebra ist via φ auch ein R-R-Bimodul.

(1) Seien A und B zwei R-Algebren. Definiere auf $A \underset{R}{\otimes} B$ eine R-Algebrenstruktur.

(2) Seien S und T Ringe. Sei M eine abelsche Gruppe. Zeige, daß einer S-T-Bimodulstruktur auf M eine $S \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} T^{\circ}$-Linksmodulstruktur auf M entspricht, und umgekehrt. Kurz, ein S-T-Bimodul *ist* ein $S \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} T^{\circ}$-Linksmodul.

Aufgabe 29 (§1.2.10.3) Seien ${}_RM_S \xleftarrow{f} {}_RM'_S$ und ${}_RN \xrightarrow{g} {}_RN'$ und ${}_SX \xleftarrow{h} {}_SX'$ gegeben wie in Lemma 62. Zeige, daß folgendes Viereck kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
{}_R(\,{}_RM_S \underset{S}{\otimes} {}_SX,\ {}_RN) \arrow[r, "\alpha_{X,M,N}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_R(f \underset{S}{\otimes} h,\, g)"'] & {}_S(\,{}_SX,\ {}_R(\,{}_RM_S\,,\ {}_RN)) \arrow[d, "{}_S(h,\, {}_R(f,g))"] \\
{}_R(\,{}_RM'_S \underset{S}{\otimes} {}_SX',\ {}_RN') \arrow[r, "\alpha_{X',M',N'}", "\sim"'] & {}_S(\,{}_SX',\ {}_R(\,{}_RM'_S\,,\ {}_RN'))
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 30 (§1.2.10.3, §1.2.10.2)

(1) Sei $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ eine Sequenz von R-Linksmoduln, für welche

$$_R(X',Z) \xleftarrow{_R(f,Z)} {}_R(X,Z) \xleftarrow{_R(g,Z)} {}_R(X'',Z)$$

eine linksexakte Sequenz von $\mathbf{Z}$-Moduln ist für jeden R-Linksmodul Z. Zeige, daß die Sequenz $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X''$ rechtsexakt ist.

(2) Gegeben sei, ähnlich wie in Lemma 60.(1), eine kurz exakte Sequenz $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M''$ von R-S-Bimoduln und ein S-Linksmodul N.

Zeige unter Verwendung von (1), daß die Sequenz

$$M' \underset{S}{\otimes} N \xrightarrow{i \otimes N} M \underset{S}{\otimes} N \xrightarrow{p \otimes N} M'' \underset{S}{\otimes} N$$

von R-Linksmoduln rechtsexakt ist. (Hinweis: Lemma 62.)

Aufgabe 31 (§1.2.11.1) Sei R ein Ring. Zeige.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein projektiver R-Linksmodul P_α gegeben. Dann ist $\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha$ projektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ projektiv ist, dann sind auch X und Y projektiv.

(3) Ein R-Linksmodul X ist genau dann projektiv, wenn es eine Menge B und einen R-Linksmodul Y so gibt, daß $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta \in B} R$. Insbesondere ist also $R^{\oplus n}$ projektiv für $n \geqslant 0$.

(4) Für jeden R-Linksmodul M gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $P \longrightarrow M$ von einem projektiven R-Linksmodul P.

(5) Sei P ein projektiver R-Linksmodul. Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ eine kurz exakte Sequenz von R-Rechtsmoduln. Zeige, daß die Sequenz $X' \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{i \otimes P} X \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{p \otimes P} X'' \underset{R}{\otimes} P$ von $\mathbf{Z}$-Moduln kurz exakt ist.

Aufgabe 32 (§1.2.11.2) Sei R ein Ring. Zeige.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein injektiver R-Linksmodul I_α gegeben. Dann ist $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ injektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ injektiv ist, dann sind auch X und Y injektiv.

Aufgabe 33 (§1.2.11.1)

Welche der folgenden $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$-Linksmoduln sind projektiv? Welche injektiv?

$$\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) \;,\; \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \;,\; \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Aufgabe 34 (§1.2.11.2) Aus dem Beweis von Satz 68 wissen wir: Ist ${}_{\mathbf{Z}}J$ ein injektiver $\mathbf{Z}$-Modul und R ein Ring, dann ist ${}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}R_R, {}_{\mathbf{Z}}J)$ ein injektiver R-Linksmodul.

Man verwende dies, um zu zeigen: Sei $n \geqslant 1$. Es ist $\mathbf{Z}/n$ ein injektiver $\mathbf{Z}/n$-Modul.

Aufgabe 35 (§2.1.3) Zeige oder widerlege.

(1) In (Sets) ist ein Morphismus genau dann monomorph, wenn er injektiv ist.

(2) In (Rings) ist ein Morphismus genau dann epimorph, wenn er surjektiv ist.

(3) In (Sets) ist jeder Epimorphismus eine Retraktion.

(4) Sei R ein Ring. In R-Mod ist jeder Monomorphismus eine Coretraktion.

Aufgabe 36 (§2.1.3, §2.1.4, §2.2) Zeige oder widerlege.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ein Funktor.

(1) Ist fg ein Monomorphismus, so auch f.

(2) Ist fg eine Coretraktion, so auch f.

(3) Ist f eine Retraktion, so ist f epimorph.

(4) Ist f monomorph und epimorph, so ist f ein Isomorphismus.

(5) Ist f eine Coretraktion und epimorph, so ist f ein Isomorphismus.

(6) Ist f epimorph, so ist f eine Retraktion.

(7) Sind fg und gh Isomorphismen, so auch f, g und h.

(8) Ist f ein Endomorphismus und eine Retraktion, so ist f ein Automorphismus.

(9) Ist X initial, so ist $X \xrightarrow{f} Y$ monomorph.

(10) Ist f ein Monomorphismus, so auch Ff.

(11) Ist f eine Coretraktion, so auch Ff.

Aufgabe 37 (§2.1.2)
Dualisiere die Aussagen aus Aufgabe 36 (egal ob zutreffend oder nicht).

Aufgabe 38 (§2.2) Sei R ein Ring. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie, deren Objekte die Morphismen in R-Mod sind, und in der ein Morphismus von $(X \xrightarrow{f} Y)$ nach $(X' \xrightarrow{f'} Y')$ gegeben ist durch ein Paar $((X \xrightarrow{\xi} X'), (Y \xrightarrow{\eta} Y'))$ von Morphismen in R-Mod so, daß das Viereck

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Komposition und Bilden von Identitäten erfolge eintragsweise.

Zeige, daß die Abbildungen, die einem Objekt $(X \xrightarrow{f} Y)$ von $\mathcal{C}$ das Objekt $C(X \xrightarrow{f} Y) :=$ Cokern f von R-Mod und einem Morphismus (ξ, η) von $\mathcal{C}$ den Morphismus $C(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{C(\xi,\eta)} C(X' \xrightarrow{f'} Y')$ von R-Mod mit $\rho C(\xi, \eta) = \eta\rho$ zuweisen, einen Funktor $\mathcal{C} \longrightarrow R$-Mod definieren. (Hinweis: Aufgabe 16.)

Aufgabe 39 (§2.3) Sei R ein Ring. Sei Δ_1 die teilgeordnete Menge $\{0, 1\}$. Sei $\mathcal{C}$ die in Aufgabe 38 definierte Kategorie, deren Objekte Morphismen in R-Mod sind. Sei $C : \mathcal{C} \longrightarrow R$-Mod der in loc. cit. konstruierte Funktor, der einem Objekt in $\mathcal{C}$ seinen in R-Mod gebildeten Cokern zuordnet.

(1) Begründe, daß die Kategorie $\mathcal{C}$ aus Aufgabe 38 mit $[\![\Delta_1^{\mathrm{k}}, R\text{-Mod}]\!]$ identifiziert werden kann.

(2) Sei $F : \mathcal{C} \longrightarrow R$-Mod, $(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto Y$, auf den Morphismen entsprechend. Zeige, daß sich die Restklassenabbildungen zu einer Transformation $F \longrightarrow C$ zusammenfügen.

Aufgabe 40 (§2.3) Wir betrachten die Funktoren

$$\begin{array}{rcrcrcl} F & := & \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} - : & \mathbf{Z}/4\text{-Mod} & \to & \mathbf{Z}/2\text{-Mod} \\ G & := & {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, -) : & \mathbf{Z}/4\text{-Mod} & \to & \mathbf{Z}/2\text{-Mod} \end{array}$$

(1) Man konstruiere eine Transformation von F nach G ungleich $(0)_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Z}/4\text{-Mod})}$.

(2) Man zeige: F und G sind nicht isomorph in $[\![\mathbf{Z}/4\text{-Mod}, \mathbf{Z}/2\text{-Mod}]\!]$.

Aufgabe 41 (§2.3) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Schreibe $\hat{\mathcal{C}} := [\![\mathcal{C}^\circ, (\mathrm{Sets})]\!]$.
Sei $F \in \mathrm{Ob}\,\hat{\mathcal{C}}$. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

(1) Gib eine Bijektion zwischen ${}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X), F\big)$ und FX an.

(2) Zeige, daß $\mathcal{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{C}}$, $X \longmapsto {}_{\mathcal{C}}(-,X)$, mit der naheliegenden Definition auf den Morphismen, ein voller und treuer Funktor ist.

Aufgabe 42 (§2.4, §2.2)

(1) Sei M eine Menge. Sei $(\leqslant)$ eine Relation auf M, die reflexiv und transitiv ist. Es ist $M = (M, \leqslant)$ eine *präteilgeordnete Menge.*

Zeige, daß es eine Kategorie M^{k} gibt mit $\mathrm{Ob}\,M^{\mathrm{k}} = M$ und $|{}_{M^{\mathrm{k}}}(a,b)| = 1$, falls $a \leqslant b$, und $|{}_{M^{\mathrm{k}}}(a,b)| = 0$ sonst, wobei $a,\ b \in M$.

(2) Sei $\mathcal{M}$ eine Kategorie, in welcher $|{}_{\mathcal{M}}(a,b)| \in \{0,1\}$ für alle $a,\ b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$.

Zeige, daß $\mathcal{M}$ derart eine präteilgeordnete Menge $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$ zugeordnet werden kann, daß $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^{\mathrm{tk}}$.

Zeige, daß $M = M^{\mathrm{kt}}$ für eine teilgeordnete Menge M.

(3) Seien $M = (M, \leqslant)$ und $N = (N, \leqslant)$ präteilgeordnete Mengen.

Gib eine Bijektion von der Menge der monotonen Abbildungen von M nach N in die Menge der Funktoren von M^{k} nach N^{k} an.

Aufgabe 43 (§2.4) Man zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien.

(1) Es ist $\mathrm{Ob}(F) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ injektiv.

(2) Es ist $\mathrm{Mor}(F) : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ surjektiv.

(3) Sei $X \xrightarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$. Es ist u ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn Fu ein Monomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

Aufgabe 44 (§3.1) Zeige, daß die Kategorie (Rel) der Mengen mit Relationen als Morphismen ein Nullobjekt hat, sowie zwar (Add 1), nicht aber (Add 2) erfüllt.

Aufgabe 45 (§3.1) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

(1) Sei $m \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Zeige, daß $(X_1, \ldots, X_m)$ eine direkte Summe besitzt. (Hinweis: Induktion.)

(2) Seien $\ell, m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,\ell]$, $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,m]$ und $Z_k \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $k \in [1,n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,m]} Y_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,n]} Z_k$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Zeige, daß $(f_{i,j})_{i,j}\,(g_{j,k})_{j,k} = \big(\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j}g_{j,k}\big)_{i,k}$.

(3) Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_1, \ldots, f_{k+\ell} : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(\sum_{i\in[1,k]} f_i) + (\sum_{i\in[1,\ell]} f_{i+k}) = \sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i$.

(4) Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_i : X \longrightarrow Y$ für $i \in [1,k]$ und $g_j : Y \longrightarrow Z$ für $j \in [1,\ell]$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(\sum_{i\in[1,k]} f_i)(\sum_{j\in[1,\ell]} g_j) = \sum_{i\in[1,k]}\sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j$.

(5) Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Zeige, daß $\big({}_{\mathcal{A}}(X,Y), +\big)$ eine abelsche Gruppe ist, mit neutralem Element $0 = 0_{X,Y}$.

(6) Seien $m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $i \in [1,m]$ und $Y_j \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ für $j \in [1,n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \overset{(f_{i,j})_{i,j}}{\underset{(f'_{i,j})_{i,j}}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Zeige, daß $(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} = (f_{i,j} + f'_{i,j})_{i,j}$.

(7) Seien $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Gib einen Isomorphismus von $(X \oplus Y) \oplus Z$ nach $X \oplus Y \oplus Z$ in Matrixform an.

Aufgabe 46 (§3.1) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)} X' \oplus Y'$ aus $\mathcal{A}$.

(1) Sei $b = 0$. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

(2) Es ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

(3) Falls $X = X'$ und jede Retraktion von X nach X ein Automorphismus ist, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn a und d Isomorphismen sind.

Aufgabe 47 (§3.1, §1.2.8.2) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Zeige, daß jeweils in einem geeigneten Sinn $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)$ ein Ring und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ein $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)$-$\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(Y)$-Bimodul ist.

Aufgabe 48 (§3.2) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien.

Sei $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor mit $F0 \simeq 0$. Zeige die Äquivalenz der Aussagen $(1,2,3)$.

(1) Es ist F additiv.

(2) Für $X_1, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ erfüllt $F(X_1 \oplus X_2)$ zusammen mit den Morphismen $F(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{F\pi_1} X_1$ und $F(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{F\pi_2} X_2$ das Axiom (Sum 1).

(3) Für $X_1, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ erfüllt $F(X_1 \oplus X_2)$ zusammen mit den Morphismen $FX_1 \xrightarrow{F\iota_1} F(X_1 \oplus X_2)$ und $FX_2 \xrightarrow{F\iota_2} F(X_1 \oplus X_2)$ das Axiom (Sum 2).

Aufgabe 49 (§3.2) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren. Sei $F \xrightarrow{\alpha} G$ eine Transformation. Seien $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ so gegeben, daß $Z \simeq X \oplus Y$ ist in $\mathcal{A}$.

Zeige, daß αZ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn αX und αY Isomorphismen sind.

Aufgabe 50 (§3.3) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Sei $\mathcal{B}$ eine additive Kategorie. Zeige.

(1) Es ist $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein additiver Funktor.

(2) Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor so, daß $FX \simeq 0$ ist für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen additiven Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}$ mit $\bar{F} \circ R = F$.

(3) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren so, daß $FX \simeq 0$ und $GX \simeq 0$ für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{F} \xrightarrow{\bar{a}} \bar{G}$ so, daß $\bar{a}RX = aX$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Aufgabe 51 (§1.2.9, §2.4) Sei $k \geqslant 2$. Sei $\mathbf{Z}/k$-mod die volle Teilkategorie der endlichen $\mathbf{Z}/k$-Moduln in $\mathbf{Z}/k$-Mod $\subseteq \mathbf{Z}$-Mod; cf. §1.2.7 ([10]).

(1) Zeige, daß der Funktor $F := {}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\text{-Mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$ zu einer Äquivalenz $F_k : \mathbf{Z}/k\text{-mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}/k\text{-mod}$ einschränkt. Zeige hierzu, daß es eine Transformation $\mathrm{id} \xrightarrow{\tau} F^2$ gibt, für welche τX ein Isomorphismus ist, wann immer $X \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Z}/k\text{-mod})$.

(2) Sei $\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{s} \mathbf{Z}/m$ in $\mathbf{Z}/k$-mod, wobei $s \in \mathbf{Z}$. Ersetze $F(\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{s} \mathbf{Z}/m)$ isomorph durch einen Morphismus zwischen zyklischen abelschen Gruppen.

(3) Sei $\bigoplus_{i\in[1,p]} \mathbf{Z}/\ell_i \xrightarrow{(s_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,q]} \mathbf{Z}/m_j$ in $\mathbf{Z}/k$-mod, wobei $s_{i,j} \in \mathbf{Z}$. Ersetze sein Bild unter F isomorph durch einen Morphismus zwischen direkten Summen zyklischer abelscher Gruppen.

(4) Bestimme in Aufgabe 19.(3) eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $W \xrightarrow{h} X$ so, daß $W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$ linksexakt und W direkte Summe zyklischer abelscher Gruppen ist. (Bei der erforderlichen Cokern-Berechnung genügt die Angabe des Ergebnisses unter Verweis auf die Methode aus Aufgabe 19.)

(5) Wie (4), nur in Aufgabe 19.(5).

[10] Allgemeiner schreibt man R-mod für die Kategorie der endlich erzeugten Linksmoduln über einem Ring R; cf. Aufgabe 15.

Aufgabe 52 (§2.4, §4.2) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathbf{Z}$-free die volle additive Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod der $\mathbf{Z}$-Moduln der Form $\mathbf{Z}^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$.

(1) Es ist $\mathbf{Z}$-free $\simeq$ $\mathbf{Z}$-free°.

(2) In $\mathbf{Z}$-free hat jeder Morphismus einen Kern und einen Cokern.

(3) In $\mathbf{Z}$-free ist jeder Monomorphismus ein Kern.

(4) In $\mathbf{Z}$-free ist jeder Epimorphismus ein Cokern.

(5) Es ist $\mathbf{Z}$-free eine abelsche Kategorie.

Aufgabe 53 (§4.3) Wir betrachten die abelsche Kategorie $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/27$-Mod.

(1) Wir wissen: Die Sequenz $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{(1\,0)} \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathbf{Z}/27$ ist kurz exakt.

Man zeige: Die Sequenz $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{(1\,9)} \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{\binom{-9}{1}} \mathbf{Z}/27$ ist isomorph zur erstgenannten, in $\llbracket \{0,1,2\}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A} \rrbracket$.

Man folgere: Die zweitgenannte Sequenz ist kurz exakt.

(2) Man konstruiere das vom Wechsellemma und von seiner dualen Aussage gelieferte Diagramm für das Diagramm aus den beiden kurz exakten Sequenzen aus (1).

Aufgabe 54 (§4.3) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei darin $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben. Sei $K \xrightarrow{i} X$ ein Kern von f. Sei $Y \xrightarrow{r} C$ ein Cokern von f. Sei $X \xrightarrow{r'} C'$ ein Cokern von i. Sei $K' \xrightarrow{i'} Y$ ein Kern von r. Zeige.

(1) Falls f monomorph ist, dann ist f ein Kern von r.

(2) Falls f monomorph und epimorph ist, dann ist f ein Isomorphismus.

(3) Es gibt ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd} & & C' \arrow[dd, "\tilde{f}", "\wr"'] & & \\ K \arrow[r, "i"] & X \arrow[ur, "r'"] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[r, "r"] & C \\ & & K' \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd}$$

(Hinweis: Warum genügt es, $\mathrm{C}_{\tilde{f}} \simeq 0$ zu zeigen?)

Aufgabe 55 (§4.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie.

Für jeden Morphismus in $\mathcal{B}$ sei ein in $\mathcal{A}$ genommener Kern und ein in $\mathcal{A}$ genommener Cokern bereits in $\mathcal{B}$ enthalten.

Zeige, daß $\mathcal{B}$ abelsch ist.

Aufgabe 56 (§4.4) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Zeige, daß der Funktor ${}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Z}$-Mod linksexakt ist.

Aufgabe 57 (§3.1, §4.2) Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie. Zeige.

(1) Ist $\mathcal{A}$ additiv, so auch $[\![\mathcal{D}, \mathcal{A}]\!]$ und $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

(2) Ist $\mathcal{A}$ abelsch, so auch $[\![\mathcal{D}, \mathcal{A}]\!]$ und $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

Aufgabe 58 (§4.4) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, in der sich das folgende abspiele.

Zeige.

(1) Seien $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ und $Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$ Sequenzen. Sei (f', f, f'') ein Morphismus von Sequenzen von $Y' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{s} Y''$ nach $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$, i.e. sei $f'i = jf$ und $fr = sf''$. Sei (g', g, g'') ein Morphismus von Sequenzen in umgekehrter Richtung, i.e. sei $g'j = ig$ und $gs = rg''$. Sei $f'g' = 1$, $fg = 1$ und $f''g'' = 1$. Ist (i, r) kurz exakt, so auch (j, s).

(2) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz, und sei i eine Coretraktion. Dann ist diese kurz exakte Sequenz isomorph zu $X' \xrightarrow{(1\,0)} X' \oplus X'' \xrightarrow{\binom{0}{1}} X''$ vermöge eines Isomorphismus der Form $(1_{X'}, a, 1_{X''})$.

(3) Sei $V \xrightarrow{m} U$ eine Coretraktion in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ist U azyklisch, so auch V. Ist U split azyklisch, so auch V.

(4) Seien V, $V' \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Zeige, daß $V \oplus V'$ genau dann split azyklisch ist, wenn V und V' dies sind.

Aufgabe 59 (§4.5.2) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei darin folgendes kommutative Diagramm gegeben.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "y"] & Z \arrow[d, "z"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z'
\end{tikzcd}$$

(1) Sind (X, X', Y, Y') und (Y, Y', Z, Z') Pullbacks, dann auch (X, X', Z, Z').

(2) Ist (X, X', Z, Z') ein Pullback, dann auch (X, X', Y, Y').

(3) Sind (X, X', Z, Z') und (Y, Y', Z, Z') Pullbacks, dann auch (X, X', Y, Y').

(4) Sind (X, X', Z, Z') und (X, X', Y, Y') Pullbacks, dann auch (Y, Y', Z, Z').

(5) Ist (X, X', Z, Z') ein Pullback und (X, X', Y, Y') ein Pushout, dann ist (X, X', Y, Y') ein Quadrat und (Y, Y', Z, Z') ein Pullback.

(6) Ist (X, X', Y, Y') ein Pullback und f epimorph, dann auch f'.

(7) Ist x ein Isomorphismus und y monomorph, dann ist (X, X', Y, Y') ein Pullback.

Aufgabe 60 (§4.5.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei in $\mathcal{A}$ der Pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner" near end] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

gegeben. Man bilde den Pullback

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" near start] & Y \arrow[d, "y"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd} .$$

(1) Man zeige: (P, Y, X', Y') ist ein Quadrat.

(2) Man zeige: Der eindeutig existente Morphismus $X \xrightarrow{a} P$ mit $au = f$ und $av = x$ ist ein Epimorphismus.

(3) Man konstruiere ein Quadrat $(\mathrm{K}_f, X, \mathrm{K}_u, P)$.

Aufgabe 61 (§4.5.2) Wir arbeiten in $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/27$-Mod.

(1) Man ergänze das Diagramm $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xleftarrow{1} \mathbf{Z}/27$ zu einem Pullback. Man teste das Kern-Cokern-Kriterium in beiden Richtungen, horizontal und vertikal. Liegt ein Quadrat vor?

(2) Man ergänze das Diagramm $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xleftarrow{1} \mathbf{Z}/27$ zu einem Pullback. Welche seiner Morphismen sind Retraktionen? Man teste das Kern-Cokern-Kriterium in beiden Richtungen, horizontal und vertikal.

(3) Man gebe einen Pullback an, der kein Quadrat ist.

Aufgabe 62 (§4.4, §4.5.3) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein Funktor, der kurz exakte Sequenzen in kurz exakte Sequenzen abbildet.

Zeige, daß F exakt ist. (Hinweis: Additivität via split kurz exakter Sequenzen.)

Aufgabe 63 (§4.5.3) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Sei in $\mathcal{A}$ ein Morphismus kurz exakter Sequenzen folgender Form gegeben.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "0"'] & X \oplus Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & Y \arrow[d, "0"] \\ X' \arrow[r, "(1\,0)"] & X' \oplus Y' \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & Y' \end{tikzcd}$$

Man berechne hierfür die lang exakte Sequenz aus dem Schlangenlemma.

Zur folgenden Aufgabe 64.(2.i $\Leftrightarrow$ iii) vgl. auch Aufgabe 34.

Aufgabe 64 (§4.6) Sei $k \geqslant 2$ eine Primpotenz.

(1) Zeige, daß $\mathbf{Z}/k$-mod eine abelsche Kategorie ist.
(Hinweis: $\mathbf{Z}/k$-Mod ist als abelsch bekannt. Es ist $\mathbf{Z}/k\text{-mod} \simeq \mathbf{Z}/k\text{-mod}^\circ$.)

(2) Zeige, daß für $X \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}/k$-mod folgende Aussagen (i, ii, iii) äquivalent sind.

  (i) Es ist X injektiv.
  (ii) Es ist X projektiv.
  (iii) Es ist X isomorph zu $(\mathbf{Z}/k)^{\oplus n}$ für ein $n \geqslant 0$.

(3) Ist $\mathbf{Z}/k$ injektiv oder projektiv in $\mathbf{Z}$-Mod?

(4) Zeige, daß $\mathbf{Z}/k$-mod genügend Projektive und genügend Injektive hat.

Aufgabe 65 (§5.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Zeige.

(1) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Zeige, daß das Bild von f in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ genau dann verschwindet, wenn es ein Tupel $(X^i \xrightarrow{h^i} Y^{i-1})_{i\in\mathbf{Z}}$ von Morphismen in $\mathcal{A}$ so gibt, daß $h^i d + dh^{i+1} = f^i$ für alle $i \in \mathbf{Z}$. Diesenfalls heißt f auch *nullhomotop* und $(h^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ eine *Homotopie*.

(2) Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{C}(\mathcal{A})$. Zeige, daß X genau dann in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ isomorph zu 0 ist, wenn X split azyklisch ist.

Aufgabe 66 (§4.4) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(1) Zeige die Äquivalenz von (i) und (ii).

  (i) Es sind ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=)$ und ${}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$ isomorphe Funktoren von $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B}$ nach (Sets).

  (ii) Es gibt Transformationen $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ und $F \circ G \xrightarrow{\eta} \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ mit $(F\varepsilon X)(\eta F X) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ und $(\varepsilon G Y)(G\eta Y) = 1_{GY}$ für $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$.

Gelten (i, ii), so heißt F *linksadjungiert* zu G, und G *rechtsadjungiert* zu F, geschrieben $F \dashv G$.
Es heißt ε eine *Einheit* und η eine *Coeinheit* dieser Adjunktion.

(2) Sei $G \circ F \simeq 1$ und $F \circ G \simeq 1$. Zeige, daß $F \dashv G$.

(3) Seien G und $\tilde{G}$ rechtsadjungiert zu F. Zeige, daß $G \simeq \tilde{G}$.

(4) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additiv. Sei $F \dashv G$. Zeige, daß F additiv ist.

(5) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsch. Sei $F \dashv G$. Zeige, daß F rechtsexakt ist.

Cf. auch Lemma 62.

Aufgabe 67 (§4.2, Aufgabe 66)

Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Sei $F \dashv G$; cf. Aufgabe 66.

Wir erinnern an die Einheit $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ und die Coeinheit $F \circ G \xrightarrow{\eta} \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$; cf. Aufgabe 66.(1.ii).

Zeige.

(1) Ist F voll, so ist für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ die Einheit εX eine Retraktion, sowie $\varepsilon GFX = GF\varepsilon X$. (Hinweis: $Fa = \eta FX$.)

(2) Ist F voll und treu, so ist ε eine Isotransformation.

(3) Ist F voll und treu, $\mathcal{A}$ additiv und $\mathcal{B}$ abelsch, und respektiert G Cokerne ([11]), dann ist $\mathcal{A}$ abelsch, F rechtsexakt und G exakt.

Aufgabe 68 (§4.2, Aufgaben 66 und 67)

(1) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Sei $F \dashv G$; cf. Aufgabe 66.

Seien $\eta,\, \tilde{\eta} \,:\, F \circ G \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ Coeinheiten zu dieser Adjunktion. Zeige, daß es einen Automorphismus $G \xrightarrow[\sim]{u} G$ so gibt, daß $Fu \cdot \tilde{\eta} = \eta$ ist.

(2) Finde abelsche Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und einen vollen, treuen und exakten Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ so, daß F einen Linksadjungierten und einen Rechtsadjungierten hat, die beide nicht exakt sind.

(3) Finde eine additive Kategorie $\mathcal{A}$, in welcher jeder Morphismus einen Kern und einen Cokern hat, eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$, einen vollen und treuen Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$, welcher einen Linksadjungierten $\mathcal{A} \xleftarrow{F} \mathcal{B}$ hat, der Monomorphismen respektiert, derart, daß $\mathcal{A}$ nicht abelsch ist, F nicht Kerne respektiert und G nicht Cokerne respektiert.

[11] D.h. für alle Diagramme $Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Y''$ in $\mathcal{B}$ mit p Cokern zu i ist auch Gp ein Cokern zu Gi.

Aufgabe 69 (§5.2, Aufgabe 65, §5.4.1) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/27$-Mod. Sei $\mathcal{B} = \mathbf{Z}/3$-Mod. Seien

$$\begin{array}{rcl} X & := & (\ldots \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \ldots) \\ Y & := & (\cdots \to 0 \to \underbrace{\mathbf{Z}/27}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \to 0 \to \ldots) \end{array}$$

in $\mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A})) = \mathrm{Ob}(\mathrm{C}(\mathcal{A}))$.

(1) Man bestimme $\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{h_X^k} \tilde{\mathrm{Z}}^k X$ und daraus $\mathrm{H}^k X$ für $k \in \mathbf{Z}$. Man folgere: X ist azyklisch.

(2) Sei $F := (\mathbf{Z}/3 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} -) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ist FX azyklisch? Ist FX isomorph zu 0 in $\mathrm{K}(\mathcal{B})$? Ist X split azyklisch?

(3) Man bestimme $\mathrm{H}^k Y$ für $k \in \mathbf{Z}$.

(4) Man finde ein $Z \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A}))$ und einen Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ ungleich 0 von X nach Z.

Aufgabe 70 (§5.4.4) Sei

$$\begin{tikzcd} (X', X, X'') \arrow[r, "(f', f, f'')"] \arrow[d, "(x', x, x'')"'] & (Y', Y, Y'') \arrow[d, "(y', y, y'')"] \\ (\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'') \arrow[r, "(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')"'] & (\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'') \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Viereck von Sequenzen. Sei (X', X, X'') rechts- und (Y', Y, Y'') linksexakt. Sei $(\tilde{X}', \tilde{X}, \tilde{X}'')$ rechts- und $(\tilde{Y}', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')$ linksexakt. Verwende bzgl. (f', f, f'') alle Bezeichungen aus Lemma 136 und dessen Beweis; bzgl. $(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')$ entsprechend. Bemerkung 124.(2) gibt uns Morphismen k' mit $k'\tilde{i}' = i'x'$, und k mit $k\tilde{i} = ix$, und k'' mit $k''\tilde{i}'' = i''x''$, und c' mit $r'c' = y'\tilde{r}'$, und c mit $rc = y\tilde{r}$, und c'' mit $r''c'' = y''\tilde{r}''$.

Zeige die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "k'"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "k"'] & K'' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "k''"'] & C' \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "c'"] & C \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "c"] & C'' \arrow[d, "c''"] \\ \tilde{K}' \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \tilde{K} \arrow[r, "\tilde{\beta}"] & \tilde{K}'' \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] & \tilde{C}' \arrow[r, "\tilde{\delta}"] & \tilde{C} \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] & \tilde{C}'' \end{tikzcd} .$$

Folgere, daß γ bei fester Wahl von i'' und r' nicht von den während der Konstruktion getroffenen sonstigen Wahlen abhängt.

Aufgabe 71 (§5.4.2, §3.2)

(1) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. Für $X, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und $u, v : X \to X'$ sei $F(u + v) = Fu + Fv$. Man zeige: F ist additiv.

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Man zeige: Der Funktor $\mathrm{H}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ist additiv.

Aufgabe 72 (§5.4.4) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

(1) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind zwei der Komplexe X', X, X'' azyklisch, so auch der dritte.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind X und Y azyklisch, so auch I_f .

Aufgabe 73 (§5.5, §5.4.2) Wir arbeiten in $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/27$-Mod.

(1) Man löse den Morphismus $\mathbf{Z}/9 \overset{1}{\to} \mathbf{Z}/3$ injektiv auf, um einen Komplexmorphismus $I \overset{g}{\to} J$ zu erhalten.

(2) Sei $F := {}_{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9, -) : \mathbf{Z}/27\text{-Mod} \to \mathbf{Z}/9\text{-Mod}$.
Man berechne $F(I \overset{g}{\to} J)$ bis auf Isomorphie.

(3) Man berechne $(\mathrm{H}^2 \circ F)(I \overset{g}{\to} J)$ bis auf Isomorphie.

Aufgabe 74 (§5.5, §5.6)

(1) Zu $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ ist in $\mathbf{Z}/64$-mod eine projektive und eine injektive Auflösung anzugeben.

(2) Zu $\left(\begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\0\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\end{pmatrix} / \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ x + \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix} \longmapsto x + \begin{pmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ ist in $\begin{pmatrix}\mathbf{Q}&\mathbf{Q}&\mathbf{Q}\\0&\mathbf{Q}&\mathbf{Q}\\0&0&\mathbf{Q}\end{pmatrix}$-Mod eine projektive Auflösung anzugeben.

(3) Zu $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ ist in $\mathbf{Z}/8$-mod eine injektive Hufeisenauflösung anzugeben.

Aufgabe 75 (§6.1.2.2) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, "r"] & X'' \arrow[d, "f''"] \\ \tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & \tilde{X}'' \end{tikzcd}$$

ein Diagramm azyklischer Komplexe in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, in welchem (i, r) und $(\tilde{i}, \tilde{r})$ kurz exakt seien, (i^k, r^k) und $(\tilde{i}^k, \tilde{r}^k)$ split kurz exakt für $k \geqslant 0$, und X'^k, X^k, X''^k, $\tilde{X}'^k$, $\tilde{X}^k$, $\tilde{X}''^k$ null für $k \leqslant -2$ und injektiv für $k \geqslant 0$. Sei ferner ein $X^{-1} \xrightarrow{f^{-1}} \tilde{X}^{-1}$ mit $i^{-1}f^{-1} = f'^{-1}\tilde{i}^{-1}$ und $f^{-1}\tilde{r}^{-1} = r^{-1}f''^{-1}$ gegeben (Position -1, keine Inversion).

Zeige, daß $X^{-1} \xrightarrow{f^{-1}} \tilde{X}^{-1}$ zu $X \xrightarrow{f} \tilde{X}$ mit $if = f'\tilde{i}$ und $f\tilde{r} = rf''$ ergänzt werden kann.

Cf. §7.1.1.

Aufgabe 76 (§5.4.4) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Definiere für $X \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{C}(\mathcal{A})$ den Komplex $X[1]$ durch $(X[1]^k \xrightarrow{d^k_{X[1]}} X[1]^{k+1}) := (X^{k+1} \xrightarrow{-d^{k+1}_X} X^{k+2})$ für $k \in \mathbf{Z}$.

Sei $X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X''$ eine punktweise split kurz exakte Sequenz von Komplexen. Zeige, daß es einen Morphismus $X'' \longrightarrow X'[1]$ so gibt, daß $(\mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k_{(i,r)}} \mathrm{H}^{k+1} X') = \mathrm{H}^k(X'' \longrightarrow X'[1])$ ist für $k \in \mathbf{Z}$.

Aufgabe 77 (§4.5.1, §4.5.3, Aufgabe 76) ([12]) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in $\mathcal{A}$ gegeben.

(1) Zeige, daß

$$\begin{tikzcd} X \oplus Y \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 1 & g \end{smallmatrix}\right)"'] & X \arrow[d, "fg"] \\ Y \oplus Z \arrow[r, "\binom{g}{-1}"'] & Z \end{tikzcd}$$

ein Quadrat ist.

(2) Folgere aus einer Anwendung des Schlangenlemma 136 auf einen Morphismus split kurz exakter Sequenzen von $(X, X \oplus Y, Y)$ nach $(Y, Y \oplus Z, Z)$ unter Verwendung von (1) das Umfangssequenzlemma 132 für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ (mit den Standardkernen und -cokernen).

Aufgabe 78 (§6.1.1, zu lösen ohne Verwendung von §6.2) Zeige oder widerlege.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Sei R ein Ring.

(1) Sei $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ projektiv. Sei $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Es ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P, Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 0$.

(2) Sei $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ projektiv. Sei $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Es ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P, Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

(3) Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Sei $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv. Es ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, I) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

(4) Sei $M \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$. Es ist $\mathrm{Tor}^R_k(R, M) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

Aufgabe 79 (§6.1.1)

(1) Man berechne $\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}/27}_k(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3)$ für $k \geqslant 0$ bis auf Isomorphie.

(2) Man bestimme ein $k \geqslant 0$ mit $\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}/27}_k(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3) \not\simeq 0$, aber $\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}}_k(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3) \simeq 0$.

Aufgabe 80 (§5.6, §6.1.1, §6.1.2.2) Wir arbeiten in der Kategorie $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/81$-Mod. Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/9$.

[12] Diese Aufgabe stammt von Carsten Dietzel.

(1) Man löse $\mathbf{Z}/3$ und $\mathbf{Z}/9$ injektiv auf. Man bilde damit und mit der betrachteten Sequenz ein Hufeisendiagramm, d.h. man finde eine punktweise split kurz exakte Sequenz von injektiven Auflösungen, die unter H^0 auf eine Sequenz isomorph zur betrachteten abgebildet werden.

(2) Man berechne für die betrachtete kurz exakte Sequenz die lang exakte $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,-)$-Sequenz im Bereich $* \leqslant 2$ bis auf Isomorphie.

Dabei berechne man die Konnektoren nicht, sondern bestimme alle an diesen Stellen in Frage kommenden Morphismen, für welche die Sequenz lang exakt wird.

Aufgabe 81 (§6.1.1, §5.6, §6.1.2.2)

(1) Sei $\mathcal{A} := \mathbf{Z}/64$-mod. Berechne $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16, \mathbf{Z}/4) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16,4)} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16, \mathbf{Z}/8)$.

(2) Berechne $\mathrm{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/4) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8,4)} \mathrm{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/8)$.

(3) Sei $R := \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 & \mathbf{Q} \end{smallmatrix}\right)$. Sei $X := (\,\mathbf{Q}\;\mathbf{Q}\;\mathbf{Q}\,) \,/\, (\,0\;\mathbf{Q}\;\mathbf{Q}\,) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}\text{-}R$.
Sei $Y := \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Ob}\, R\text{-Mod}$. Berechne $\mathrm{Tor}_k^R(X,Y)$ für $k \geqslant 0$.

(4) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/8$-mod. Berechne die lang exakte $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,-)$-Sequenz auf
$\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$.

(Hinweis: Aufgabe 74.)

Aufgabe 82 (Aufgabe 73.(3), §6.1.1, §6.1.2.2)

(1) Man interpretiere Aufgabe 73.(3) als Berechnung des Bildes eines Morphismus nach Anwendung eines rechtsabgeleiteten Funktors $\mathrm{R}^k F$, bis auf Isomorphie.

(2) Aus dem Ergebnis läßt sich ein Morphismus in einer lang exakten R^*F-Sequenz als epimorph erkennen. Welcher?

(3) Aus dem Ergebnis läßt sich ein Morphismus in einer lang exakten R^*F-Sequenz als monomorph erkennen. Welcher?

Aufgabe 83 (§4.5.1) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Es gebe keine Kette $X =: X_0 \leftarrowtail X_1 \leftarrowtail X_2 \leftarrowtail \cdots$ aus Monomorphismen, die keine Isomorphismen sind.

Es gebe keine Kette $X =: X_0 \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_2 \twoheadrightarrow \cdots$ aus Epimorphismen, die keine Isomorphismen sind.

Sei $X \xrightarrow{f} X$ ein Endomorphismus. Zeige, daß es ein $n \geqslant 1$ gibt mit $\mathrm{K}_{f^n} \oplus \mathrm{I}_{f^n} \xrightarrow[\sim]{\left(\begin{smallmatrix} \iota_{f^n} \\ (f^n)^{\cdot} \end{smallmatrix}\right)} X$.
(Fittinglemma; Hinweis: Umfangssequenzlemma auf $f^{2k} = f^k f^k$; cf. Lemma 132.)

Aufgabe 84 (§6.3.1) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B}$ rechtsexakt.

(1) Sei $k \in \mathbf{Z}$. Bestimme eine Transformation von $G \circ \mathrm{H}^k$ nach $\mathrm{H}^k \circ \mathrm{C}(G)$.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Quasiisomorphismus in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ist G exakt, so zeige, daß auch $\mathrm{C}(G)X \xrightarrow{\mathrm{C}(G)f} \mathrm{C}(G)Y$ ein Quasiisomorphismus ist.

Aufgabe 85 (§6.3.3) Seien $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Haben $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ genügend Injektive. Sei $F : \mathcal{A} \times \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein biadditiver Funktor so, daß $F(J,-)$ exakt ist für $J \in \operatorname{Ob} \operatorname{Inj} \mathcal{A}$ und $F(-,\tilde{J})$ exakt ist für $\tilde{J} \in \operatorname{Ob} \operatorname{Inj} \tilde{\mathcal{A}}$.

Sei $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Sei $I \in \mathrm{C}^{\mathrm{res}}(\operatorname{Inj} \mathcal{A}) \subseteq \mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine injektive Auflösung von X.

Sei

$$Y' \overset{i}{\rightarrowtail} Y \overset{r}{\twoheadrightarrow} Y''$$

eine kurz exakte Sequenz in $\tilde{\mathcal{A}}$.

Zeige, daß die lang exakte $\mathrm{R}^*F(X,-)$-Sequenz auf (i,r) isomorph ist zur lang exakten Homologiesequenz auf der kurz exakten Sequenz

$$F(I,Y') \xrightarrow{F(I,i)} F(I,Y) \xrightarrow{F(I,r)} F(I,Y'')$$

in $\mathrm{C}(\mathcal{B})$, welche an Position $k \in \mathbf{Z}$ durch $F(I_k\,, Y') \xrightarrow{F(I_k\,,i)} F(I_k\,, Y) \xrightarrow{F(I_k\,,r)} F(I_k\,, Y'')$ gegeben ist.

Aufgabe 86 (§4.5.3, Aufgabe 70) Sei R ein Ring.

Sei $(X', X, X'') \xrightarrow{(f',f,f'')} (Y', Y, Y'')$ ein Morphismus von einer rechts- in eine linksexakte Sequenz in R-Mod.

Sei $x'' \in \operatorname{Kern} f''$. Gib eine Beschreibung des Bildes von x'' unter dem Konnektor

$$\operatorname{Kern} f'' \longrightarrow \operatorname{Cokern} f' = Y'/\operatorname{Im} f' \;;$$

cf. Lemma 136.

Aufgabe 87 (§7.2.1) Sei $\mathbf{Z}$-mod $\subseteq \mathbf{Z}$-Mod die volle Teilkategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen; cf. Aufgabe 15.

Zeige, daß $\mathbf{Z}$-mod eine dicke Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod ist.

Aufgabe 88 (§7.2.3, Aufgaben 66 und 67, §2.4)
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren. Sei F voll und treu. Sei $F \dashv G$. Cf. Aufgaben 66 und 67.
Bilde G Epimorphismen in Epimorphismen ab.

Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ die volle Teilkategorie, die durch

$$\operatorname{Ob}\mathcal{K} \;:=\; \{\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B} \;:\; GY \simeq 0 \,\}$$

definiert ist.

Zeige.

(1) Es ist $\mathcal{K}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{B}$. Es gibt genau einen exakten Funktor $\mathcal{B}/\!\!/\mathcal{K} \xrightarrow{\bar{\bar{G}}} \mathcal{A}$ mit $\bar{\bar{G}} \circ L = G$; cf. Definition 217.

(2) Der Funktor $\bar{\bar{G}}$ aus (1) ist eine Äquivalenz.

Aufgabe 89 (§4.2, §4.4, §4.1, Aufgabe 54)

Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein exakter Funktor zwischen abelschen Kategorien.

Es folge für jedes Objekt X von $\mathcal{A}$ aus $FX \simeq 0$, daß $X \simeq 0$ ist.

Zeige, daß F treu ist.

Aufgabe 90 (§1.2.11.1) Zeige, daß $\mathbf{Q}$ kein projektiver $\mathbf{Z}$-Modul ist.

Aufgabe 91 (§3.3, §7.2.3) Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Sei an den Restklassenfunktor $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ erinnert; cf. Definition 114.

Sei $\mathcal{B}$ eine Kategorie, nicht notwendig additiv. Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein Funktor. Für $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$ gelte, daß aus Rf isomorph auch Ff isomorph folgt.

Zeige, daß genau ein Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\hat{F}} \mathcal{B}$ mit $\hat{F} \circ R = F$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[ur, "\hat{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 92 (§4.5.2, §5.4.1, §5.4.4)

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei folgendes kommutative Diagramm in $\mathcal{A}$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "z'"] & Z \arrow[r, "z''"] & Z'' \\
Y' \arrow[r, "y'"] \arrow[u, "g'"] & Y \arrow[r, "y''"] \arrow[u, "g"] & Y'' \arrow[u, "g''"'] \\
X' \arrow[r, "x'"] \arrow[u, "f'"] & X \arrow[r, "x''"] \arrow[u, "f"] & X'' \arrow[u, "f''"']
\end{tikzcd}$$

Seien darin (x', x''), (y', y''), (z', z''), (f', g') und (f'', g'') kurz exakt, sowie $fg = 0$.

Zeige.

(1) Es ist (f, g) kurz exakt.

(2) Die Sequenz

$$X' \xrightarrow{x'f} Y \xrightarrow{(g\,y'')} Z \oplus Y''$$

ist linksexakt.

(3) Ist nun vielmehr nur das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "y'"] & Y \arrow[r, "y''"] & Y'' \\
X' \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "x'"] & X \arrow[u, "f"] &
\end{tikzcd}$$

gegeben mit (y', y'') kurz exakt und $(x',\, fy'')$ linksexakt, dann läßt sich dieses Diagramm ergänzen zu einem wie oben.

Aufgabe 93 (Aufgabe 23.(2), Aufgabe 58.(2))

Zeige.

(1) Sei $A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ eine kurz exakte Sequenz endlicher abelscher Gruppen. Sind $|A|$ und $|B|$ teilerfremd, dann ist E isomorph zu $A \oplus B$.

(2) Sei $p \geqslant 3$ prim. Sei $k \geqslant 1$. Als abelsche Gruppen ist $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/p^k) \simeq \mathbf{Z}/p^{k-1} \oplus \mathbf{Z}/(p-1)$.

(3) Sei $k \geqslant 2$. Als abelsche Gruppen ist $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/2^k) \simeq \mathbf{Z}/2^{k-2} \oplus \mathbf{Z}/2$.

A.2 Lösungen

Aufgabe 1

Es wird

$$(-r)\cdot s \;=\; (-r)\cdot s + r\cdot s - r\cdot s \;=\; ((-r)+r)\cdot s - r\cdot s \;=\; 0\cdot s - r\cdot s = -(r\cdot s)\,.$$

Analog wird

$$r\cdot(-s) \;=\; r\cdot(-s) + r\cdot s - r\cdot s \;=\; r\cdot((-s)+s) - r\cdot s \;=\; r\cdot 0 - r\cdot s \;=\; -r\cdot s\,.$$

Cf. Bemerkung 2.(3).

Aufgabe 2

(1) Seien $(r_{i,j})_{i,j}$, $(r'_{i,j})_{i,j}$, $(s_{i,j})_{i,j}$, $(s'_{i,j})_{i,j}$, $(t_{i,j})_{i,j} \in R^{n\times n}$.
Wir setzen

$$\begin{array}{rcl} (r_{i,j})_{i,j} + (s_{i,j})_{i,j} & := & (r_{i,j} + s_{i,j})_{i,j} \\ (r_{i,j})_{i,j} \cdot (s_{i,j})_{i,j} & := & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k})_{i,k}\,. \end{array}$$

Zu (Ring 1). Es ist $(R^{n\times n}, +)$ eine abelsche Gruppe, wie sich aus punktweiser Anwendung der abelschen Gruppeneigenschaften von $(R, +)$ ergibt.

Zu (Ring 2). Es werden

$$\begin{array}{rcl} (r_{i,j})_{i,j} \cdot ((s_{i,j})_{i,j} \cdot (t_{i,j})_{i,j}) & = & (r_{i,j})_{i,j} \cdot (\sum_{k\in[1,n]} s_{j,k}t_{k,\ell})_{j,\ell} \\ & = & (\sum_{j\in[1,n]} \sum_{k\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k}t_{k,\ell})_{i,\ell} \\ ((r_{i,j})_{i,j} \cdot (s_{i,j})_{i,j}) \cdot (t_{i,j})_{i,j} & = & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k})_{i,k} \cdot (t_{i,j})_{i,j} \\ & = & (\sum_{k\in[1,n]} \sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k}t_{k,\ell})_{i,\ell}\,. \end{array}$$

Beide Klammerungen liefern also dasselbe Resultat.

Zu (Ring 3). Wir *behaupten,* daß $1_{R^{n\times n}} = (\partial_{i,j})_{i,j}$. Es werden

$$\begin{array}{rcl} (r_{i,j})_{i,j} \cdot (\partial_{i,j})_{i,j} & = & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}\partial_{j,k})_{i,k} \\ & = & (r_{i,k})_{i,k} \\ (\partial_{i,j})_{i,j} \cdot (r_{i,j})_{i,j} & = & (\sum_{j\in[1,n]} \partial_{i,j}r_{j,k})_{i,k} \\ & = & (r_{i,k})_{i,k}\,. \end{array}$$

Zu (Ring 4). Es wird

$$\begin{array}{rl} & \big((r_{i,j})_{i,j} + (r'_{i,j})_{i,j}\big) \cdot (s_{i,j})_{i,j} \\ = & (r_{i,j} + r'_{i,j})_{i,j} \cdot (s_{i,j})_{i,j} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} (r_{i,j} + r'_{i,j})(s_{j,k}))_{i,k} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} (r_{i,j}s_{j,k} + r'_{i,j}s_{j,k}))_{i,k} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k} + \sum_{j\in[1,n]} r'_{i,j}s_{j,k})_{i,k} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k})_{i,k} + (\sum_{j\in[1,n]} r'_{i,j}s_{j,k})_{i,k} \\ = & (r_{i,j})_{i,j}(s_{i,j})_{i,j} + (r'_{i,j})_{i,j}(s_{i,j})_{i,j} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rl} & (r_{i,j})_{i,j} \cdot \big((s_{i,j})_{i,j} + (s'_{i,j})_{i,j}\big) \\ = & (r_{i,j})_{i,j} \cdot (s_{i,j} + s'_{i,j})_{i,j} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}(s_{j,k} + s'_{j,k}))_{i,k} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} (r_{i,j}s_{j,k} + r_{i,j}s'_{j,k}))_{i,k} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k} + \sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s'_{j,k})_{i,k} \\ = & (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s_{j,k})_{i,k} + (\sum_{j\in[1,n]} r_{i,j}s'_{j,k})_{i,k} \\ = & (r_{i,j})_{i,j}(s_{i,j})_{i,j} + (r_{i,j})_{i,j}(s'_{i,j})_{i,j}\,. \end{array}$$

(2) Wir betrachten folgende Matrizen $(r_{i,j})_{i,j}$, $(s_{i,j})_{i,j} \in R^{n\times n}$.

Sei $r_{i,j} := 1$, falls $i = 1$ und $j = 2$, und $r_{i,j} := 0$ sonst. Sei $s_{i,j} := 1$, falls $i = 2$ und $j = 1$, und $s_{i,j} := 0$ sonst.

Es ergibt sich der Eintrag bei $(1, 1)$ von $(r_{i,j})_{i,j} \cdot (s_{i,j})_{i,j}$ zu $\sum_{j\in[1,n]} r_{1,j}s_{j,1} = r_{1,2}s_{2,1} = 1$.

Es ergibt sich der Eintrag bei $(1, 1)$ von $(s_{i,j})_{i,j} \cdot (r_{i,j})_{i,j}$ zu $\sum_{j\in[1,n]} s_{1,j}r_{j,1} = 0$.

Da $1 \neq 0$, folgt $(r_{i,j})_{i,j} \cdot (s_{i,j})_{i,j} \neq (s_{i,j})_{i,j} \cdot (r_{i,j})_{i,j}$.

Cf. Beispiel 3.(4).

Aufgabe 3

(1) Ist $r + I = r' + I$, so ist $r = r + 0 \in r + I = r' + I$. Somit gibt es ein $x \in I$ mit $r = r' + x$. Folglich ist $r - r' = x \in I$.

Sei umgekehrt $r - r' \in I$. Für $x \in I$ ist $r + x = r' + ((r - r') + x) \in r' + I$, und also $r + I \subseteq r' + I$. Auf der anderen Seite ist für $y \in I$ auch $r' + y = r + (-(r - r') + y) \in r + I$, und also $r' + I \subseteq r + I$. Insgesamt ist $r + I = r' + I$.

(2) Seien r, $\tilde{r}$, r', $\tilde{r}' \in R$ mit $r + I = \tilde{r} + I$ und $r' + I = \tilde{r}' + I$ gegeben.

Es ist $(r + r') + I = (\tilde{r} + \tilde{r}') + I$, da $(r + r') - (\tilde{r} + \tilde{r}') = (r - \tilde{r}) + (r' - \tilde{r}') \in I$. Folglich ist die angegebene Additionsabbildung auf R/I wohldefiniert.

Es ist $(r \cdot r') + I = (\tilde{r} \cdot \tilde{r}') + I$, da $r \cdot r' - \tilde{r} \cdot \tilde{r}' = r(r' - \tilde{r}') + (r - \tilde{r})\tilde{r}' \in I$. Folglich ist die angegebene Multiplikationsabbildung auf R/I wohldefiniert.

Die Ringeigenschaften für R/I vererben sich wie folgt von R. Seien r, r', r'', s, $s' \in R$.

Zu (Ring 1). Es ist

$$\begin{array}{rcl} (r + I) + ((r' + I) + (r'' + I)) & = & (r + I) + ((r' + r'') + I) \\ & = & (r + (r' + r'')) + I \\ & = & (r + r' + r'') + I \ , \end{array}$$

und genauso $((r + I) + (r' + I)) + (r'' + I) = (r + r' + r'') + I$.

Es ist $(r + I) + (r' + I) = (r + r') + I = (r' + r) + I = (r + I) + (r' + I)$.

Es ist $(0 + I) + (r + I) = (0 + r) + I = r + I$.

Es ist $((-r) + I) + (r + I) = ((-r) + r) + I = 0 + I$.

Zu (Ring 2). Es ist

$$\begin{array}{rcl} (r + I) \cdot ((r' + I) \cdot (r'' + I)) & = & (r + I) \cdot ((r' \cdot r'') + I) \\ & = & (r \cdot (r' \cdot r'')) + I \\ & = & (r \cdot r' \cdot r'') + I \ , \end{array}$$

und genauso $((r + I) \cdot (r' + I)) \cdot (r'' + I) = (r \cdot r' \cdot r'') + I$.

Zu (Ring 3). Es ist $(1 + I) \cdot (r + I) = (1 \cdot r) + I = r + I$. Es ist $(r + I) \cdot (1 + I) = (r \cdot 1) + I = r + I$.

Zu (Ring 4). Es ist

$$\begin{array}{rl} & ((r + I) + (r' + I)) \cdot (s + I) \\ = & ((r + r') + I) \cdot (s + I) \\ = & ((r + r') \cdot s) + I \\ = & (r \cdot s + r' \cdot s) + I \\ = & (r \cdot s + I) + (r' \cdot s + I) \\ = & (r + I) \cdot (s + I) + (r' + I) \cdot (s + I) \end{array}$$

und

$$
\begin{aligned}
& (r+I)\cdot((s+I)+(s'+I)) \\
= \; & (r+I)\cdot((s+s')+I) \\
= \; & (r\cdot(s+s'))+I \\
= \; & (r\cdot s+r\cdot s')+I \\
= \; & (r\cdot s+I)+(r\cdot s'+I) \\
= \; & (r+I)\cdot(s+I)+(r+I)\cdot(s'+I)\,.
\end{aligned}
$$

Cf. Bemerkung 6.(2).

Aufgabe 4

(1) Zeigen wir die Existenz von $n \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $I = n\mathbf{Z}$. Sei $I \subseteq \mathbf{Z}$ ein Ideal. Ist $I = 0$, so ist $I = 0\mathbf{Z}$. Ist $I \neq 0$, so ist $I \cap \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$ nicht leer, da mit jedem Element auch sein Negatives in I liegt. Sei $n := \min(I \cap \mathbf{Z}_{\geqslant 1})$. Wir behaupten, daß $I \overset{!}{=} n\mathbf{Z}$. Wegen $n \in I$ ist auch $n\mathbf{Z} \subseteq I$. Bleibt die Inklusion $I \overset{!}{\subseteq} n\mathbf{Z}$ zu zeigen. Sei $x \in I$. Dank Division mit Rest können wir $x = na + b$ schreiben mit $a,\, b \in \mathbf{Z}$ und $b \in [0, n-1]$. Es ist $b = x - na \in I$. *Wäre* $b \neq 0$, so wäre $b \in I \cap \mathbf{Z}_{\geqslant 1}$, aber $b < n$, im *Widerspruch* zur Wahl von n. Also ist $b = 0$, und folglich $x = na \in n\mathbf{Z}$.

Zeigen wir die Eindeutigkeit eines solchen n. Seien also $n,\, \tilde{n} \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}$ mit $I = n\mathbf{Z} = \tilde{n}\mathbf{Z}$. Ist $I = 0$, so ist $n = 0 = \tilde{n}$. Ist $I \neq 0$, so sind $n,\, \tilde{n} \geqslant 1$. Ferner ist dann n ein Vielfaches von $\tilde{n}$, und $\tilde{n}$ ein Vielfaches von n, was $n = \tilde{n}$ nach sich zieht.

(2) Sei n prim. Zunächst ist $0 \neq 1$ in $\mathbf{Z}/n$. Sei ferner $x \in \mathbf{Z}$ mit $x \notin n\mathbf{Z}$, i.e. mit $x \neq 0$ in $\mathbf{Z}/n$ gegeben. Um zu zeigen, daß x in $\mathbf{Z}/n$ invertierbar ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z}/n \longrightarrow \mathbf{Z}/n$, $y \longmapsto xy$ surjektiv ist. Dafür wiederum genügt es wegen der Endlichkeit von $\mathbf{Z}/n$ zu zeigen, daß $\mathbf{Z}/n \longrightarrow \mathbf{Z}/n$, $y \longmapsto xy$ injektiv ist. Seien also $y,\, y' \in \mathbf{Z}$ mit $xy = xy'$ in $\mathbf{Z}/n$ gegeben. Dann ist n ein Teiler von $x(y-y')$. Da n prim ist und da n kein Teiler von x ist, ist n ein Teiler von $y - y'$. In anderen Worten, es ist $y = y'$ in $\mathbf{Z}/n$.

Sei n nicht prim. Ist $n = 1$, so ist $\mathbf{Z}/1\mathbf{Z}$ kein Körper, da darin $0 = 1$ gilt. Wir dürfen also $n \geqslant 2$ annehmen. Schreibt man $n = ab$ mit $a,\, b \in [1, n-1]$, so ist a in $\mathbf{Z}/n$ nicht invertierbar. Denn wäre $xa = 1$ in $\mathbf{Z}/n$ für $x \in \mathbf{Z}$, so wäre $b = xab = 0$ in $\mathbf{Z}/n$, aber $b \neq 0$ in $\mathbf{Z}/n$, da $b \in [1, n-1]$ in $\mathbf{Z}$.

(3) Wir können $n \in \{15, 16, 20, 24, 30\}$ wählen.

Cf. Beispiel 7.

Aufgabe 5

(1) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $R = \mathbf{Z}/8$, und sei $x = 3$. Dann ist $x^2 = 1$, aber $x \notin \{-1, +1\}$.

(2) Die Aussage ist falsch. Seien etwa $n = 15$ und $x = 2$. Die Ordnung von 2 in $\mathbf{Z}/15$ ist 4, und das ist kein Teiler von $15 \cdot 14$.

Aufgabe 6

Zunächst merken wir an, daß auch $I \cap J \subseteq R$ ein Ideal ist.

Es ist φ wohldefiniert, da für $r + (I \cap J) = r' + (I \cap J)$ auch $r + I = r' + I$ und $r + J = r' + J$, wobei $r,\, r' \in R$. (Oder aber, man verwendet Bemerkung 13.)

Es ist φ ein Ringmorphismus.

Es ist φ injektiv, da aus $r + I = 0$ und $r + J = 0$ folgt, daß $r \in I \cap J$, also $r + (I \cap J) = 0$.

Zeigen wir die Surjektivität. Für $r,\, s \in R$ wird $ry + sx + (I \cap J)$ abgebildet auf

$$(ry + sx + I, ry + sx + J) \;=\; (ry + I, sx + J) \;=\; (r(1-x) + I, s(1-y) + J) \;=\; (r + I, s + J)\;.$$

Aus dem Beweis der Surjektivität resultiert auch die Formel

$$(r + I, s + J)\varphi^{-1} \;=\; ry + sx + (I \cap J)$$

für die Umkehrabbildung, wobei $r,\, s \in R$.

Aufgabe 7

Wie in Aufgabe 3.(1) sieht man, daß $m + N = \tilde{m} + N$ genau dann, wenn $m - \tilde{m} \in N$, wobei $m,\, \tilde{m} \in M$.

Die Addition ist wohldefiniert, da für $m,\, \tilde{m} \in M$ mit $m + N = \tilde{m} + N$ und für $m',\, \tilde{m}' \in M$ mit $m' + N = \tilde{m}' + N$ auch $(m + m') - (\tilde{m} + \tilde{m}') = (m - \tilde{m}) + (m' - \tilde{m}') \in N$ und somit $(m + m') + N = (\tilde{m} + \tilde{m}') + N$ ist. Die Skalarmultiplikation ist wohldefiniert, da für $r \in R$ und $m,\, \tilde{m} \in M$ mit $m - \tilde{m} \in N$ auch $rm - r\tilde{m} = r(m - \tilde{m}) \in N$ ist, und also $rm + N = r\tilde{m} + N$ ist.

Die R-Linksmodul-Eigenschaften von M/N vererben sich wie folgt von M. Seien $m,\, m',\, m'' \in M$ und $r,\, r' \in R$.

Zu (LMod 1). Es ist

$$\begin{array}{rcl} (m + N) + ((m' + N) + (m'' + N)) & = & (m + N) + ((m' + m'') + N) \\ & = & (m + (m' + m'')) + N \\ & = & (m + m' + m'') + N\;, \end{array}$$

und genauso $((m + N) + (m' + N)) + (m'' + N) = (m + m' + m'') + N$.

Es ist $(m + N) + (m' + N) = (m + m') + N = (m' + m) + N = (m + N) + (m' + N)$.

Es ist $(0 + N) + (m + N) = (0 + m) + N = m + N$.

Es ist $((-m) + N) + (m + N) = ((-m) + m) + N = 0 + N$.

Zu (LMod 2). Es ist

$$\begin{array}{rcl} r \cdot (r' \cdot (m + N)) & = & r \cdot ((r' \cdot m) + N) \\ & = & (r \cdot (r' \cdot m)) + N \\ & = & ((r \cdot r') \cdot m) + N \\ & = & (r \cdot r') \cdot (m + N)\;. \end{array}$$

Zu (LMod 3). Es ist $1 \cdot (m + N) = (1 \cdot m) + N = m + N$.

Zu (LMod 4). Es ist

$$\begin{array}{rl} & (r + r') \cdot (m + N) \\ = & ((r + r') \cdot m) + N \\ = & (rm + r'm) + N \\ = & (rm + N) + (r'm + N) \\ = & r \cdot (m + N) + r' \cdot (m + N) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rl} & r \cdot ((m + N) + (m' + N)) \\ = & r \cdot ((m + m') + N) \\ = & (r \cdot (m + m')) + N \\ = & (rm + rm') + N \\ = & (rm + N) + (rm' + N) \\ = & r \cdot (m + N) + r \cdot (m' + N)\;. \end{array}$$

Aufgabe 8

(1) Seien $s,\, s' \in S$. Es ist
$$1_S f^{-1} \;=\; 1_R f f^{-1} \;=\; 1_R\,.$$
Es ist
$$(s+s')f^{-1} \;=\; (sf^{-1}f + s'f^{-1}f)f^{-1} \;=\; (sf^{-1}+s'f^{-1})ff^{-1} \;=\; sf^{-1}+s'f^{-1}\,.$$
Es ist
$$(s\cdot s')f^{-1} \;=\; (sf^{-1}f \cdot s'f^{-1}f)f^{-1} \;=\; (sf^{-1}\cdot s'f^{-1})ff^{-1} \;=\; sf^{-1}\cdot s'f^{-1}\,.$$

(2) Seien $r,\, r' \in R$ und $n,\, n' \in N$. Es ist
$$\begin{array}{rcl} (rn+r'n')f^{-1} & = & (r(nf^{-1}f) + r'(n'f^{-1}f))f^{-1} \\ & = & (r(nf^{-1}) + r'(n'f^{-1}))ff^{-1} \\ & = & r(nf^{-1}) + r'(n'f^{-1})\,. \end{array}$$

Aufgabe 9

(1) Die Aussage ist richtig.
Seien $r,\, r' \in R^\circ$, was als Menge gleich R ist.
Beachte zunächst, daß die Eins in R auch die Eins in R° ist.
Nun gilt weiterhin $1_R f = 1_S$ und $(r+r')f = rf + r'f$ für $r,\, r' \in R$.
Ferner ist $(r * r')f = (r'\cdot r)f = r'f \cdot rf = rf * r'f$ für $r,\, r' \in R$.

(2) Die Aussage ist richtig.
Bezeichne $\mathrm{E} = \mathrm{E}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bezeichne A^{t} die zu $A \in \mathbf{Q}^{2\times 2}$ transponierte Matrix.
Es ist
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Q}^{2\times 2} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbf{Q}^{2\times 2})^\circ \\ A & \longmapsto & A^{\mathrm{t}}\,, \end{array}$$
da in der Tat $\mathrm{E}^{\mathrm{t}} = \mathrm{E}$, $(A+A')^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + A'^{\mathrm{t}}$ und $(A\cdot A')^{\mathrm{t}} = A'^{\mathrm{t}}\cdot A^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} * A'^{\mathrm{t}}$ für $A,\, A' \in \mathbf{Q}^{2\times 2}$.

(3) Die Aussage ist falsch. Sei e.g. $F := \mathbf{Z}/2$ und $R = \left(\begin{smallmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & F & F \end{smallmatrix}\right)$. Mittels Transposition ist $R^\circ \simeq \left(\begin{smallmatrix} F & 0 & 0 \\ F & F & F \\ F & F & F \end{smallmatrix}\right) =: S$; cf. (2).
Nehmen wir an, es ist $S = \left(\begin{smallmatrix} F & 0 & 0 \\ F & F & F \\ F & F & F \end{smallmatrix}\right) \simeq \left(\begin{smallmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & F & F \end{smallmatrix}\right) = R$.
In $R = \left(\begin{smallmatrix} F & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & F & F \end{smallmatrix}\right)$ gibt es ein Element $r := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ mit $Rr = \{0, r\}$. Also erfüllt das Bild s von r unter dem gegebenen Isomorphismus ebenfalls die Eigenschaft $s \neq 0$ und $Ss = \{0, s\}$.
Seien $e_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $e_3 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Enthielte s nichtverschwindende Einträge in den Zeilen i und j mit $i \neq j$, so wäre $e_i s \neq 0$ und $e_i s \neq s$, da die Einträge von $e_i s$ in Zeile j verschwinden. Also enthält s nur in einer Zeile nichtverschwindende Einträge.
Falls $s = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \not\in \{0, s\}$, was nicht sein kann.
Falls $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & c & d \end{smallmatrix}\right) \not\in \{0, s\}$, was nicht sein kann.
Falls $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & f & g \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & f & g \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e & f & g \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \not\in \{0, s\}$, was nicht sein kann.
Insgesamt sind wir an einem *Widerspruch* angelangt.

Aufgabe 10

Eine Matrix in $\mathbf{Z}^{m\times m}$ oder $\mathbf{Z}^{n\times n}$ heiße hier invertierbar, falls sie ein ganzzahliges Inverses besitzt.

Eine Zeilenvertauschung in einer Matrix in $\mathbf{Z}^{m\times n}$ entspricht einer Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links.

Die Addition eines ganzzahligen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen in einer Matrix in $\mathbf{Z}^{m\times n}$ entspricht einer Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links.

Analog für Spaltenoperationen.

Sei $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$ gegeben. Wir dürfen $m \geqslant 1$ und $n \geqslant 1$ annehmen.

Es genügt zu zeigen, daß es $S \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ invertierbar und $T \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ invertierbar so gibt, daß $SAT = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & A' \end{smallmatrix}\right)$ für ein $a \in \mathbf{Z}$ und ein $A' \in \mathbf{Z}^{(m-1)\times(n-1)}$. Denn dies läßt sich iterieren, i.e. wir können dieselbe Aussage auf A' anwenden, usf.

Wir zeichnen folgende Teilmenge und folgendes Element der Menge $[1,m]\times[1,n]$ aller Eintragspositionen der Matrizen in $\mathbf{Z}^{m\times n}$ aus.

Sei $\{(i,1) \;:\; i \in [2,m]\} \cup \{(1,j) \;:\; j \in [2,n]\} \subseteq [1,m]\times[1,n]$ der *Rand*.

Sei $(1,1) \in [1,m]\times[1,n]$ das *Eck*.

Sei also $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$ gegeben, und seien nicht alle Einträge des Randes null. Mittels einer Zeilen- oder einer Spaltenvertauschung kann man erreichen, daß der Eintrag im Eck ungleich null ist.

Es genügt zu zeigen, daß es $S \in \mathbf{Z}^{m\times m}$ invertierbar und $T \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ invertierbar so gibt, daß der Betrag des Eintrags im Eck von SAT kleiner ist als der Betrag des Eintrags im Eck von A, oder so, daß im Rand von SAT alle Einträge null sind. Denn solche Umformungen lassen sich nur endlich oft iterieren, so daß eine Iteration schließlich mit einer Matrix endet, deren Einträge im Rand alle null sind.

Fall 1. Teilt der Eintrag im Eck von A jeden Eintrag des Randes, so kann mit Addition von Vielfachen der ersten Zeile auf die weiteren Zeilen und nachfolgender Addition von Vielfachen der ersten Spalte auf die weiteren Spalten erreicht werden, daß in der resultierenden Matrix im Rand alle Einträge null sind.

Fall 2. Teilt der Eintrag im Eck von A einen Eintrag des Randes nicht, so kann unter Verwendung von Division mit Rest mit Addition eines Vielfachen der ersten Zeile auf eine weitere Zeile oder mit Addition eines Vielfachen der ersten Spalte auf eine weitere Spalte erreicht werden, daß im Rand der umgeformten Matrix ein Eintrag steht, dessen Betrag kleiner ist als der Betrag des Eintrags im Eck. Diesen Eintrag können wir mit Zeilen- oder Spaltenvertauschen ins Eck bringen.

Im Fall 1 sind in der resultierenden Matrix alle Einträge des Randes gleich null. Im Fall 2 ist in der resultierenden Matrix der Eintrag im Eck von kleinerem Betrag als in der Ausgangsmatrix A.

Aufgabe 11

(1) Sei $\mathbf{Z}/m \xrightarrow{f} \mathbf{Z}/n$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung. Wähle ein $a \in \mathbf{Z}$ mit $a + n\mathbf{Z} = (1 + m\mathbf{Z})f$. Es ist

$$ma + n\mathbf{Z} \;=\; m(a + n\mathbf{Z}) \;=\; m((1 + m\mathbf{Z})f) \;=\; (m(1 + m\mathbf{Z}))f \;=\; (0 + m\mathbf{Z})f \;=\; 0 + n\mathbf{Z}\;,$$

und also $ma \equiv_n 0$.

Für $z \in \mathbf{Z}$ ist ferner

$$(z + m\mathbf{Z})f \;=\; (z(1 + m\mathbf{Z}))f \;=\; z((1 + m\mathbf{Z})f) \;=\; z(a + n\mathbf{Z}) \;=\; az + n\mathbf{Z}\;,$$

und also $(\mathbf{Z}/m \xrightarrow{f} \mathbf{Z}/n) = (\mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/n)$.

(2) *Fall* $n \geqslant 1$.

Für $a,\, b \in \mathbf{Z}$ mit $am \equiv_n bm \equiv_n 0$ ist $(\mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/n) = (\mathbf{Z}/m \xrightarrow{b} \mathbf{Z}/n)$ genau dann, wenn $az \equiv_n bz$ für alle $z \in \mathbf{Z}$, i.e. wenn $a \equiv_n b$.

Sei $k := n/\mathrm{ggT}(m,n)$. Beachte, daß $am \equiv_n 0$ genau dann, wenn $a \equiv_k 0$. Also ist mit

$$a \;\in\; \{0 \cdot k,\, 1 \cdot k,\, \ldots,\, (n/k - 1) \cdot k\}$$

jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung genau einmal erfaßt. Die Anzahl der $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen von $\mathbf{Z}/m$ nach $\mathbf{Z}/n$ ist mithin $n/k = \mathrm{ggT}(m,n)$.

Fall $n = 0,\; m \geqslant 1$.

Nach (1) ist jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}/m$ nach $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}/0$ von der Form $(\mathbf{Z}/m \xrightarrow{a} \mathbf{Z})$ für ein $a \in \mathbf{Z}$ mit $am \equiv_0 0$, i.e. mit $am = 0$, i.e. mit $a = 0$, was der Nullabbildung entspricht. Die Anzahl der $\mathbf{Z}$-linearen Abbildungen von $\mathbf{Z}/m$ nach $\mathbf{Z}$ ist mithin 1.

Fall $n = 0,\; m = 0$.

Nach (1) ist jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}/0$ nach $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}/0$ von der Form $(\mathbf{Z} \xrightarrow{a} \mathbf{Z})$ für ein $a \in \mathbf{Z}$ mit $a0 \equiv_0 0$. Diese Bedingung ist leer. Verschiedene Werte von a führen zu verschiedenen Bildern von $1 \in \mathbf{Z}$, also zu verschiedenen Abbildungen. Mithin gibt es (abzählbar) unendlich viele $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen von $\mathbf{Z}$ nach $\mathbf{Z}$.

Aufgabe 12

(1) Jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}/9$ nach $\mathbf{Z}/27$ ist von der Form $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3a} \mathbf{Z}/27$ für ein $a \in \mathbf{Z}$.

Für $a,\, b \in \mathbf{Z}$ ist dabei $(\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3a} \mathbf{Z}/27) = (\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3b} \mathbf{Z}/27)$ genau dann, wenn $3a \equiv_{27} 3b$ ist, also wenn $a \equiv_9 b$ ist.

Also ist jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}/9$ nach $\mathbf{Z}/27$ von der Form $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3a} \mathbf{Z}/27$ für ein $a \in [0,8]$. Diese Abbildungen sind paarweise verschieden.

(2) Es ergibt sich folgende Tabelle.

f	$\mathrm{Kern}(f)$	$\mathrm{Im}(f)$	$\mathrm{Cokern}(f)$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/27$	$\mathbf{Z}/9$	0	$(\mathbf{Z}/27)/0 \simeq \mathbf{Z}/27$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27$	0	$3\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(3\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/3$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{6} \mathbf{Z}/27$	0	$3\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(3\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/3$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27$	$3\mathbf{Z}/9$	$9\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(9\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/9$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{12} \mathbf{Z}/27$	0	$3\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(3\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/3$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{15} \mathbf{Z}/27$	0	$3\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(3\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/3$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{18} \mathbf{Z}/27$	$3\mathbf{Z}/9$	$9\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(9\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/9$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{21} \mathbf{Z}/27$	0	$3\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(3\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/3$
$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{24} \mathbf{Z}/27$	0	$3\mathbf{Z}/27$	$(\mathbf{Z}/27)/(3\mathbf{Z}/27) \simeq \mathbf{Z}/3$

Aufgabe 13

(1) Ein solches f gibt es nicht.

Annahme, doch. Da $\iota f = \mathrm{id}$ ist, ist $\binom{1}{0} f = \binom{1}{0}$. Sei $\binom{0}{1} f = \binom{x}{0}$ für ein $x \in \mathbf{Q}$. Es wird

$$\begin{aligned} \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\binom{0}{1}\right)f \;&\overset{1.}{=}\; \binom{1}{0} f \;=\; \binom{1}{0} \\ &\overset{2.}{=}\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\binom{0}{1} f\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\binom{x}{0} \;=\; \binom{0}{0}\;, \end{aligned}$$

und wir haben einen *Widerspruch.*

(2) Ein solches g gibt es nicht.

Annahme, doch. Da $g\rho = \mathrm{id}$, ist $(\binom{0}{1} + \binom{\mathbf{Q}}{0})g = \binom{x}{1}$ für ein $x \in \mathbf{Q}$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)(\binom{0}{1} + \binom{\mathbf{Q}}{0})\right)g & \overset{1.}{=} & \left(\binom{1}{0} + \binom{\mathbf{Q}}{0}\right)g \;=\; \left(\binom{0}{0} + \binom{\mathbf{Q}}{0}\right)g = \binom{0}{0} \\ & \overset{2.}{=} & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left((\binom{0}{1} + \binom{\mathbf{Q}}{0})g\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\binom{x}{1} = \binom{1}{0}\ , \end{array}$$

und wir haben einen *Widerspruch.*

Aufgabe 14

(1) Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M,N) & = & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/3 \oplus \mathbf{Z}/9,\ \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27) \\ & = & \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,:\, a \in \{0,3,6\},\, b \in \{0,9,18\},\, c \in \{0,1,2,\dots,8\},\, d \in \{0,3,6,\dots,24\} \}\ . \end{array}$$

Also ist $|\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M,N)| = 3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 9 = 3^6 = 729$.

(2) Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M,X) & = & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/3 \oplus \mathbf{Z}/9,\ \mathbf{Z}/3) \\ & = & \{ \binom{u}{v} \,:\, u \in \{0,1,2\},\, v \in \{0,1,2\} \}\ . \end{array}$$

Es ist

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X,N) & = & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/3,\ \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27) \\ & = & \{ \left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right) \,:\, x \in \{0,3,6\},\, y \in \{0,9,18\} \}\ . \end{array}$$

Wir komponieren.

$(\cdot)$	$(0\ 0)$	$(0\ 9)$	$(0\ 18)$	$(3\ 0)$	$(3\ 9)$	$(3\ 18)$	$(6\ 0)$	$(6\ 9)$	$(6\ 18)$
$\binom{0}{0}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{0}{1}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{0}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{1}{0}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{1}{1}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{2}{0}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{2}{1}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$
$\binom{2}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 18 \\ 0 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 18 \\ 6 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 18 \\ 3 & 18 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)$

Wir finden durch Abzählen

$$|H_X| \;=\; 1 + 4 \cdot 8 \;=\; 33\ .$$

Hierzu beachte man, daß die 2-te und die 3-te Zeile dieselben Morphismen enthält, dito die 4-te und die 7-te, dito die 5-te und die 9-te, dito die 6-te und die 8-te.

Da $|H_X| = 33$ kein Teiler von $|\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M,N)| = 3^6$ ist, ist H_X keine Untergruppe von $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M,N)$.

Aufgabe 15

(1) Sei $M'' \;=\; {}_{\mathbf{Z}}\langle\{m''_1,\,\dots,\,m''_t\}\rangle$ für ein $t \geqslant 0$. Wähle $m_i \in M$ mit $m_i p = m''_i$ für $i \in [1,t]$. Sei $\mathrm{Kern}\, p = {}_{\mathbf{Z}}\langle\{m'_1,\,\dots,\,m'_s\}\rangle$ für ein $s \geqslant 0$. Wir *behaupten,* daß

$$M \;=\; {}_{\mathbf{Z}}\langle\{m'_1,\,\dots,\,m'_s\,,\; m_1,\dots,m_t\}\rangle\ .$$

Sei $m \in M$ gegeben. Schreibe $mp = w_1 m_1'' + \cdots + w_t m_t''$ für gewisse $w_i \in \mathbf{Z}$. Es ist $(m - (w_1 m_1 + \cdots + w_t m_t))p = 0$. Also ist $m - (w_1 m_1 + \cdots + w_t m_t) \in \operatorname{Kern} p$, und wir können $m - (w_1 m_1 + \cdots + w_t m_t) = z_1 m_1' + \cdots + z_s m_s'$ schreiben für gewisse $z_i \in \mathbf{Z}$. Insgesamt wird

$$m \;=\; (w_1 m_1 + \cdots + w_t m_t) + (z_1 m_1' + \cdots + z_s m_s')\;.$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

(2) Wir führen eine Induktion nach ℓ. Für $\ell = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\ell \geqslant 1$ und die Aussage für $\ell - 1$ bekannt.

Sei $\mathbf{Z}^{\oplus \ell} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}^{\oplus(\ell-1)}$, $(z_1, z_2, \ldots, z_\ell) \longmapsto (z_2, \ldots, z_\ell)$. Es ist p eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung. Sei $M'' := \operatorname{Im}(p|_M) \subseteq \mathbf{Z}^{\oplus(\ell-1)}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist M'' endlich erzeugt. Wir haben eine surjektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $p|_M^{M''} : M \longrightarrow M''$.

Wir haben die injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Kern}(p|_M^{M''}) \;=\; \{(z_1,\ldots,z_\ell) \in \mathbf{Z}^{\oplus \ell} \;:\; (z_1,\ldots,z_\ell) \in M,\, z_i = 0 \text{ für } i \in [2,\ell]\} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ (z_1,\ldots,z_\ell) & \longmapsto & z_1 \end{array}$$

Ihr Bild ist nach Aufgabe 4.(1) endlich (viz. von einer einelementigen Menge) erzeugt. Also ist auch $\operatorname{Kern}(p|_M^{M''})$ als zu diesem Bild isomorpher $\mathbf{Z}$-Modul endlich erzeugt.

Somit sind die in (1) gemachten Voraussetzungen an M'' und $\operatorname{Kern}(p|_M^{M''})$ erfüllt, und wir können schließen, daß M endlich erzeugt ist.

Aufgabe 16

(1) Betrachte

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\eta"] & \operatorname{Cokern} f \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "\rho"] & \operatorname{Cokern} f' \end{tikzcd}$$

Da $f(\eta\rho) = \xi f'\rho = \xi 0 = 0$, gibt es nach der universellen Eigenschaft des Cokerns genau eine R-lineare Abbildung $\operatorname{Cokern} f \xrightarrow{c} \operatorname{Cokern} f'$, für die $\eta\rho = \rho c$ ist; cf. Bemerkung 39.(2).

(2) Da η und ρ surjektiv sind, und da $\eta\rho = \rho c$, folgt, daß c surjektiv ist. Wir haben zu zeigen, daß c injektiv ist, i.e. daß $\operatorname{Kern} c \overset{!}{=} 0$.

Es schickt c das Element $y + \operatorname{Im} f = y\rho$ auf $y\rho c = y\eta\rho = y\eta + \operatorname{Im} f'$ für $y \in Y$. Sei dieses Bildelement null. Dann ist $y\eta = x'f'$ für ein $x' \in X'$. Dank ξ surjektiv gibt es ein $x \in X$ mit $x\xi = x'$. Also ist $y\eta = x'f' = x\xi f' = xf\eta$, also $y - xf \in \operatorname{Kern}\eta \subseteq \operatorname{Im} f$, und somit gibt es ein $\tilde{x} \in X$ mit $y - xf = \tilde{x}f$. Also ist $y + \operatorname{Im} f = (x + \tilde{x})f + \operatorname{Im} f = 0$.

Aufgabe 17

Beachte, daß $\delta : \bigoplus_{i\in[1,k]} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in[1,\ell]} N_j$, $(m_1,\ldots,m_k) \longmapsto (m_1\delta_{1,1},\ldots,m_\ell\delta_{\ell,\ell})$.

Wir haben den R-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Cokern}\delta \;=\; (\bigoplus_{i\in[1,\ell]} N_j)/\operatorname{Im}\delta & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in[1,\ell]} \operatorname{Cokern}\delta_{i,i} \\ (n_1\,,\ldots,n_\ell) + \operatorname{Im}\delta & \longmapsto & (n_1 + \operatorname{Im}\delta_{1,1}\,,\ldots,n_\ell + \operatorname{Im}\delta_{\ell,\ell}) \\ (n_1\,,\ldots,n_\ell) + \operatorname{Im}\delta & \longleftarrow\!\!\shortmid & (n_1 + \operatorname{Im}\delta_{1,1}\,,\ldots,n_\ell + \operatorname{Im}\delta_{\ell,\ell})\;. \end{array}$$

Hierbei ist $\longmapsto$ wohldefiniert, da $(n_1\,,\ldots,n_\ell) \in \operatorname{Im}\delta$ impliziert, daß $n_i \in \operatorname{Im}\delta_{i,i}$ für alle $i \in [1,\ell]$.

Ferner ist $\longleftarrow\!\!\shortmid$ wohldefiniert, da $(n_1\,,\ldots,n_\ell) \in \operatorname{Im}\delta$ von ($n_i \in \operatorname{Im}\delta_{i,i}$ für alle $i \in [1,\ell]$) auch impliziert wird.

Aufgabe 18

(1) Sei M ein endlich erzeugter $\mathbf{Z}$-Modul, sagen wir, $M = {}_{\mathbf{Z}}\langle m_1, \dots, m_\ell\rangle$ für ein $\ell \geqslant 0$ und $m_i \in M$ für $i \in [1,\ell]$. Sei $\mathbf{Z} \xrightarrow{\mu_i} M$, $z \longmapsto zm_i$. Sei $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_\ell \end{pmatrix} : \mathbf{Z}^{\oplus\ell} \longrightarrow M$, $(z_1,\dots,z_\ell) \longmapsto z_1m_1 + \cdots z_\ell m_\ell$.
Nach Konstruktion ist μ surjektiv.

Nach Aufgabe 15.(2) ist $\operatorname{Kern}\mu$ endlich erzeugt. Genau wie eben erhalten wir ein $k \geqslant 0$ und eine surjektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $\mathbf{Z}^{\oplus k} \longrightarrow \operatorname{Kern}\mu$. Komponiert mit der Inklusion $\operatorname{Kern}\mu \xrightarrow{\iota} M$ erhalten wir eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $\varphi = (\varphi_{i,j})_{i,j} : \mathbf{Z}^{\oplus k} \longrightarrow \mathbf{Z}^{\oplus\ell}$, für welche $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Kern}\mu$ ist.

Durch Hinzufügen weiterer Summanden auf der linken Seite, die allesamt auf 0 abgebildet werden, können wir ferner erreichen, daß $0 \leqslant \ell \leqslant k$. In anderen Worten, wir können der Matrix φ weitere Nullzeilen anfügen, ohne daß sich ihr Bild ändert.

Für $i \in [1,k]$ und $j \in [1,\ell]$ ist $\varphi_{i,j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung; sei $f_{i,j} := 1\varphi_{i,j}$, und sei $F := (f_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Z}^{k\times\ell}$.

Der Homomorphiesatz, angewandt auf μ, liefert einen $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Cokern}\varphi \;=\; \mathbf{Z}^{\oplus\ell}/\operatorname{Im}\varphi & \xrightarrow{\sim} & M \\ (z_i)_i + \operatorname{Im}\varphi & \longmapsto & (z_i)_i\,\mu \;=\; \sum_{i\in[1,\ell]} z_i m_i\,; \end{array}$$

cf. Lemma 30.

Seien $S = (s_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Z}^{k\times k}$ und $T = (t_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Z}^{\ell\times\ell}$ ganzzahlig invertierbar so, daß $SFT = D = (d_{i,j})_{i,j}$ diagonal ist; cf. Aufgabe 10.

Sei $\sigma_{i,j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $z \longmapsto zs_{i,j}$ für $i,\ j \in [1,k]$; sei $\delta = (\delta_{i,j})_{i,j}$. Es ist σ ein $\mathbf{Z}$-linearer Isomorphismus.

Sei $\tau_{i,j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $z \longmapsto zt_{i,j}$ für $i,\ j \in [1,k]$; sei $\tau = (\tau_{i,j})_{i,j}$. Es ist τ ein $\mathbf{Z}$-linearer Isomorphismus.

Sei $\delta_{i,j} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $z \longmapsto zd_{i,j}$ für $i,\ j \in [1,k]$.

Aus $SFT = D$ folgt $\sigma\varphi\tau = \delta$ ([13]).

Anwendung von Aufgabe 16.(1, 2) auf das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}^{\oplus k} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"', "\wr"] & \mathbf{Z}^{\oplus\ell} \arrow[d, "\tau", "\wr"'] \\ \mathbf{Z}^{\oplus k} \arrow[r, "\delta"] & \mathbf{Z}^{\oplus\ell} \end{tikzcd}$$

liefert einen $\mathbf{Z}$-linearen Isomorphismus $\operatorname{Cokern}\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{Cokern}\delta$.

Aufgabe 17, angewandt auf δ, liefert nun einen Isomorphismus $\operatorname{Cokern}\delta \simeq \bigoplus_{i\in[1,\ell]} \operatorname{Cokern}\delta_{i,i}$. Da $\operatorname{Cokern}\delta_{i,i} \simeq \mathbf{Z}/d_{i,i}$ für $i \in [1,\ell]$, ist $\operatorname{Cokern}\delta \simeq \bigoplus_{i\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/d_{i,i}$. Insgesamt ist also

$$M \;\simeq\; \operatorname{Cokern}\varphi \;\simeq\; \operatorname{Cokern}\delta \;\simeq\; \bigoplus_{i\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/d_{i,i}\,,$$

und letzterer $\mathbf{Z}$-Modul ist von der verlangten Form.

(2) Mit (1) bleibt ein endlicher $\mathbf{Z}$-Modul der Form $M = \bigoplus_{i\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/e_i$ zu betrachten, wobei $\ell \geqslant 0$ und $e_i \in \mathbf{Z}$ für $i \in [1,\ell]$. Ohne Einschränkung ist $e_i \geqslant 0$ für $i \in [1,\ell]$. Da M endlich ist, ist $e_i \neq 0$ für alle $i \in [1,\ell]$.

Ist $e_i = 1$ für gewisse $i \in [1,\ell]$, so können wir die zugehörigen Summanden weglassen, da $X \oplus 0 \oplus Y \simeq X \oplus Y$ für $\mathbf{Z}$-Moduln X und Y.

Also ist M isomorph zu einem $\mathbf{Z}$-Modul der verlangten Form.

---

[13] Man darf gemäß unseren Konventionen auch die Matrix S mit der Abbildung σ identifizieren, die Matrix F mit φ, die Matrix τ mit T und die Matrix D mit δ.

Aufgabe 19

(1) Das linke Viereck kommutiert. Die beiden vertikalen Abbildungen sind surjektiv. Nach Aufgabe 16.(2) genügt es für die behauptete Isomorphie auf den Cokernen zu zeigen, daß

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{Z}^{\oplus \ell} \xrightarrow{\mathrm{E}_\ell} \textstyle\bigoplus_{j\in[1,\ell]} \mathbf{Z}/n_j) \overset{!}{\subseteq} \mathrm{Im}(\mathbf{Z}^{\oplus(k+\ell)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} F \\ N \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}^{\oplus \ell})\,.$$

In der Tat ist der angeführte Kern gleich $\bigoplus_{j\in[1,\ell]} n_j\mathbf{Z}$, und also nach Definition von N im Bild enthalten.

(2) Jede $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung ist von der Form $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$. Hierbei ist $a \in \{0,2\}$, $b \in \{0,4\}$, $c \in \{0,1,2,3\}$ und $d \in \{0,1,2,\ldots,7\}$. Es gibt also $2\cdot 2\cdot 4\cdot 8 = 128$ solche $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen.

(3) Betrachte folgendes Diagramm; cf. (1).

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "f=\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr, "g:=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathrm{Cokern}\, f \\
\mathbf{Z}^{\oplus 4} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&1\\0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2&4\\2&2\\4&0\\0&8 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, shift left, "\wr"] & \mathbf{Z}^{\oplus 2} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&1 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\wr"', "\left(\begin{smallmatrix} 1&-1\\1&0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathrm{Cokern}\left(\begin{smallmatrix} 2&4\\2&2\\4&0\\0&8 \end{smallmatrix}\right) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbf{Z}^{\oplus 4} \arrow[u, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} 1&-1&0&0\\2&-3&0&0\\2&-4&1&0\\-4&4&0&1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2&0\\0&2\\0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}/2 \arrow[uu, bend right=60, "\alpha", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Da das rechte schiefwinklige Viereck nach Wahl von g kommutiert, und da $\mathbf{Z}^{\oplus 2} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$ surjektiv ist, ist auch $g\alpha = \rho$. Also ist (f,g) rechtsexakt.

Die Lösung ist nicht eindeutig; das gilt auch für $(4,5,6)$ unten.

(4) Betrachte folgendes Diagramm; cf. (1).

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "f=\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/8\oplus\mathbf{Z}/16 \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr, "g:=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathrm{Cokern}\, f \\
\mathbf{Z}^{\oplus 4} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&1\\0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2&4\\-1&2\\8&0\\0&16 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, shift left, "\wr"] & \mathbf{Z}^{\oplus 2} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&1 \end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\wr"', "\left(\begin{smallmatrix} 1&-6\\0&1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathrm{Cokern}\left(\begin{smallmatrix} 2&4\\-1&2\\8&0\\0&16 \end{smallmatrix}\right) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbf{Z}^{\oplus 4} \arrow[u, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} 1&1&0&0\\1&2&0&0\\-2&4&1&0\\-2&-4&0&1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&8\\0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/1\oplus\mathbf{Z}/8 \arrow[uu, bend right=60, "\alpha", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Da das rechte schiefwinklige Viereck nach Wahl von g kommutiert, und da $\mathbf{Z}^{\oplus 2} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$ surjektiv ist, ist auch $g\alpha = \rho$. Also ist (f,g) rechtsexakt.

Wenn man möchte, kann man noch den Summanden $\mathbf{Z}/1 \simeq 0$ unterschlagen und erhält die rechtsexakte Sequenz

$$\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/8\,.$$

(5) Betrachte folgendes Diagramm; cf. (1).

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "f = \left(\begin{smallmatrix} 2&2&4 \\ 2&2&2 \\ 2&2&4 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr, "g := \left(\begin{smallmatrix} 0&-1&1 \\ 1&0&-1 \\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right)"] & \operatorname{Cokern} f \\
\mathbf{Z}^{\oplus 6} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2&2&4 \\ 2&2&2 \\ 2&2&4 \\ 4&0&0 \\ 0&4&0 \\ 0&0&8 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, shift left, "\wr"] & \mathbf{Z}^{\oplus 3} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0&-1&1 \\ 1&0&-1 \\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right)", "\wr"'] & \operatorname{Cokern} \left(\begin{smallmatrix} 2&2&4 \\ 2&2&2 \\ 2&2&4 \\ 4&0&0 \\ 0&4&0 \\ 0&0&8 \end{smallmatrix}\right) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbf{Z}^{\oplus 6} \arrow[u, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} 1&-1&0&0&0&0 \\ 2&-3&0&0&0&0 \\ 4&-6&0&1&0&0 \\ -1&0&1&0&0&0 \\ 2&-4&0&1&1&0 \\ -4&4&0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&4 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}^{\oplus 3} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[uu, bend right, "\alpha", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Da das rechte schiefwinklige Viereck nach Wahl von g kommutiert, und da

$$\mathbf{Z}^{\oplus 3} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

surjektiv ist, ist auch $g\alpha = \rho$. Also ist (f, g) rechtsexakt.

(6) Betrachte folgendes Diagramm; cf. (1).

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "f = \left(\begin{smallmatrix} 2&2&2 \\ 2&2&2 \\ 2&2&2 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr, "g := \left(\begin{smallmatrix} -1&-2&1 \\ 1&1&-1 \\ 1&1&0 \end{smallmatrix}\right)"] & \operatorname{Cokern} f \\
\mathbf{Z}^{\oplus 6} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2&2&2 \\ 2&2&2 \\ 2&2&2 \\ 4&0&0 \\ 0&4&0 \\ 0&0&8 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, shift left, "\wr"] & \mathbf{Z}^{\oplus 3} \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} -1&-2&1 \\ 1&1&-1 \\ 1&1&0 \end{smallmatrix}\right)", "\wr"'] & \operatorname{Cokern} \left(\begin{smallmatrix} 2&2&2 \\ 2&2&2 \\ 2&2&2 \\ 4&0&0 \\ 0&4&0 \\ 0&0&8 \end{smallmatrix}\right) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbf{Z}^{\oplus 6} \arrow[u, shift left, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&-1&0 \\ 2&0&0&-1&-2&0 \\ -1&1&0&0&0&0 \\ -1&0&1&0&0&0 \\ -4&0&0&2&2&1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2&0&0 \\ 0&4&0 \\ 0&0&4 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}^{\oplus 3} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[uu, bend right, "\alpha", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Da das rechte schiefwinklige Viereck nach Wahl von g kommutiert, und da

$$\mathbf{Z}^{\oplus 3} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

surjektiv ist, ist auch $g\alpha = \rho$. Also ist (f, g) rechtsexakt.

Aufgabe 20

Wir haben das Tupel $(M_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod_{i\in I} M_i)$ aus R-linearen Abbildungen. Nach Voraussetzung gibt es eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{f} \coprod_{i\in I} M_i$ mit $\mu_i f = \iota_i$ für $i \in I$.

Gemäß universeller Eigenschaft des Coprodukts aus Bemerkung 38.(2) gibt es auch eine R-lineare Abbildung $\coprod_{i\in I} M_i \xrightarrow{g} M$ mit $\iota_i g = \mu_i$ für $i \in I$.

Es ist $\mu_i fg = \iota_i g = \mu_i = \mu_i \,\mathrm{id}_M$ für $i \in I$. Da es aber nach Voraussetzung für das Tupel $(M_i \xrightarrow{\mu_i} M)_{i\in I}$ genau eine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{a} M$ mit $\mu_i a = \mu_i$ für $i \in I$ gibt, folgt $fg = a = \mathrm{id}_M$. Also ist f injektiv.

Es ist $\iota_i gf = \mu_i f = \iota_i = \iota_i \,\mathrm{id}_{\coprod_{i\in I} M_i}$ für $i \in I$. Da es aber nach Bemerkung 38.(2) für das Tupel $(M_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod_{i\in I} M_i)_{i\in I}$ genau eine R-lineare Abbildung $\coprod_{i\in I} M_i \xrightarrow{b} \coprod_{i\in I} M_i$ mit $\iota_i b = \iota_i$ für $i \in I$ gibt, folgt $gf = b = \mathrm{id}_{\coprod_{i\in I} M_i}$. Also ist f surjektiv.

Aufgabe 21

Ist $z \in R$ invertierbar, so schreiben wir $\kappa_z : R \longrightarrow R,\ r \longmapsto z^{-1}rz$ für die *Konjugation* mit z.

Sei zum einen ${}_{\mathrm{id}}R_{\mathrm{id}} \xrightarrow[\sim]{f} {}_{\alpha}R_{\beta}$. Es ist auch f^{-1} ein Isomorphismus. Sei $x := 1f$. Sei $y := 1f^{-1}$. Es wird

$$1 \;=\; 1f^{-1}f \;=\; yf \;\overset{1.}{=}\; (y\cdot 1)f \;=\; y\cdot(1f) \;=\; (y\alpha)x \;\overset{2.}{=}\; (1 * y)f \;=\; (1f) * y \;=\; x(y\beta)\ .$$

Es ist $y\alpha = (y\alpha)x(y\beta) = y\beta$. Also ist x invertierbar, $x^{-1} = y\alpha = y\beta$.

Für $s \in R$ wird

$$\begin{aligned} sf \;&\overset{1.}{=}\; (s\cdot 1)f \;=\; s\cdot(1f) \;=\; (s\alpha)x \\ &\overset{2.}{=}\; (1 * s)f \;=\; (1f) * s \;=\; x(s\beta)\ . \end{aligned}$$

Es folgt $x^{-1}(s\alpha)x = s\beta$, also $\alpha\kappa_x = \beta$, mithin $\kappa_x = \alpha^{-1}\beta$.

Sei zum anderen ein invertierbares $x \in R$ mit $\kappa_x = \alpha^{-1}\beta$ gegeben. Beachte, daß $x(s\beta) = (s\alpha)x$ für $s \in R$. Setze

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathrm{id}}R_{\mathrm{id}} & \xrightarrow{g} & {}_{\alpha}R_{\beta} \\ r & \longmapsto & (r\alpha)x\ . \end{array}$$

Es ist g eine R-R-lineare Abbildung, da sie mit der Addition verträglich ist und sich für $s,\, t \in R$

$$(s\cdot r * t)g \;=\; (srt)g \;=\; ((srt)\alpha)x \;=\; (s\alpha)(r\alpha)(t\alpha)x \;=\; (s\alpha)(r\alpha)x(t\beta) \;=\; s\cdot(rg) * t$$

ergibt. Es ist g injektiv, da $(r\alpha)x = 0$ impliziert, daß $r = ((r\alpha)xx^{-1})\alpha^{-1} = (0x^{-1})\alpha^{-1} = 0$, wobei $r \in R$. Es ist g surjektiv, da sich für $s \in R$ auch $\big((sx^{-1})\alpha^{-1}\big)\alpha x = (sx^{-1})x = s$ ergibt.

Ergebnis. Es sind ${}_{\alpha}R_{\beta}$ und ${}_{\mathrm{id}}R_{\mathrm{id}}$ isomorph genau dann, wenn es ein invertierbares Element $x \in R$ gibt mit $\kappa_x = \alpha^{-1}\beta$.

Aufgabe 22

Schreiben wir im folgenden eine Multiplikation ohne Multiplikationszeichen, so ist die Multiplikation in R gemeint.

(1) Sei $\varepsilon := \beta\alpha^{-1}\gamma$. Sei $\vartheta := \delta$. Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_R(\,{}_{\alpha}R_{\beta}\,,\ {}_{\gamma}R_{\delta}) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}R_{\vartheta} \\ f & \longmapsto & 1f \end{array}$$

ein Isomorphismus von R-R-Bimoduln ist.

Zeigen wir die R-R-Linearität der Abbildung. Die Verträglichkeit mit der Addition ist ersichtlich. Seien $s,\ t\ \in\ R$. Sei $f \in \mathrm{Hom}_R({}_\alpha R_\beta\,,\ {}_\gamma R_\delta)$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} s\cdot f * t & \longmapsto & 1(s\cdot f * t) \\ & = & ((1*s)f)*t \\ & = & ((s\beta)f)(t\delta) \\ & = & ((s\beta\alpha^{-1}\cdot 1)f)(t\delta) \\ & = & (s\beta\alpha^{-1})\cdot(1f)(t\delta) \\ & = & (s\beta\alpha^{-1}\gamma)(1f)(t\delta) \\ & = & (s\varepsilon)(1f)(t\vartheta)\ . \end{array}$$

Die Abbildung ist injektiv, da aus $1f = 0$ auch folgt, daß $rf = ((r\alpha^{-1})\cdot 1)f = (r\alpha^{-1})\cdot(1f) = (r\alpha^{-1}\gamma)(1f) = 0$.

Zeigen wir, daß die Abbildung surjektiv ist. Sei $x\ \in\ {}_\varepsilon R_\vartheta$ vorgegeben. Es ist ${}_\alpha R_\beta \longrightarrow {}_\gamma R_\delta\,$, $r \longmapsto (r\alpha^{-1}\gamma)x$ eine R-lineare Abbildung, da sich für $s \in R$

$$s\cdot r \longmapsto ((s\cdot r)\alpha^{-1}\gamma)x\ =\ (((s\alpha)r)\alpha^{-1}\gamma)x\ =\ (s\gamma)(r\alpha^{-1}\gamma)x\ =\ s\cdot((r\alpha^{-1}\gamma)x)$$

ergibt. Ferner wird $(r \longmapsto (r\alpha^{-1}\gamma)x) \longmapsto (1\alpha^{-1}\gamma)x = x$ abgebildet.

(2) Sei $\varepsilon := \alpha\beta^{-1}$. Sei $\vartheta := \delta\gamma^{-1}$. Wir behaupten, daß

$$\begin{array}{ccccc} {}_\alpha R_\beta & \underset{R}{\otimes} & {}_\gamma R_\delta & \longrightarrow & {}_\varepsilon R_\vartheta \\ s & \otimes & t & \longmapsto & (s\beta^{-1})(t\gamma^{-1}) \\ x\beta & \otimes & 1 & \longleftarrow\!\shortmid & x \end{array}$$

ein Isomorphismus von R-R-Bimoduln ist.

Zeigen wir die Existenz und $\mathbf{Z}$-Linearität der Abbildung $\longmapsto$. Es ist zu zeigen, daß

$$\begin{array}{ccccc} {}_\alpha R_\beta & \times & {}_\gamma R_\delta & \longrightarrow & {}_\varepsilon R_\vartheta \\ (s & , & t) & \longmapsto & (s\beta^{-1})(s\gamma^{-1}) \end{array}$$

eine R-bilineare Abbildung ist. Die Verträglichkeit mit der Addition in beiden Einträgen ist ersichtlich. Sei ferner ein $r \in R$ gegeben. Es wird

$$\begin{array}{rcl} ((s*r)\beta^{-1})(t\gamma^{-1}) & = & \big((s(r\beta))\beta^{-1}\big)(t\gamma^{-1}) \\ & = & (s\beta^{-1})r(t\gamma^{-1}) \\ & = & (s\beta^{-1})\big(((r\gamma)t)\gamma^{-1}\big) \\ & = & (s\beta^{-1})((r\cdot t)\gamma^{-1})\ . \end{array}$$

Zeigen wir die R-R-Linearität der Abbildung $\longmapsto$. Die Verträglichkeit mit der Addition ist ersichtlich. Seien $a,\ b\ \in\ R$. Sei $\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i \in\ {}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} a\cdot(\sum_{i\in I} s_i\otimes t_i)*b & = & \sum_{i\in I}((a\alpha)s_i)\otimes(t_i(b\delta)) \\ & \longmapsto & \sum_{i\in I}\big(((a\alpha)s_i)\beta^{-1}\big)\big((t_i(b\delta))\gamma^{-1}\big) \\ & = & (a\alpha\beta^{-1})\big(\sum_{i\in I}(s_i\beta^{-1})(t_i\gamma^{-1})\big)(b\delta\gamma^{-1}) \\ & = & (a\varepsilon)\big(\sum_{i\in I}(s_i\beta^{-1})(t_i\gamma^{-1})\big)(b\vartheta) \\ & = & a\cdot\big(\sum_{i\in I}(s_i\beta^{-1})(t_i\gamma^{-1})\big)*b\ . \end{array}$$

Es hätte auch genügt, die R-R-Linearität auf Elementartensoren nachzuweisen. Warum?

Die beiden angegebenen Abbildungen invertieren sich gegenseitig, da zum einen

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i & \longmapsto & \sum_{i\in I} (s_i\beta^{-1})(t_i\gamma^{-1}) \\
 & \longmapsto & \sum_{i\in I} \big((s_i\beta^{-1})(t_i\gamma^{-1})\big)\beta \otimes 1 \\
 & = & \sum_{i\in I} s_i(t_i\gamma^{-1}\beta) \otimes 1 \\
 & = & \sum_{i\in I} s_i \cdot (t_i\gamma^{-1}) \otimes 1 \\
 & = & \sum_{i\in I} s_i \otimes (t_i\gamma^{-1}) \cdot 1 \\
 & = & \sum_{i\in I} s_i \otimes t_i
\end{array}$$

und zum anderen

$$\begin{array}{rcl}
x & \longmapsto & x\beta \otimes 1 \\
 & \longmapsto & (x\beta\beta^{-1})(1\gamma^{-1}) \\
 & = & x\ .
\end{array}$$

Auch hier hätte es genügt, die erstere Rechnung für Elementartensoren durchzuführen.

Insbesondere sind beide angegebenen Abbildungen bijektiv.

Dies kann man verwenden, um direkt mit Definition 95 aus §2.4 zu zeigen, daß

$${}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} - \ :\ R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

eine Äquivalenz ist.

Aufgabe 23

(1) Cf. Bemerkung 50.(2). Wir haben schon gesehen, daß $s \cdot f * t$ für $s \in S$, $f \in {}_R(M,N)$ und $t \in T$ in der Tat eine R-lineare Abbildung ist. Ferner ist $({}_R(M,N),+)$ mit loc. cit. (1) eine abelsche Gruppe.

(LMod 2) Seien $s,\ s' \in S$ und $f \in {}_R(M,N)$. Sei $m \in M$. Es ist

$$m(s\cdot(s'\cdot f)) \ = \ (m*s)(s'\cdot f) \ = \ ((m*s)*s')f \ = \ (m*(ss'))f \ = \ m((ss')\cdot f)\ .$$

Folglich ist $s\cdot(s'\cdot f) = (ss')\cdot f$.

(LMod 3) Sei $f \in {}_R(M,N)$. Sei $m \in M$. Es ist

$$m(1\cdot f) = (m*1)f \ = \ mf\ .$$

Folglich ist $1\cdot f = f$.

(LMod 4) Seien $s,\ s' \in S$ und $f,\ f' \in {}_R(M,N)$. Sei $m \in M$. Es ist

$$\begin{array}{rcl}
m((s+s')\cdot f) & = & (m*(s+s'))f \\
 & = & (m*s+m*s')f \\
 & = & (m*s)f+(m*s')f \\
 & = & m(s\cdot f)+m(s'\cdot f) \\
 & = & m(s\cdot f+s'\cdot f)\ .
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl}
m(s\cdot(f+f')) & = & (m*s)(f+f') \\
 & = & (m*s)f+(m*s)f' \\
 & = & m(s\cdot f)+m(s\cdot f') \\
 & = & m(s\cdot f+s\cdot f')\ .
\end{array}$$

Folglich ist $(s+s')\cdot f = s\cdot f+s'\cdot f$ und $(s+s')\cdot f = s\cdot f+s\cdot f'$.

(RMod 2) Seien $f \in {}_R(M,N)$ und $t,\, t' \in T$. Sei $m \in M$. Es ist

$$m((f*t)*t') \;=\; (m(f*t))*t' \;=\; ((mf)*t)*t' \;=\; (mf)*(tt') \;=\; m(f*(tt'))\;,$$

und also $(f*t)*t' = f*(tt')$.

(RMod 3) Sei $f \in {}_R(M,N)$. Sei $m \in M$. Es ist

$$m(f*1) \;=\; (mf)*1 \;=\; mf\;.$$

Folglich ist $f*1 = f$.

(RMod 4) Seien $f,\, f' \in {}_R(M,N)$ und $t,\, t' \in T$. Sei $m \in M$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} m((f+f')*t) & = & (m(f+f'))*t \\ & = & (mf+mf')*t \\ & = & (mf)*t+(mf')*t \\ & = & m(f*t)+m(f'*t) \\ & = & m(f*t+f'*t)\;. \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} m(f*(t+t')) & = & (mf)*(t+t') \\ & = & (mf)*t+(mf)*t' \\ & = & m(f*t)+m(f*t') \\ & = & m(f*t+f*t')\;. \end{array}$$

Folglich ist $(f+f')*t = f*t+f'*t$ und $f*(t+t') = f*t+f*t'$.

(BiMod 3) Dies wurde in der Konstruktion schon vorweggenommen. Prüfen wir es dennoch nach. Sei $s \in S$, $f \in {}_R(M,N)$ und $t \in T$. Sei $m \in M$. Es ist

$$m((s\cdot f)*t) \;=\; (m(s\cdot f))*t \;=\; ((m*s)f)*t \;=\; (m*s)(f*t) \;=\; m(s\cdot(f*t))\;.$$

Folglich ist in der Tat $(s\cdot f)*t = s\cdot f*t = s\cdot(f*t)$.

(2) Cf. Bemerkung 58.(1). Für gegebene $s \in S$ und $t \in T$ verwenden wir die dort konstruierte **Z**-lineare Abbildung $\lambda_{s,t} : M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N,\; m\otimes n \longmapsto s\cdot m\otimes n*t$, insbesondere setzen wir $s\cdot\xi := \xi\lambda_{s,1}$ und $\xi*t := \xi\lambda_{1,t}$ für $\xi \in M \underset{R}{\otimes} N$.

(LMod 2) Seien $s,\, s' \in S$, $m \in M$ und $n \in N$. Es ist

$$s\cdot(s'\cdot(m\otimes n)) \;=\; s\cdot((s'\cdot m)\otimes n) \;=\; (s\cdot(s'\cdot m))\otimes n \;=\; ((ss')\cdot m)\otimes n \;=\; (ss')\cdot(m\otimes n)\;.$$

Da $\lambda_{s',1}\lambda_{s,1}$ und $\lambda_{ss',1}$ beide **Z**-linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf **Z**-linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$s\cdot(s'\cdot\xi) \;=\; (ss')\cdot\xi$$

für $\xi \in M \underset{R}{\otimes} N$.

(LMod 3) Seien $m \in M$ und $n \in N$. Es ist

$$1\cdot(m\otimes n) \;=\; (1\cdot m)\otimes n \;=\; m\otimes n\;.$$

Da $\lambda_{1,1}$ und $\mathrm{id}_{M\underset{R}{\otimes}N}$ beide **Z**-linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf **Z**-linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$1\cdot\xi \;=\; \xi$$

für $\xi \in M \underset{R}{\otimes} N$.

(LMod 4) Seien s, $s' \in S$, $m \in M$ und $n \in N$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (s+s')\cdot(m\otimes n) & = & ((s+s')\cdot m)\otimes n \\ & = & (s\cdot m + s'\cdot m)\otimes n \\ & = & (s\cdot m)\otimes n + (s'\cdot m)\otimes n \\ & = & s\cdot(m\otimes n) + s'\cdot(m\otimes n) \end{array}$$

Da $\lambda_{s+s',1}$ und $\lambda_{s,1} + \lambda_{s',1}$ beide **Z**-linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf **Z**-linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$(s+s')\cdot\xi \;=\; s\cdot\xi + s'\cdot\xi$$

für $\xi \in M \underset{R}{\otimes} N$.

Für ξ, $\xi' \in M \underset{R}{\otimes} N$ folgt unter Verwendung der **Z**-Linearität von $\lambda_{s,1}$, daß

$$s\cdot(\xi+\xi') \;=\; s\cdot\xi + s\cdot\xi' \,.$$

Die Rechtsmoduleigenschaften gelten nun dank Symmetrie. Zeigen wir noch das verbleibende R-S-Bimodulaxiom.

(BiMod 3) Seien $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$ und $t \in T$. Es wird

$$(s\cdot(m\otimes n))*t \;=\; ((s\cdot m)\otimes n)*t \;=\; (s\cdot m)\otimes(n*t) \;=\; s\cdot(m\otimes(n*t)) \;=\; s\cdot((m\otimes n)*t)\,.$$

Da $\lambda_{s,1}\lambda_{1,t}$, $\lambda_{s,t}$ und $\lambda_{1,t}\lambda_{s,1}$ alle drei **Z**-linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf **Z**-linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt

$$(s\cdot\xi)*t \;=\; \xi\lambda_{s,t} \;=\; s\cdot(\xi*t)$$

für $\xi \in M \underset{R}{\otimes} N$.

Aufgabe 24

Sei $x \in X$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} Y & \times & Z & \xrightarrow{\psi_x'''} & (X & \underset{S}{\otimes} & Y) & \underset{T}{\otimes} & Z \\ (y & , & z) & \longmapsto & (x & \otimes & y) & \otimes & z \end{array}$$

ist T-bilinear, was eine **Z**-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} Y & \underset{T}{\otimes} & Z & \xrightarrow{\psi_x''} & (X & \underset{S}{\otimes} & Y) & \underset{T}{\otimes} & Z \\ y & \otimes & z & \longmapsto & (x & \otimes & y) & \otimes & z \end{array}$$

liefert. Insgesamt erhalten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} X & \times & (Y \underset{T}{\otimes} Z) & \xrightarrow{\psi'} & (X \underset{S}{\otimes} Y) \underset{T}{\otimes} Z \\ (x & , & \eta) & \longmapsto & \eta\psi_x'' \end{array}$$

Explizit ist für I eine endliche Menge und $y_i \in Y$ und $z_i \in Z$ für $i \in I$

$$(x\,,\,\textstyle\sum_{i\in I} y_i\otimes z_i)\psi' \;=\; (\sum_{i\in I} y_i\otimes z_i)\psi_x'' \;=\; \sum_{i\in I}((y_i\otimes z_i)\psi_x'') \;=\; \sum_{i\in I}(x\otimes y_i)\otimes z_i\,.$$

Daran erkennt man auch, daß ψ' eine S-bilineare Abbildung ist. Dies liefert die **Z**-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} X & \underset{S}{\otimes} & (Y \underset{T}{\otimes} Z) & \xrightarrow{\psi} & (X \underset{S}{\otimes} Y) \underset{T}{\otimes} Z \\ x & \otimes & \eta & \longmapsto & \eta\psi_x'' \end{array}$$

Explizit ist für I und J endliche Mengen und $x_j \in X$, $y_{i,j} \in Y$ und $z_{i,j} \in Z$ für $i \in I$ und $j \in J$

$$\begin{array}{rcl} (\sum_{j\in J} x_j \otimes (\sum_{i\in I} y_{i,j} \otimes z_{i,j}))\psi & = & \sum_{j\in J} \big((x_j \otimes (\sum_{i\in I} y_{i,j} \otimes z_{i,j}))\psi\big) \\ & = & \sum_{j\in J}(\sum_{i\in I}(x_j \otimes y_{i,j}) \otimes z_{i,j}) \\ & = & \sum_{i\in I,\, j\in J}(x_j \otimes y_{i,j}) \otimes z_{i,j}\ . \end{array}$$

Daran erkennt man auch, daß ψ eine R-U-lineare Abbildung ist. Wie verlangt, ist insbesondere $(x \otimes (y \otimes z))\psi = (x \otimes y) \otimes z$.

Dank der Symmetrie der Situation gibt es auch eine Abbildung $X \underset{S}{\otimes} (Y \underset{T}{\otimes} Z) \xleftarrow{\vartheta} (X \underset{S}{\otimes} Y) \underset{T}{\otimes} Z$, für welche unter anderem $((x \otimes y) \otimes z)\vartheta = x \otimes (y \otimes z)$ für $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$ ist. Insbesondere ist $((x \otimes y) \otimes z)\vartheta\psi = (x \otimes y) \otimes z$. Da $\vartheta\psi$ und id auf $\mathbf{Z}$-linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt $\vartheta\psi = \mathrm{id}$. Genauso folgt $\psi\vartheta = \mathrm{id}$. Also ist ϑ bijektiv. Insgesamt ist ψ ein Isomorphismus von R-U-Bimoduln.

Man unterschlägt das obige Hantieren mit endlichen Summen an diversen Stellen auch gerne und spricht ersatzweise davon, daß sich die jeweiligen Sachverhalte "additiv fortsetzen".

Aufgabe 25

(2) Die Aussage ist richtig. Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ eine Basis von V, sei $(e_1^*, \ldots, e_m^*)$ die dazu duale Basis von V^*. Sei $(f_1, \ldots, f_n)$ eine Basis von W, sei $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ die dazu duale Basis von W^*. Für $i \in [1, m]$ und $j \in [1, n]$ definieren wir die K-lineare Abbildung

$$(V \underset{K}{\otimes} W \xrightarrow{\varphi_{i,j}} K) \;:=\; (V \underset{K}{\otimes} W \xrightarrow{e_i^* \otimes f_j^*} K \underset{K}{\otimes} K \xrightarrow{\sim} K)\ ,$$

so daß $(v \otimes w)\varphi_{i,j} = (ve_i^*)(wf_j^*)$ für $v \in V$ und $w \in W$, cf. Bemerkung 58.(2).

Definiere die K-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} V \underset{K}{\otimes} W & \xrightarrow{\varphi} & K^{m\times n} \\ \xi & \longmapsto & (\xi\varphi_{i,j})_{i,j} \end{array}$$

und die K-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} V \underset{K}{\otimes} W & \xleftarrow{\psi} & K^{m\times n} \\ \sum_{i,j} a_{i,j} e_i \otimes f_j & \longleftarrow\!\!\! | & (a_{i,j})_{i,j} \end{array}$$

Es ist $V \underset{K}{\otimes} W = {}_K\langle\{e_i \otimes f_j \;:\; i \in [1, m],\ j \in [1, n]\}\rangle$, da jeder Elementartensor in diesem Erzeugnis liegt. Um $\varphi\psi = \mathrm{id}$ zu zeigen, genügt es also, dies auf $e_k \otimes f_\ell$ für $k \in [1, m]$ und $\ell \in [1, n]$ nachzurechnen. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} (e_k \otimes f_\ell)\varphi\psi & = & ((e_k \otimes f_\ell)\varphi_{i,j})_{i,j}\psi \\ & = & ((e_k e_i^*)(f_\ell f_j^*))_{i,j}\psi \\ & = & (\partial_{k,i}\partial_{\ell,j})_{i,j}\psi \\ & = & \sum_{i,j} \partial_{k,i}\partial_{\ell,j} e_i \otimes f_j \\ & = & e_k \otimes f_\ell\ . \end{array}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{array}{rcl} (a_{i,j})_{i,j}\psi\varphi & = & (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} e_k \otimes f_\ell)\varphi \\ & = & ((\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} e_k \otimes f_\ell)\varphi_{i,j})_{i,j} \\ & = & (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell}(e_k \otimes f_\ell)\varphi_{i,j})_{i,j} \\ & = & (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell}(e_k e_i^*)(f_\ell f_j^*))_{i,j} \\ & = & (\sum_{k,\ell} a_{k,\ell}\partial_{k,i}\partial_{\ell,j})_{i,j} \\ & = & (a_{i,j})_{i,j}\ , \end{array}$$

und somit auch $\psi\varphi = \mathrm{id}$.
Es folgt $\dim_K(V \underset{K}{\otimes} W) \simeq \dim_K K^{m\times n} = m \cdot n = (\dim_K V)(\dim_K W)$.

Insbesondere ist $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ eine Basis von $V \underset{K}{\otimes} W$, als Bild einer Basis von $K^{m\times n}$ unter einem K-linearen Isomorphismus.

Man könnte zur Lösung von Aufgabe 25.(2) auch Aufgabe 27.(3) heranziehen und

$$V \underset{K}{\otimes} W \;=\; (\textstyle\bigoplus_i Ke_i) \underset{K}{\otimes} (\bigoplus_j Ke_i) \;\simeq\; \bigoplus_{i,j} (Ke_i) \underset{K}{\otimes} (Ke_j) \;\simeq\; \bigoplus_{i,j} K \underset{K}{\otimes} K \;\simeq\; \bigoplus_{i,j} K$$

folgern.

(1) Die Aussage ist falsch. Sei hierzu K ein endlicher Körper mit q Elementen, sei $\dim_K V = 2$ und $\dim_K W = 3$. Es ist $|V \times W| = q^2 \cdot q^3 < q^{2\cdot 3} = |V \underset{K}{\otimes} W|$; cf. (2).

Es ist τ übrigens im allgemeinen auch nicht injektiv, da für $v \neq 0$ zwar $(v, 0) \neq (0, 0)$, aber $v \otimes 0 = 0 = 0 \otimes 0$.

Aufgabe 26

(1) Es ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}^{2\times 1} \times \mathbf{Q}^{1\times 3} & \stackrel{\hat{\varphi}}{\longrightarrow} & \mathbf{Q}^{2\times 3} \\ \left(\binom{a_1}{a_2}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \binom{a_1}{a_2} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathbf{Q}$-bilinear und liefert also die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{Q}^{1\times 3} & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & \mathbf{Q}^{2\times 3} \\ \binom{a_1}{a_2} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \binom{a_1}{a_2} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wir überprüfen die $\mathbf{Q}^{2\times 2}$-$\mathbf{Q}^{3\times 3}$-Linearität. Sei $A \in \mathbf{Q}^{2\times 2}$ und $B \in \mathbf{Q}^{3\times 3}$. Sei $a \in \mathbf{Q}^{2\times 1}$. Sei $b \in \mathbf{Q}^{1\times 3}$. Auf Elementartensoren wird

$$\begin{array}{rcl} (A \cdot (a \otimes b) * B)\varphi & = & (Aa \otimes bB)\varphi \\ & = & AabB \\ & = & A \cdot ab * B \\ & = & A \cdot (a, b)\varphi * B\,. \end{array}$$

Seien $e_1 := \binom{1}{0}$, $e_2 := \binom{0}{1}$ in $\mathbf{Q}^{2\times 1}$.
Seien $f_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{Q}^{1\times 3}$.
Wir haben die $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}^{2\times 3} & \stackrel{\psi}{\longrightarrow} & \mathbf{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{Q}^{1\times 3} \\ \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{pmatrix} & \mapsto & \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i \otimes f_j\,. \end{array}$$

Stets wird

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{pmatrix} \psi\varphi \;=\; \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j}(e_i \otimes f_j)\varphi \;=\; \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i f_j \;=\; \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{pmatrix}\,.$$

Stets wird

$$\Big(\sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i \otimes f_j\Big)\varphi\psi \;=\; \Big(\sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i f_j\Big)\psi \;=\; \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{pmatrix} \psi \;=\; \sum_{i\in[1,2]} \sum_{j\in[1,3]} c_{i,j} e_i \otimes f_j\,.$$

Folglich ist φ bijektiv. Damit ist es ein Isomorphismus von $\mathbf{Q}^{2\times 2}$-$\mathbf{Q}^{3\times 3}$-Moduln.
Jeder Elementartensor wird unter φ auf eine Matrix von Rang $\leqslant 1$ abgebildet. Es ist

$$(e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2)\varphi \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$$

von Rang 2. Also ist z.B. $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$ kein Elementartensor (sondern Summe aus 2 Elementartensoren).

(2) Sei $x \in \mathbf{Z}/m \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z}/n$. Wir können

$$x \;=\; \sum_{i\in I} (z_i + m\mathbf{Z}) \otimes (w_i + n\mathbf{Z})$$

schreiben, wobei I eine endliche Menge ist und wobei $z_i,\, w_i \in \mathbf{Z}$ für $i \in I$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_{i\in I}(z_i + m\mathbf{Z}) \otimes (w_i + n\mathbf{Z}) \\ & = & \sum_{i\in I}(z_i + m\mathbf{Z}) \otimes w_i \cdot (1 + n\mathbf{Z}) \\ & = & \sum_{i\in I}(z_i + m\mathbf{Z}) * w_i \otimes (1 + n\mathbf{Z}) \\ & = & \sum_{i\in I}(z_i w_i + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z}) \\ & = & (\sum_{i\in I} z_i w_i + m\mathbf{Z}) \otimes (1 + n\mathbf{Z})\ , \end{array}$$

und dies ist ein Elementartensor.

Aufgabe 27

(1) Die angegebene Abbildung ist T-S-linear; cf. Bemerkung 51.(1). Zeigen wir, daß sie bijektiv ist. Sei $(g_i)_i \in \prod_i \mathrm{Hom}_R(X, M_i)$ gegeben. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes gibt es nun genau eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{g} \prod_i M_i$ mit $g\pi_i = g_i$ für alle $i \in I$; cf. Bemerkung 38.(1).

(2) Die angegebene Abbildung ist S-T-linear; cf. Bemerkung 51.(1). Zeigen wir, daß sie bijektiv ist. Sei $(g_i)_i \in \prod_i \mathrm{Hom}_R(M_i\,, X)$ gegeben. Nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes gibt es nun genau eine R-lineare Abbildung $\coprod_i M_i \xrightarrow{g} X$ mit $\iota_i g = g_i$ für alle $i \in I$; cf. Bemerkung 38.(2).

(3) Die angegebene Abbildung existiert, wie die R-bilineare Abbildung von $Y \times (\coprod_i M_i)$ nach $\coprod_i (Y \underset{R}{\otimes} M_i)$, die $(y, (m_i)_i) \longmapsto (y \otimes m_i)_i$ schickt, zeigt. Sie ist T-S-linear. Nennen wir sie ϑ.

Konstruieren wir eine Umkehrabbildung. Zur Familie der T-S-linearen Abbildungen $\big(Y \underset{R}{\otimes} M_i \xrightarrow{Y\otimes\iota_i} Y \underset{R}{\otimes} (\coprod_i M_i)\big)_i$ gibt es nach der universellen Eigenschaft des Coproduktes genau eine T-S-lineare Abbildung $\coprod_i (Y \underset{R}{\otimes} M_i) \xrightarrow{\varphi} Y \underset{R}{\otimes} (\coprod_i M_i)$ mit $\iota_i\varphi = Y \otimes \iota_i$ für $i \in I$ (zwei verschiedene ι_i); cf. Bemerkung 38.(2).

Zeigen wir $\vartheta\varphi \overset{!}{=} \mathrm{id}$. Es genügt, dies auf Elementartensoren zu überprüfen. Für $y \in Y$ und $(m_i)_i \in \coprod_i M_i$ wird

$$\begin{array}{rcl} (y \otimes (m_i)_i)\vartheta\varphi & = & (y \otimes m_i)_i\, \varphi \\ & = & \sum_i (y \otimes m_i)\iota_i\varphi \\ & = & \sum_i (y \otimes m_i)(Y \otimes \iota_i) \\ & = & \sum_i (y \otimes m_i\iota_i) \\ & = & y \otimes (\sum_i m_i\iota_i) \\ & = & (y \otimes (m_i)_i)\,\mathrm{id}\ . \end{array}$$

Zeigen wir $\varphi\vartheta \overset{!}{=} \mathrm{id}$. Dank der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft des Coproduktes genügt es, $\iota_i\varphi\vartheta \overset{!}{=} \iota_i\,\mathrm{id}$ für alle $i \in I$ zu zeigen. Diese Gleichheit wiederum genügt es, auf Elementartensoren zu überprüfen. Für $y \in Y$ und $m_i \in M_i$ wird

$$(y \otimes m_i)\iota_i\varphi\vartheta \;=\; (y \otimes m_i)(Y \otimes \iota_i)\vartheta \;=\; (y \otimes (m_i\iota_i))\vartheta \;=\; (y \otimes m_i)\iota_i\,\mathrm{id}\ .$$

Insgesamt haben wir ϑ als Isomorphismus nachgewiesen.

Sei ${}_S Z_T$ gegeben. Wie in (3) sieht man auch den R-T-linearen Isomorphismus

$$(\textstyle\coprod_i M_i) \underset{S}{\otimes} Z \xrightarrow{\sim} \coprod_i (M_i \underset{S}{\otimes} Z)\,, \quad (m_i)_i \otimes z \longmapsto (m_i \otimes z)_i\,.$$

Aufgabe 28

(1) Zunächst wollen wir auf der abelschen Gruppe $A \underset{R}{\otimes} B$ eine Multiplikation definieren.

Seien $a' \in A$ und $b' \in B$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} A \times B & \xrightarrow{\mu''''_{a',b'}} & A \underset{R}{\otimes} B \\ (a\;,\;b) & \longmapsto & aa' \otimes bb' \end{array}$$

ist R-bilinear; insbesondere ist $(ar)a' \otimes bb' = (aa')r \otimes bb' = aa' \otimes r(bb') = aa' \otimes (rb)b'$ für $r \in R$, $a \in A$ und $b \in B$. Also gibt es die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \underset{R}{\otimes} B & \xrightarrow{\mu'''_{a',b'}} & A \underset{R}{\otimes} B \\ a \otimes b & \longmapsto & aa' \otimes bb' \end{array}$$

Sei $\xi \in A \underset{R}{\otimes} B$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\mu''_\xi} & A \underset{R}{\otimes} B \\ (a'\;,\;b') & \longmapsto & \xi\mu'''_{a',b'} \end{array}$$

ist R-bilinear, wie wir nun zeigen wollen.

Seien a', $\tilde{a}' \in A$ und b', $\tilde{b}' \in B$ gegeben. Es wird für $a \in A$ und $b \in B$

$$\begin{array}{rcl} (a \otimes b)\mu'''_{a'+\tilde{a}',\,b'+\tilde{b}'} & = & a(a'+\tilde{a}') \otimes b(b'+\tilde{b}') \\ & = & aa' \otimes bb' + aa' \otimes b\tilde{b}' + a\tilde{a}' \otimes bb' + a\tilde{a}' \otimes b\tilde{b}' \\ & = & (a \otimes b)(\mu'''_{a',b'} + \mu'''_{a',\tilde{b}'} + \mu'''_{\tilde{a}',b'} + \mu'''_{\tilde{a}',\tilde{b}'})\,. \end{array}$$

Da $\mu'''_{a'+\tilde{a}',\,b'+\tilde{b}'}$ und $\mu'''_{a',b'} + \mu'''_{a',\tilde{b}'} + \mu'''_{\tilde{a}',b'} + \mu'''_{\tilde{a}',\tilde{b}'}$ beide $\mathbf{Z}$-linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf $\mathbf{Z}$-linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt $\xi\mu'''_{a'+\tilde{a}',\,b'+\tilde{b}'} = \xi\mu'''_{a',b'} + \xi\mu'''_{a',\tilde{b}'} + \xi\mu'''_{\tilde{a}',b'} + \xi\mu'''_{\tilde{a}',\tilde{b}'}$.

Seien $a' \in A$, $r \in R$ und $b' \in B$ gegeben. Es wird für $a \in A$ und $b \in B$

$$(a \otimes b)\mu'''_{a'r,b'} = a(a'r) \otimes bb' = (aa')r \otimes bb' = aa' \otimes r(bb') = aa' \otimes b(rb') = (a \otimes b)\mu'''_{a',rb'}\,.$$

Da $\mu'''_{a'r,b'}$ und $\mu'''_{a',rb'}$ beide $\mathbf{Z}$-linear sind, und da wir eben gesehen haben, daß sie auf $\mathbf{Z}$-linearen Erzeugern übereinstimmen, folgt $\xi\mu'''_{a'r,b'} = \xi\mu'''_{a',rb'}$.

Also ist $A \times B \longrightarrow A \underset{R}{\otimes} B$, $(a', b') \overset{\mu''_\xi}{\longmapsto} \xi\mu'''_{a',b'}$ in der Tat R-bilinear. Wir erhalten die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \underset{R}{\otimes} B & \xrightarrow{\mu'_\xi} & A \underset{R}{\otimes} B \\ a' \otimes b' & \longmapsto & (a' \otimes b')\mu'_\xi := \xi\mu'''_{a',b'} \end{array}$$

Insgesamt haben wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A \underset{R}{\otimes} B \times A \underset{R}{\otimes} B & \xrightarrow{\mu} & A \underset{R}{\otimes} B \\ (\xi\;,\;\eta) & \longmapsto & \eta\mu'_\xi =: (\xi, \eta)\mu =: \xi \cdot \mu \end{array}$$

konstruiert. Insbesondere wird für $a,\ a' \in A$ und $b,\ b' \in B$

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') \;=\; (a' \otimes b')\mu'_{a \otimes b} \;=\; (a \otimes b)\mu'''_{a',b'} \;=\; aa' \otimes bb' \; .$$

Prüfen wir nach, daß $(A \underset{R}{\otimes} B, +, \cdot)$ ein Ring ist. Beachte, daß

$$A \underset{R}{\otimes} B \;=\; \{\textstyle\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i \;:\; I \text{ endliche Menge, } a_i \in A,\, b_i \in B\} \; .$$

Halten wir zunächst fest, daß für I und J endliche Mengen, $a_i,\ a'_j \in A$ und $b_i,\ b'_j \in B$ für $i \in I$, $j \in J$ sich

$$\begin{array}{rcl} (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) & = & (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j)\mu'_{\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i} \\ & = & \sum_{j \in J} \big((a'_j \otimes b'_j)\mu'_{\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i}\big) \\ & = & \sum_{j \in J} \big((\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i)\mu'''_{a'_j\,,\,b'_j}\big) \\ & = & \sum_{j \in J} \big(\sum_{i \in I}((a_i \otimes b_i)\mu'''_{a'_j\,,\,b'_j})\big) \\ & = & \sum_{j \in J} \big(\sum_{i \in I} a_i a'_j \otimes b_i b'_j\big) \\ & = & \sum_{i \in I,\ j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j \end{array}$$

ergibt.

(Ring 2) Seien I, J und K endliche Mengen. Seien $a_i\,,\ a'_j\,,\ a''_k \in A$ und $b_i\,,\ b'_j\,,\ b''_k \in B$ für $i \in I$, $j \in J$ und $k \in K$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & ((\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j)) \cdot (\sum_{k \in K} a''_k \otimes b''_k) \\ = & (\sum_{i \in I,\ j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \cdot (\sum_{k \in K} a''_k \otimes b''_k) \\ = & \sum_{i \in I,\ j \in J,\ k \in K} a_i a'_j a''_k \otimes b_i b'_j b''_k \\ = & (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J,\ k \in K} a'_j a''_k \otimes b'_j b''_k) \\ = & (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot ((\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) \cdot (\sum_{k \in K} a''_k \otimes b''_k)) \; . \end{array}$$

(Ring 3) Sei I eine endliche Menge. Sei $a_i \in A$ für $i \in I$. Es wird

$$(1 \otimes 1) \cdot (\textstyle\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \;=\; \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i \;=\; (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (1 \otimes 1) \; .$$

(Ring 4) Sei zunächst angemerkt, daß unter Verwendung der leeren Summe $0 \cdot x = 0$ und $x \cdot 0 = 0$ folgt für $x \in A \underset{R}{\otimes} B$.

Seien nun I und $\tilde{I}$ disjunkte endliche Mengen. Seien J und $\tilde{J}$ disjunkte endliche Mengen. Seien $a_i\,,\ a'_j \in A$ und $b_i\,,\ b'_j \in B$ für $i \in I \sqcup \tilde{I}$ und $j \in J \sqcup \tilde{J}$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & ((\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) + (\sum_{i \in \tilde{I}} a_i \otimes b_i)) \cdot ((\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) + (\sum_{j \in \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j)) \\ = & (\sum_{i \in I \sqcup \tilde{I}} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J \sqcup \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j) \\ = & \sum_{i \in I \sqcup \tilde{I},\ j \in J \sqcup \tilde{J}} a_i a'_j \otimes b_i b'_j \\ = & (\sum_{i \in I,\ j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) + (\sum_{i \in I,\ j \in \tilde{J}} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \\ + & (\sum_{i \in \tilde{I},\ j \in J} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) + (\sum_{i \in \tilde{I},\ j \in \tilde{J}} a_i a'_j \otimes b_i b'_j) \\ = & (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) + (\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j) \\ + & (\sum_{i \in \tilde{I}} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in J} a'_j \otimes b'_j) + (\sum_{i \in \tilde{I}} a_i \otimes b_i) \cdot (\sum_{j \in \tilde{J}} a'_j \otimes b'_j) \; . \end{array}$$

Also ist $A \underset{R}{\otimes} B$ ein Ring.

Nun benötigen wir noch einen Ringmorphismus von R nach $A \underset{R}{\otimes} B$. Setze

$$\begin{array}{rcl} R & \xrightarrow{\varphi} & A \underset{R}{\otimes} B \\ r & \longmapsto & r \cdot 1 \otimes 1 \; . \end{array}$$

Dies ist ein Ringmorphismus.

Also ist $r(a \otimes b) = (r\varphi)(a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$ für $r \in R$, $a \in A$ und $b \in B$.

Insbesondere ist $(r\varphi)(\sum_{i\in I} a_i \otimes b_i) = \sum_{i\in I} ra_i \otimes b_i = \sum_{i\in I} a_i r \otimes b_i = (\sum_{i\in I} a_i \otimes b_i)(r\varphi)$ für $r \in R$, I eine Menge und $a_i \in A$ und $b_i \in B$ für $i \in I$.

(2) In T oder T°, welche dieselbe unterliegende Menge haben, werde nur die Multiplikation in T ohne Multiplikationssymbol geschrieben.

Sei zum einen ${}_S M_T$ gegeben.

Sei $m \in M$. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} S & \times & T^\circ & \xrightarrow{\mu''_m} & M \\ (s & , & t) & \longmapsto & s \cdot m * t \end{array}$$

ist $\mathbf{Z}$-bilinear. Also existiert die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} S & \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} & T^\circ & \xrightarrow{\mu'_m} & M \\ s & \otimes & t & \longmapsto & s \cdot m * t\,. \end{array}$$

Insgesamt haben wir eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} S \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} T^\circ & \times & M & \xrightarrow{\mu} & M \\ (\xi & , & m) & \longmapsto & \xi\mu'_m =: (\xi, m)\mu =: \xi \cdot m\,. \end{array}$$

Insbesondere ist für I eine endliche Menge, $s_i \in S$ und $t_i \in T$ für $i \in I$

$$(\textstyle\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i) \cdot m \;=\; (\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i)\mu'_m \;=\; \sum_{i\in I}((s_i \otimes t_i)\mu'_m) \;=\; \sum_{i\in I} s_i \cdot m * t_i\,.$$

Zeigen wir, daß $(M, +, \cdot)$ ein $S \otimes T^\circ$-Linksmodul ist.

(LMod 2) Seien I und J endliche Mengen. Seien $s_i\,,\, s'_j \,\in\, S$ und $t_i\,,\, t'_j \,\in\, T$ für $i \in I$ und $j \in J$ und $m \in M$. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} ((\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i) \cdot (\sum_{j\in J} s'_j \otimes t'_j)) \cdot m & = & (\sum_{i\in I,\, j\in J} s_i s'_j \otimes t'_j t_i) \cdot m \\ & = & \sum_{i\in I,\, j\in J} (s_i s'_j) \cdot m * (t'_j t_i) \\ & = & (\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i) \cdot (\sum_{j\in J} s'_j \cdot m * t'_j) \\ & = & (\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i) \cdot ((\sum_{j\in J} s'_j \otimes t'_j) \cdot m)\,. \end{array}$$

(LMod 3) Sei $m \in M$. Wir erhalten

$$(1 \otimes 1) \cdot m \;=\; m\,.$$

(LMod 4) Sei zunächst angemerkt, daß unter Verwendung der leeren Summe $0 \cdot m = 0$ folgt für $m \in M$. Ferner ist $x \cdot 0 = 0$ für $x \in S \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} T^\circ$ nach Formel.

Seien I und $\tilde{I}$ disjunkte endliche Mengen. Seien $s_i \in S$ und $t_i \in T$ für $i \in I \sqcup \tilde{I}$. Seien $m,\, m' \in M$. Es wird

$$\begin{array}{rl} & ((\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i) + (\sum_{i\in \tilde{I}} s_i \otimes t_i))(m + m') \\ = & (\sum_{i\in I\sqcup\tilde{I}} s_i \otimes t_i)(m + m') \\ = & \sum_{i\in I\sqcup\tilde{I}} s_i \cdot (m + m') * t_i \\ = & \sum_{i\in I\sqcup\tilde{I}} (s_i \cdot m * t_i + s_i \cdot m' * t_i) \\ = & (\sum_{i\in I} s_i \cdot m * t_i) + (\sum_{i\in \tilde{I}} s_i \cdot m * t_i) + (\sum_{i\in I} s_i \cdot m' * t_i) + (\sum_{i\in \tilde{I}} s_i \cdot m' * t_i) \\ = & (\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i) \cdot m + (\sum_{i\in \tilde{I}} s_i \otimes t_i) \cdot m + (\sum_{i\in I} s_i \otimes t_i) \cdot m' + (\sum_{i\in \tilde{I}} s_i \otimes t_i) \cdot m'\,. \end{array}$$

Sei zum anderen ${}_{S\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}T^\circ}M$ *gegeben.*

Setze $s\cdot m := (s\otimes 1)\cdot m$ und $m * t := (1\otimes t)\cdot m$ für $s\in S$, $t\in T$ und $m\in M$.

(LMod 2) Seien $s,\ s'\in S$ und $m\in M$. Es wird

$$s\cdot(s'\cdot m) \;=\; (s\otimes 1)\cdot((s'\otimes 1)\cdot m) \;=\; ((s\otimes 1)\cdot(s'\otimes 1))\cdot m \;=\; ((ss')\otimes 1)\cdot m \;=\; (ss')\cdot m\ .$$

(LMod 3) Sei $m\in M$. Es wird $1\cdot m = (1\otimes 1)\cdot m = m$.

(LMod 4) Sei zunächst angemerkt, daß $s\cdot 0 = 0$ für $s\in S$ und $0\cdot m = 0$ für $m\in M$ nach Definition. Seien nun $s,\ s'\in S$ und $m,\ m'\in M$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (s+s')\cdot(m+m') & = & ((s+s')\otimes 1)\cdot(m+m') \\ & = & (s\otimes 1 + s'\otimes 1)\cdot(m+m') \\ & = & (s\otimes 1)\cdot m + (s\otimes 1)\cdot m' + (s'\otimes 1)\cdot m + (s'\otimes 1)\cdot m' \\ & = & s\cdot m + s\cdot m' + s'\cdot m + s'\cdot m'\ . \end{array}$$

(RMod 2) Seien $t,\ t'\in T$ und $m\in M$. Es wird

$$(m*t)*t' \;=\; (1\otimes t')\cdot((1\otimes t)\cdot m) \;=\; ((1\otimes t)\cdot(1\otimes t'))\cdot m \;=\; (1\otimes(t't))\cdot m \;=\; m*(t't)\ .$$

(RMod 3) Sei $m\in M$. Es wird $m*1 = (1\otimes 1)\cdot m = m$.

(RMod 4) Sei zunächst angemerkt, daß $0*t = 0$ für $t\in T$ und $m*0 = 0$ für $m\in M$ nach Definition. Seien nun $m,\ m'\in M$ und $t,\ t'\in T$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (m+m')*(t+t') & = & (1\otimes(t+t'))\cdot(m+m') \\ & = & (1\otimes t + 1\otimes t')\cdot(m+m') \\ & = & (1\otimes t)\cdot m + (1\otimes t)\cdot m' + (1\otimes t')\cdot m + (1\otimes t')\cdot m' \\ & = & m*t + m*t' + m'*t + m'*t'\ . \end{array}$$

(BiMod 3) Seien $s\in S$, $m\in M$ und $t\in T$. Es wird

$$\begin{array}{rcl} (s\cdot m)*t & = & (1\otimes t)\cdot((s\otimes 1)\cdot m) \\ & = & ((1\otimes t)(s\otimes 1))\cdot m \\ & = & (s\otimes t)\cdot m \\ & = & ((s\otimes 1)(1\otimes t))\cdot m \\ & = & (s\otimes 1)((1\otimes t)\cdot m) \\ & = & s\cdot(m*t)\ . \end{array}$$

Man sieht auch noch, daß $(s\otimes t)\cdot m = s\cdot m * t$.

Beginnen wir mit ${}_SM_T$, bilden wir im ersten Schritt die zugehörige $S\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}T^\circ$-Linksmodulstruktur auf M und dann im zweiten Schritt die wiederum hier dazugehörige S-T-Bimodulstruktur, so erhalten wir wegen den Gleichheiten $(s\otimes 1)\cdot m = s\cdot m$ und $(1\otimes t)\cdot m = m*t$ aus dem ersten Schritt, wobei $s\in S$, $t\in T$ und $m\in M$, gerade ${}_SM_T$ zurück.

Beginnen wir mit ${}_{S\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}T^\circ}M$, bilden wir im ersten Schritt die zugeörige S-T-Bimodulstruktur auf M und dann im zweiten Schritt die wiederum hier dazugehörige $S\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}T^\circ$-Linksmodulstruktur, so erhalten wir wegen der Beziehung

$$\textstyle\sum_{i\in I} s_i\cdot m * t_i \;=\; \sum_{i\in I}((s_i\otimes t_i)\cdot m) \;=\; (\sum_{i\in I} s_i\otimes t_i)\cdot m$$

aus dem ersten Schritt, wobei I endliche Menge, $s_i\in S$ und $t_i\in T$ für $i\in I$, $m\in M$, gerade ${}_{S\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}T^\circ}M$ zurück.

Diese längliche Verifikation ist der Grund, warum S-T-Bimoduln nicht von vorneherein als $S \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} T^\circ$-Linksmoduln eingeführt werden.

Aufgabe 29

Sei $\varphi \in {}_R({}_R M_S \underset{S}{\otimes} {}_S X,\, {}_R N)$. Zu zeigen ist $\varphi(f \otimes h, g)\alpha_{X',M',N'} \overset{!}{=} \varphi\alpha_{X,M,N}(h,(f,g))$.

Auf der einen Seite wird

$$\begin{array}{rcl} \varphi(f \otimes h, g)\alpha_{X',M',N'} & = & ((f \otimes h)\varphi\, g)\alpha_{X',M',N'} \\ & = & (x' \mapsto (m' \mapsto (m' \otimes x')(f \otimes h)\varphi\, g)) \\ & = & (x' \mapsto (m' \mapsto (m' f \otimes x' h)\varphi\, g))\ . \end{array}$$

Auf der anderen Seite wird

$$\begin{array}{rcl} \varphi\alpha_{X,M,N}(h,(f,g)) & = & \big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)\big)(h,(f,g)) \\ & = & h\big(x \mapsto (m \mapsto (m \otimes x)\varphi)\big)(f,g) \\ & = & \big(x' \mapsto x'h \mapsto (m \mapsto (m \otimes x'h)\varphi) \mapsto (m \mapsto (m \otimes x'h)\varphi)(f,g)\big) \\ & = & \big(x' \mapsto (m \mapsto (m \otimes x'h)\varphi)(f,g)\big) \\ & = & \big(x' \mapsto (m' \mapsto m'f \mapsto (m'f \otimes x'h)\varphi \mapsto (m'f \otimes x'h)\varphi\, g)\big)\ , \\ & = & \big(x' \mapsto (m' \mapsto (m'f \otimes x'h)\varphi\, g)\big)\ . \end{array}$$

Cf. Lemma 62.(2).

Aufgabe 30

Zu (1).

Zur Surjektivität von g. Sei $Z = \operatorname{Cokern} g$. Es wird $X'' \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} g = Z$ unter ${}_R(g,Z)$ auf $g\rho = 0$ abgebildet. Da ${}_R(g,Z)$ injektiv ist, folgt $\rho = 0$, i.e. $\operatorname{Cokern} g \simeq 0$, i.e. g ist surjektiv.

Zur Exaktheit bei X. Sei $Z = X''$. Es ist $g = \mathrm{id}_{X''}\, {}_R(g,Z) \in \operatorname{Im}\, {}_R(g,Z) = \operatorname{Kern}\, {}_R(f,Z)$, und somit ist $fg = g\, {}_R(f,Z) = 0$, i.e. $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Kern} g$.

Sei nun $Z = \operatorname{Cokern} f$. Es wird $X \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} f = Z$ unter ${}_R(f,Z)$ auf $f\rho = 0$ abgebildet. Wegen der Exaktheit bei ${}_R(X,Z)$ gibt es ein $h \in {}_R(X'',Z)$ mit $h\, {}_R(g,Z) = \rho$, i.e. mit $gh = \rho$. Ist nun $x \in \operatorname{Kern} g$, so ist auch $0 = xgh = x\rho = x + \operatorname{Im} f$, also $x \in \operatorname{Im} f$. Dies zeigt $\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Kern} g$.

Zu (2). Sei Z ein R-Linksmodul. Nach Lemma 52.(2) ist die Sequenz

$${}_R(M',Z) \xleftarrow{{}_R(i,Z)} {}_R(M,Z) \xleftarrow{{}_R(p,Z)} {}_R(M'',Z)$$

von S-Linksmoduln linksexakt. Nach Lemma 62 haben wir folgendes kommutative Diagramm von $\mathbf{Z}$-Moduln; cf. Aufgabe 29.

$$\begin{tikzcd} {}_S(N,\, {}_R(M',Z)) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{N,M',Z}"', "\wr"] & {}_S(N,\, {}_R(M,Z)) \arrow[l, "{}_S(N,\, {}_R(i,Z))"'] \arrow[d, "\alpha^{-1}_{N,M,Z}"', "\wr"] & {}_S(N,\, {}_R(M'',Z)) \arrow[l, "{}_S(N,\, {}_R(p,Z))"'] \arrow[d, "\alpha^{-1}_{N,M'',Z}"', "\wr"] \\ {}_R(M' \underset{S}{\otimes} N, Z) & {}_R(M \underset{S}{\otimes} N, Z) \arrow[l, "{}_R(i \otimes N, Z)"'] & {}_R(M'' \underset{S}{\otimes} N, Z) \arrow[l, "{}_R(p \otimes N, Z)"'] \end{tikzcd}$$

Nach Lemma 52.(1) ist die obere Zeile linksexakt.

Denn da die Operation ${}_S(N,-)$ kurz exakte Sequenzen in linksexakte Sequenzen überführt, überführt sie insbesondere injektive S-lineare Abbildungen in injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen. Eine linksexakte

Sequenz $Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y''$ von S-Moduln kann aber aufgespalten werden in eine kurz exakte Sequenz $Y' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g|^{\mathrm{Im}\,g}} \mathrm{Im}\,g$ und noch eine injektive lineare Abbildung $\mathrm{Im}\,g \hookrightarrow Y''$. Die kurz exakte Sequenz kommt auf eine linksexakte Sequenz, die injektive Abbildung auf eine injektive Abbildung. Wieder zusammengesetzt, entsteht eine linksexakte Sequenz.

Daher ist auch die untere Zeile linksexakt.

Denn zum einen ist ${}_R(p\otimes N, Z)$ injektiv, da $\alpha^{-1}_{N,M'',Z}$ bijektiv und $\alpha^{-1}_{N,M'',Z}\,{}_R(p\otimes N, Z)$ injektiv ist. Zum anderen ist $\alpha^{-1}_{N,M'',Z}\,{}_R(p\otimes N, Z)\,{}_R(i\otimes N, Z) = 0$, also ${}_R(p\otimes N, Z)\,{}_R(i\otimes N, Z) = 0$ und mithin $\mathrm{Im}\,{}_R(p\otimes N, Z) \subseteq \mathrm{Kern}\,{}_R(i\otimes N, Z)$. Zum dritten sei uns ein $\xi \in {}_S(M \underset{S}{\otimes} N, Z)$ mit $\xi\,{}_R(i\otimes N, Z) = 0$ gegeben. Dann ist $0 = \xi\,{}_R(i\otimes N, Z)\alpha_{N,M',Z} = \xi\alpha_{N,M,Z}\,{}_S(N, {}_R(i,Z))$, also $\xi\alpha_{N,M,Z} \in \mathrm{Kern}\,{}_S(N, {}_R(i,Z)) = \mathrm{Im}\,{}_S(N, {}_R(p,Z))$, also $\xi\alpha_{N,M,Z} = \eta\,{}_S(N, {}_R(p,Z))$ für ein $\eta \in {}_S(N, {}_R(M'',Z))$. Somit ist $\xi = \eta\,{}_S(N, {}_R(p,Z))\alpha^{-1}_{N,M,Z} = \eta\,\alpha^{-1}_{N,M'',Z}\,{}_R(p\otimes N, Z) \in \mathrm{Im}\,{}_R(p\otimes N, Z)$. Also ist auch $\mathrm{Im}\,{}_R(p\otimes N, Z) \supseteq \mathrm{Kern}\,{}_R(i\otimes N, Z)$.

Mit (1) folgt schließlich die Rechtsexaktheit von $M' \underset{S}{\otimes} N \xrightarrow{i\otimes N} M \underset{S}{\otimes} N \xrightarrow{p\otimes N} M'' \underset{S}{\otimes} N$.

Aufgabe 31

(1) Sei ${}_RM \xrightarrow{f} {}_RM''$ eine surjektive R-lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(\textstyle\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha\,,\, M) \xrightarrow{{}_R(\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha\,,\, f)} {}_R(\textstyle\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha\,,\, M'')$$

surjektiv ist. Sei eine R-lineare Abbildung $\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha \xrightarrow{g} M''$ vorgegeben. Sei $\beta \in A$. Wegen der Projektivität von P_β ist

$${}_R(P_\beta\,,\, M) \xrightarrow{{}_R(P_\beta\,,\, f)} {}_R(P_\beta\,,\, M'')$$

surjektiv. Sei $P_\beta \xrightarrow{h_\beta} M$ eine R-lineare Abbildung mit $h_\beta f = h_\beta\,{}_R(P_\beta\,,\, f) = \iota_\beta g$. Sei $\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha \xrightarrow{h} M$ die R-lineare Abbildung mit $\iota_\alpha h = h_\alpha$ für alle $\alpha \in A$; cf. Bemerkung 38.(2). Für $\alpha \in A$ wird

$$\iota_\alpha(h\,{}_R(\textstyle\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha\,,\, f)) \;=\; \iota_\alpha h f \;=\; h_\alpha f = \iota_\alpha g\,,$$

und also, wegen der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft aus loc. cit., $h\,{}_R(\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha\,,\, f) = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(\coprod_{\alpha\in A} P_\alpha\,,\, -) \simeq \prod_{\alpha\in A} {}_R(P_\alpha\,,\, -)$ exakt ist als Produkt exakter Funktoren – sofern man sich darum gekümmert hat, alle in diesem Argument auftretenden Begriffe einzuführen. Cf. Aufgabe 27.(2).

(2) Wir haben zu zeigen, daß X projektiv ist. Sei ${}_RM \xrightarrow{f} {}_RM''$ eine surjektive R-lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(X, M) \xrightarrow{{}_R(X,f)} {}_R(X, M'')$$

surjektiv ist. Sei eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{g} M''$ vorgegeben. Wegen der Projektivität von $X \oplus Y$ ist

$${}_R(X\oplus Y, M) \xrightarrow{{}_R(X\oplus Y,f)} {}_R(X\oplus Y, M'')$$

surjektiv. Sei $X \oplus Y \xrightarrow{\binom{u}{v}} M$ eine R-lineare Abbildung mit $\binom{uf}{vf} = \binom{u}{v} f = \binom{u}{v}\,{}_R(X\oplus Y, f) = \binom{g}{0}$. Es folgt $u\,{}_R(X,f) = uf = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(X,-)$ als Summand des exakten Funktors ${}_R(X\oplus Y,-)$ exakt ist – sofern man alles definiert hat.

(3) Zeigen wir, daß R projektiv ist. Sei ${}_R M \xrightarrow{f} {}_R M''$ eine surjektive R-lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(R, M) \xrightarrow{{}_R(R,f)} {}_R(R, M'')$$

surjektiv ist. Sei eine R-lineare Abbildung $R \xrightarrow{g} M''$ vorgegeben. Wähle $m \in M$ mit $mf = 1g$. Setze $R \xrightarrow{h} M$, $r \longmapsto rm$. Für $r \in R$ ist also

$$rhf \;=\; (rm)f \;=\; r(mf) \;=\; r(1g) \;=\; (r \cdot 1)g \;=\; rg\,,$$

und also $h\,{}_R(R, f) = hf = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(R, -)$ zur Identität isomorph ist. Cf. Bemerkung 50.(3).

Seien nun X und Y zwei R-Linksmoduln. Sei B eine Menge. Sei $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta \in B} R$. Nach dem vorigen und nach (1) ist $\coprod_{\beta \in B} R$ projektiv. Nach (2) ist X projektiv.

Sei umgekehrt ein projektiver R-Linksmodul X gegeben. Sei $\coprod_{x \in X} R \xrightarrow{f} X$ definiert durch $r\iota_x f = rx$ für $r \in R$ und $x \in X$; cf. Bemerkung 38.(2).

Es ist f surjektiv, da für $x \in X$ insbesondere $(1\iota_x)f = x$ ist. Da X projektiv ist, ist auch

$${}_R(X, \textstyle\coprod_{x \in X} R) \xrightarrow{{}_R(X,f)} {}_R(X, X)$$

surjektiv. Insbesondere gibt es eine R-lineare Abbildung $X \xrightarrow{g} \coprod_{x \in X} R$ mit $gf = g\,{}_R(X, f) = \mathrm{id}_X$.

Sei $Y := \mathrm{Kern}\, f$. Wir *behaupten,* daß $X \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} g \\ \iota \end{smallmatrix}\right)} \coprod_{x \in X} R$ ein Isomorphismus ist.

Zur Injektivität. Sei $(x, y) \in X \oplus Y$ mit $0 = (x, y)\left(\begin{smallmatrix} g \\ \iota \end{smallmatrix}\right) = xg + y\iota = xg + y$ gegeben. Dann ist $0 = (xg + y)f = xgf + 0 = x$. Also ist auch $y = -xg = 0$.

Zur Surjektivität. Sei $t \in \coprod_{x \in X} R$ vorgegeben. Es ist $(t - tfg)f = tf - tfgf = tf - tf = 0$, also $t - tfg \in Y$. Es wird $(tf, t - tfg)\left(\begin{smallmatrix} g \\ \iota \end{smallmatrix}\right) = tfg + (t - tfg)\iota = tfg + (t - tfg) = t$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

(4) Sei $\coprod_{m \in M} R \xrightarrow{f} M$ definiert durch $r\iota_m f = rm$ für $m \in M$; cf. Bemerkung 38.(2). Es ist f surjektiv, da für $m \in M$ insbesondere $(1\iota_m)f = m$ ist. Mit (3) ist $\coprod_{m \in M} R$ projektiv (beachte, daß $X \oplus 0 \simeq X$ für jeden R-Linksmodul X).

(5) Zu zeigen ist, daß $X' \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{i \otimes P} X \underset{R}{\otimes} P$ injektiv ist; cf. Lemma 60.(1).

1. Seien $P \oplus Q \xrightarrow[\sim]{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)} \coprod_{\alpha \in A} R \xrightarrow[\sim]{\left(\begin{smallmatrix} c & d \end{smallmatrix}\right)} P \oplus Q$ sich gegenseitig invertierende Morphismen, cf. (3), so daß insbesondere $\left(\begin{smallmatrix} ac & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, und speziell $ac = 1$. Also ist auch $(X' \otimes a)(X' \otimes c) = X' \otimes 1 = 1$. Insbesondere ist $X' \otimes a$ injektiv. Wir haben ein kommutatives Viereck

$$\begin{tikzcd}
X' \underset{R}{\otimes} P \arrow[r, "i \otimes P"] \arrow[d, "X' \otimes a"'] & X \underset{R}{\otimes} P \arrow[d, "X \otimes a"] \\
X' \underset{R}{\otimes} \coprod_{\alpha \in A} R \arrow[r, "i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R)"] & X \underset{R}{\otimes} \coprod_{\alpha \in A} R\,,
\end{tikzcd}$$

da $(X' \otimes a)(i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R)) = i \otimes a = (i \otimes P)(X \otimes a)$. Also genügt es zu zeigen, daß $i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R)$ injektiv ist.

2. Aus Aufgabe 13.(3) entnehmen wir den Isomorphismus $X' \underset{R}{\otimes} \coprod_{\alpha \in A} R \xrightarrow[\sim]{\tau'} \coprod_{\alpha \in A} X' \underset{R}{\otimes} R$, $x' \otimes (r_\alpha)_\alpha \longmapsto (x' \otimes r_\alpha)_\alpha$ von $\mathbf{Z}$-Moduln. Analog wird $X \underset{R}{\otimes} \coprod_{\alpha \in A} R \xrightarrow[\sim]{\tau} \coprod_{\alpha \in A} X \underset{R}{\otimes} R$ gebildet.

3. Wir haben einen Isomorphismus $X' \underset{R}{\otimes} R \xrightarrow{\mu'} X'$, $x' \otimes r \longmapsto x'r$; cf. Bemerkung 58.(3). Setze damit $\coprod_{\alpha \in A} X' \underset{R}{\otimes} R \xrightarrow[\sim]{\nu'} \coprod_{\alpha \in A} X'$, $(\xi'_\alpha)_\alpha \longmapsto (\xi'_\alpha \mu')_\alpha$. Dies ist bijektiv und $\mathbf{Z}$-linear, da dies für μ' zutrifft. Analog wird $\coprod_{\alpha \in A} X \underset{R}{\otimes} R \xrightarrow[\sim]{\nu} \coprod_{\alpha \in A} X$ gebildet.

4. Setze $\coprod_{\alpha \in A} X' \xrightarrow{j} \coprod_{\alpha \in A} X$, $(x'_\alpha)_\alpha \longmapsto (x'_\alpha i)_\alpha$. Dies ist injektiv und $\mathbf{Z}$-linear, da dies für i zutrifft.

5. Folgendes Viereck kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
X' \underset{R}{\otimes} \coprod_{\alpha \in A} R \arrow[r, "i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R)"] \arrow[d, "\tau'"', "\wr"] & X \underset{R}{\otimes} \coprod_{\alpha \in A} R \arrow[d, "\tau", "\wr"'] \\
\coprod_{\alpha \in A} X' \underset{R}{\otimes} R \arrow[d, "\nu'"', "\wr"] & \coprod_{\alpha \in A} X \underset{R}{\otimes} R \arrow[d, "\nu", "\wr"'] \\
\coprod_{\alpha \in A} X' \arrow[r, "j"'] & \coprod_{\alpha \in A} X
\end{tikzcd}$$

Es genügt, dies auf Elementartensoren nachzuweisen. Es wird für $x' \in X'$ und $(r_\alpha)_\alpha \in \coprod_{\alpha \in A} R$

$$\begin{array}{l} (x' \otimes (r_\alpha)_\alpha)\tau'\nu' j \;=\; (x' \otimes r_\alpha)_\alpha \, \nu' j \;=\; (x' r_\alpha)_\alpha \, j \;=\; ((x' r_\alpha) i)_\alpha \;=\; (x' i r_\alpha)_\alpha \\ \quad = \; (x' i \otimes r_\alpha)_\alpha \nu \;=\; (x' i \otimes (r_\alpha)_\alpha)\tau\nu \;=\; (x' \otimes (r_\alpha)_\alpha)(i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R))\tau\nu \; . \end{array}$$

6. Da nun τ', ν' und j injektiv sind, gilt dies auch für $i \otimes (\coprod_{\alpha \in A} R)$.

Aufgabe 31.(1-4) zeigt die Bemerkung 64.

Aufgabe 32

(1) Sei ${}_R M' \xrightarrow{f} {}_R M$ eine injektive R-lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$${}_R(M', \textstyle\prod_{\alpha \in A} I_\alpha) \xleftarrow{{}_R(f, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha)} {}_R(M, \textstyle\prod_{\alpha \in A} I_\alpha)$$

surjektiv ist. Sei eine R-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{g} \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ vorgegeben. Sei $\beta \in A$. Wegen der Injektivität von I_β ist

$${}_R(M', I_\beta) \xleftarrow{{}_R(f, I_\beta)} {}_R(M, I_\beta)$$

surjektiv. Sei $M \xrightarrow{h_\beta} I_\beta$ eine R-lineare Abbildung mit $f h_\beta \;=\; h_\beta \, {}_R(f, I_\beta) \;=\; g\pi_\beta$. Sei $M \xrightarrow{h} \prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ die R-lineare Abbildung mit $h\pi_\alpha = h_\alpha$ für alle $\alpha \in A$; cf. Bemerkung 38.(1). Für $\alpha \in A$ wird

$$(h \, {}_R(f, \textstyle\prod_{\alpha \in A} I_\alpha))\pi_\alpha \;=\; f h \pi_\alpha \;=\; f h_\alpha = g\pi_\alpha \; ,$$

und also, wegen der Eindeutigkeit aus der universellen Eigenschaft aus loc. cit., $h \, {}_R(f, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha)) = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(-, \prod_{\alpha \in A} I_\alpha) \simeq \prod_{\alpha \in A} {}_R(-, I_\alpha)$ exakt ist als Produkt exakter Funktoren – sofern man sich darum gekümmert hat, alle in diesem Argument auftretenden Begriffe einzuführen. Cf. Aufgabe 27.(1).

(2) Wir haben zu zeigen, daß X injektiv ist. Sei ${}_R M' \xrightarrow{f} {}_R M$ eine injektive R-lineare Abbildung. Zu zeigen ist, daß

$$ {}_R(M', X) \xleftarrow{{}_R(f,X)} {}_R(M'', X) $$

surjektiv ist. Sei eine R-lineare Abbildung $M' \xrightarrow{g} X$ vorgegeben. Wegen der Injektivität von $X \oplus Y$ ist

$$ {}_R(M', X \oplus Y) \xleftarrow{{}_R(f, X \oplus Y)} {}_R(M, X \oplus Y) $$

surjektiv. Sei $M \xrightarrow{(u\ v)} X \oplus Y$ eine R-lineare Abbildung mit $(fu\ fv) = f\,(u\ v) = (u\ v)\ {}_R(f, X \oplus Y) = (g\ 0)$. Es folgt $u\ {}_R(f,X) = fu = g$, wie gesucht.

Man kann auch vorbringen, daß ${}_R(-,X)$ als Summand des exakten Funktors ${}_R(-, X \oplus Y)$ exakt ist – sofern alles definiert ist.

Aufgabe 32 zeigt die Bemerkung 66.

Aufgabe 33

Schreibe $R := \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix}$. Schreibe $e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $n := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zur Projektivität.

Zu $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix} = R$, $\left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Nach Aufgabe 31.(3) sind also $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ projektiv.

Wir wollen zeigen, daß $M := \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ *nicht projektiv ist.* Hierzu genügt es zu zeigen, daß die Identität auf M unter

$$ {}_R\left(M, \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{{}_R(M,\,\rho)} {}_R(M, M) $$

kein Urbild hat, i.e. daß es keine R-lineare Abbildung $M \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ mit $g\rho = \mathrm{id}$ gibt. Das aber wurde schon in Aufgabe 13.(2) gezeigt.

Zur Injektivität.

Wir wollen zeigen, daß $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ *nicht injektiv ist.* Hierzu genügt es zu zeigen, daß die Identität auf $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ unter

$$ {}_R\left(\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \xleftarrow{{}_R\left(\iota,\, \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}\right)} {}_R\left(\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}\right) $$

kein Urbild hat, i.e. daß es keine R-lineare Abbildung $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\iota f = \mathrm{id}$ gibt. Das aber wurde schon in Aufgabe 13.(1) gezeigt.

Wir wollen zeigen, daß $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ *injektiv ist.* Sei $X \xrightarrow{u} Y$ eine injektive R-lineare Abbildung. Sei $X \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ eine R-lineare Abbildung.

Es ist $X = eX \oplus fX$ als $\mathbf{Q}$-Vektorräume, da $x = ex + fx$ für $x \in X$ und da ein Element in $eX \cap fX$ sich bei Multiplikation mit ef nicht ändert, wobei aber $ef = 0$. Wir haben die Abbildung $nX : fX \longrightarrow eX$, $fx \longmapsto nfx = enx$. Wir schreiben kurz $u_e = u|_{eX}^{eY}$ und $u_f = u|_{fX}^{fY}$; diese Abbildungen sind beide injektiv. Das Viereck

$$ \begin{tikzcd} fX \arrow[r, "u_f"] \arrow[d, "nX"'] & fY \arrow[d, "nY"] \\ eX \arrow[r, "u_e"] & eY \end{tikzcd} $$

kommutiert.

Nach Basisergänzungssatz sind alle $\mathbf{Q}$-Moduln injektiv. Wähle eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung $s' : eY \longrightarrow e\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}}$ mit $u_e s' := t_e$. Da $n\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}}$ ein $\mathbf{Q}$-linearer Isomorphismus ist, gibt es genau eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung $s'' : fY \longrightarrow f\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}}$ mit $(nY)s' = s''(n\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}})$.

Setze $s : Y \longrightarrow \binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}},\ y \longmapsto (ey)s' + (fy)s''$. Diese Abbildung ist $\mathbf{Q}$-linear. Um zu zeigen, daß sie R-linear ist, müssen wir die Verträglichkeit mit e, f und n überprüfen. Für $y \in Y$ wird in der Tat

$$\begin{array}{lclclclclcl}
ey & \longmapsto & (eey)s' + (fey)s'' & = & (ey)s' & = & e\big((ey)s' + (fy)s''\big) \\
fy & \longmapsto & (efy)s' + (ffy)s'' & = & (fy)s' & = & f\big((ey)s' + (fy)s''\big) \\
ny & \longmapsto & (eny)s' + (fny)s'' & = & (nfy)s' & = & (fy)(nY)s' & = & (fy)s''(n\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}}) & = & n\big((ey)s' + (fy)s''\big)\ .
\end{array}$$

Ferner ist $us = t$, da für $x \in X$ sich

$$\begin{array}{rcl}
xus & = & (e(xu))s' + (f(xu))s'' \\
& = & (ex)u_e s' + (fx)u_f s'' \\
& = & (ex)t_e + (fx)u_f(nY)s'(n\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}})^{-1} \\
& = & (ex)t_e + (fx)(nX)u_e s'(n\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}})^{-1} \\
& = & (ex)t_e + (fx)(nX)t_e(n\binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}})^{-1} \\
& = & (ex)t_e + (fx)(nX)(nX)^{-1}t_f \\
& = & (ex)t_e + (fx)t_f \\
& = & (ex + fx)t \\
& = & xt\ .
\end{array}$$

ergibt.

Wir wollen zeigen, daß $M := \binom{\mathbf{Q}}{\mathbf{Q}} / \binom{\mathbf{Q}}{0}$ *injektiv ist.* Sei $X \xrightarrow{u} Y$ eine injektive R-lineare Abbildung. Sei $X \xrightarrow{t} \binom{\mathbf{Q}}{0}$ eine R-lineare Abbildung. Die Bezeichnungen seien wie im vorigen Fall.

Beachte, daß $eM = 0$. Wähle eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung $s'' : fY \longrightarrow fM$ mit $u_f s' := t_f$.

Setze $s : Y \longrightarrow M,\ y \longmapsto (fy)s''$. Diese Abbildung ist $\mathbf{Q}$-linear. Um zu zeigen, daß sie R-linear ist, müssen wir die Verträglichkeit mit e, f und n überprüfen. Für $y \in Y$ wird in der Tat

$$\begin{array}{lclclclclcl}
ey & \longmapsto & (fey)s'' & = & 0 & = & e\big((fy)s''\big) \\
fy & \longmapsto & (ffy)s'' & = & (fy)s' & = & f\big((fy)s''\big) \\
ny & \longmapsto & (fny)s'' & = & 0 & = & en\big((fy)s''\big) & = & nf\big((fy)s''\big) & = & n\big((fy)s''\big)\ .
\end{array}$$

Ferner ist $us = t$, da für $x \in X$ sich

$$\begin{array}{rcl}
xus & = & (f(xu))s'' \\
& = & (fx)u_f s'' \\
& = & (fx)t_f \\
& = & f(xt) \\
& = & e(xt) + f(xt) \\
& = & xt
\end{array}$$

ergibt.

Aufgabe 34

Wir wissen: Es ist $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ein injektiver $\mathbf{Z}$-Modul; cf. Lemma 67.

Wir wissen dann auch: Es ist ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ein injektiver $\mathbf{Z}/n$-Modul.

Es genügt zeigen: Es ist ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \overset{!}{\simeq} \mathbf{Z}/n$ als $\mathbf{Z}/n$-Modul, d.h. als abelsche Gruppe.

Eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}$ nach $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ist durch Angabe eines Elements $x \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ bestimmt, indem wir $z \in \mathbf{Z}$ nach $z \cdot x \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ abbilden. Wir schreiben diese Abbildung

$$g_x \ :\ \mathbf{Z} \ \to\ \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \ :\ z \ \mapsto\ zg_x \ :=\ z \cdot x\ .$$

Dank universeller Eigenschaft des Faktormoduls ist eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}/n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ nach $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ also durch Angabe eines Elements $x \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ bestimmt, für welches $w \cdot x = 0$ ist für $w \in n\mathbf{Z}$. Mit anderen Worten, dafür sollte $n \cdot x = 0$ sein.

Wir schreiben diese Abbildung

$$\bar{g}_x \;:\; \mathbf{Z}/n \;\to\; \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \;:\; (z + n\mathbf{Z}) \;\mapsto\; (z + n\mathbf{Z})\bar{g}_x \;:=\; z \cdot x\;.$$

Es ist

$$\{\, x \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \,:\, n \cdot x = 0 \,\} \;=\; \{\, \tfrac{k}{n} + \mathbf{Z} \,:\, k \in \mathbf{Z} \,\}\;.$$

Also ist

$${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \;=\; \{\, \bar{g}_{\frac{k}{n}+\mathbf{Z}} \,:\, k \in \mathbf{Z} \,\} \;=\; {}_{\mathbf{Z}}\langle \bar{g}_{\frac{1}{n}+\mathbf{Z}} \rangle\;.$$

Darin hat $\bar{g}_{\frac{1}{n}+\mathbf{Z}}$ die Ordnung n. Folglich haben wir den folgenden Isomorphismus abelscher Gruppen.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/n & \xrightarrow{\sim} & {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ k + n\mathbf{Z} & \mapsto & \bar{g}_{\frac{k}{n}+\mathbf{Z}}\;. \end{array}$$

Aufgabe 35

(1) Die Aussage ist richtig.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine injektive Abbildung. Seien $T \overset{g}{\underset{\tilde{g}}{\rightrightarrows}} X$ Abbildungen mit $gf = \tilde{g}f$. Sei $t \in T$. Es ist $tgf = t\tilde{g}f$. Die Injektivität von f gibt $tg = t\tilde{g}$. Dies zeigt, daß $g = \tilde{g}$. Also ist f monomorph.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine monomorphe Abbildung. Seien $x,\ x' \in X$ mit $xf = x'f$ gegeben. Sei $\{1\} \xrightarrow{g} X$, $1 \longmapsto x$. Sei $\{1\} \xrightarrow{g'} X$, $1 \longmapsto x'$. Dann ist $gf = g'f$, da $1gf = xf = x'f = 1g'f$. Da f monomorph ist, folgt $g = g'$. Also ist $x = 1g = 1g' = x'$. Somit ist f injektiv.

(2) Die Aussage ist falsch.

Betrachte den Einbettungsmorphismus $\mathbf{Z} \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbf{Q}$. Es ist f nicht surjektiv. Wir *behaupten,* daß f epimorph ist. Seien $\mathbf{Q} \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} R$ zwei Ringmorphismen mit $fg = fg'$.

Letztere Bedingung ist ohnehin erfüllt, da $\mathbf{Z}$ in (Rings) initial ist.

Sei $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$. Es ist $(\frac{a}{1})g = afg = afg' = (\frac{a}{1})g'$. Ferner ist

$$(\tfrac{1}{b})g \;=\; (\tfrac{1}{b})g \cdot (\tfrac{b}{1} \cdot \tfrac{1}{b})g' \;=\; (\tfrac{1}{b})g \cdot (\tfrac{b}{1})g' \cdot (\tfrac{1}{b})g' \;=\; (\tfrac{1}{b})g \cdot (\tfrac{b}{1})g \cdot (\tfrac{1}{b})g' \;=\; (\tfrac{1}{b} \cdot \tfrac{b}{1})g \cdot (\tfrac{1}{b})g' \;=\; (\tfrac{1}{b})g'\;.$$

Insgesamt wird also

$$(\tfrac{a}{b})g = (\tfrac{a}{1} \cdot \tfrac{1}{b})g = (\tfrac{a}{1})g \cdot (\tfrac{1}{b})g \;=\; (\tfrac{a}{1})g' \cdot (\tfrac{1}{b})g' \;=\; (\tfrac{a}{1} \cdot \tfrac{1}{b})g' \;=\; (\tfrac{a}{b})g'\;.$$

Also ist $g = g'$.

(3) Die Aussage ist richtig.

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Epimorphismus.

Wir behaupten zunächst, daß f surjektiv ist. Sei *angenommen,* es gibt ein $y_0 \in Y \smallsetminus Xf$. Setze $Y \xrightarrow{g_1} \{0,1\}$, $y \longmapsto 0$ für $y \in Y \smallsetminus \{y_0\}$, $y_0 \longmapsto 1$. Setze $Y \xrightarrow{g_0} \{0,1\}$, $y \longmapsto 0$ für $y \in Y$. Es ist $fg_1 = fg_0$, da $Xf \subseteq Y \smallsetminus \{y_0\}$. Da f epimorph ist, folgt $g_1 = g_0$. Also ist $1 = y_0g_1 = y_0g_0 = 0$, *Widerspruch.* Also ist f surjektiv.

Wir wählen nun für jedes $y \in Y$ ein Element $yg \in f^{-1}(\{y\})$, was wegen $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ möglich ist und mittels Auswahlaxiom eine Abbildung $Y \xrightarrow{g} X$ liefert. Nach Konstruktion ist $ygf = y$ für $y \in Y$, also $gf = \mathrm{id}$. Somit ist f eine Retraktion.

(4) Die Aussage ist falsch.

Sei $R = \mathbf{Z}$. Es ist $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ injektiv, dank Bemerkung 76 also monomorph. Wir wollen zeigen, daß keine Coretraktion vorliegt. In entgegengesetzter Richtung gibt es die Morphismen $\mathbf{Z}/2 \xleftarrow{a} \mathbf{Z}/4$ mit $a \in \{0, 1\}$. Das Kompositum wird zu $(\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/2) = (\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2)$, und das ist ungleich der Identität auf $\mathbf{Z}/2$. Also ist $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ keine Coretraktion.

Man kann natürlich auch Aufgabe 13.(1) heranziehen.

Ist hingegen R ein Körper, so ist in R-Mod dank Basisergänzungssatz jeder Monomorphismus eine Coretraktion.

Aufgabe 36

(1) Die Aussage ist richtig. Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ mit fg monomorph. Seien $T \underset{t'}{\overset{t}{\rightrightarrows}} X$ mit $tf = t'f$ gegeben. Es folgt $tfg = t'fg$ und also $t = t'$ wegen fg monomorph. Folglich ist f monomorph.

(2) Die Aussage ist richtig. Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{r} X$ mit $(fg)r = \mathrm{id}$. Es folgt $f(gr) = \mathrm{id}$. Also ist f eine Coretraktion.

(3) Die Aussage ist richtig. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Retraktion, sei $X \xleftarrow{u} Y$ mit $uf = \mathrm{id}$. Seien $Y \underset{t'}{\overset{t}{\rightrightarrows}} T$ mit $ft = ft'$ gegeben. Es folgt $t = uft = uft' = t'$. Also ist f epimorph.

(4) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Z}$-lat die volle Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod, die durch $\operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-lat} := \{\mathbf{Z}^{\oplus m} : m \geqslant 0\}$ definiert ist („$\mathbf{Z}$-lattices"). In $\mathbf{Z}$-lat ist der Morphimus $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ kein Isomorphismus, da er in $\mathbf{Z}$-Mod keiner ist, mangels Surjektivität. In $\mathbf{Z}$-lat ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ ein Monomorphismus, da er dies als injektive $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung sogar in $\mathbf{Z}$-Mod ist.

Bleibt zu zeigen, daß $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$-lat ein Epimorphismus ist. Seien $\mathbf{Z} \underset{(t'_i)_i}{\overset{(t_i)_i}{\rightrightarrows}} \mathbf{Z}^{\oplus m}$ zwei $\mathbf{Z}$-lineare Abbildungen mit $2(t_i)_i = 2(t'_i)_i$. Es folgt $2t_i = 2t'_i$ für alle $i \in [1, m]$, somit auch $t_i = t'_i$ für alle $i \in [1, m]$, und also $(t_i)_i = (t'_i)_i$. Somit ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ in $\mathbf{Z}$-lat ein Epimorphismus.

(5) Die Aussage ist richtig. Sei $X \xrightarrow{f} Y$ epimorph, und sei $X \xleftarrow{u} Y$ mit $fu = \mathrm{id}$. Es folgt $f(uf) = (fu)f = f = f\,\mathrm{id}$, und also $uf = \mathrm{id}$. Somit ist f ein Isomorphismus.

Sei 0 ein Nullobjekt. Ist $0 \to X$ ein Epimorphismus, so ist $0 \xrightarrow{\sim} X$. Denn ohnehin ist $0 \to X$ eine Coretraktion.

(6) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Z}$-Mod. Es ist $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ ein Epimorphismus, da surjektiv. In die entgegengesetzte Richtung gibt es die Morphismen $\mathbf{Z}/4 \xleftarrow{a} \mathbf{Z}/2$ mit $a \in \{0, 2\}$. Das Kompositum wird zu $(\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{a} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2) = (\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2)$, und das ist ungleich der Identität auf $\mathbf{Z}/2$. Also ist $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ keine Retraktion.

(7) Die Aussage ist richtig. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ mit fg und gh Isomorphismen. Es ist $((fg)^{-1}f)g = \mathrm{id}$. Es ist $g(h(gh)^{-1}) = \mathrm{id}$. Es folgt $u := ((fg)^{-1}f) = ((fg)^{-1}f)g(h(gh)^{-1}) = (h(gh)^{-1})$ und also $ug = \mathrm{id}$ und $gu = \mathrm{id}$. Somit ist g ein Isomorphismus. Also sind auch $f = (fg)g^{-1}$ und $h = g^{-1}(gh)$ Isomorphismen.

Für g Isomorphismus kann man nach dem Nachweis, daß g Retraktion und, dual, Coretraktion ist, auch (3) und (5) heranziehen.

(8) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Q}$-Mod. Sei $X := \coprod_{i\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}} \mathbf{Q}$. Sei $X \xrightarrow{f} X$, $(a_i)_{i\geqslant 1} \longmapsto (a_{i+1})_{i\geqslant 1}$. Dies ist eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung, folglich ein Endomorphismus von X. Sei $X \xrightarrow{u} X$, $(b_i)_{i\geqslant 1} \longmapsto (b_{i-1})_{i\geqslant 1}$, wobei $b_0 := 0$ gesetzt werde. Dies ist eine $\mathbf{Q}$-lineare Abbildung. Es ist $(b_i)_{i\geqslant 1}uf = (b_{i-1})_{i\geqslant 1}f = (b_i)_{i\geqslant 1}$ für $(b_i)_i \in X$. Somit ist f eine Retraktion. Aber es ist f nicht injektiv, da $(1,0,0,\ldots)f = 0$. Also ist f kein Automorphismus.

(9) Die Aussage ist falsch. Wir führen ein Gegenbeispiel zur dualen Aussage an. In (Sets) ist $\{1\}$ terminal, aber $\emptyset \longrightarrow \{1\}$ nicht epimorph, da es von $\{1\}$ nach $\{1,2\}$ zwei verschiedene Abbildungen gibt, die nach Vorkomposition mit $\emptyset \longrightarrow \{1\}$ gleich werden.

(10) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathbf{Z}$-Mod. Sei $F = \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} -$. Dann ist $F(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z} \xrightarrow{\mathbf{Z}/2\otimes 2} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z})$ der Nullmorphismus, aber $\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/2 \not\simeq 0$. Also ist $F(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z})$ kein Monomorphismus, obzwar $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ einer ist. Cf. Beispiel 61.

(11) Die Aussage ist richtig. Sei f eine Coretraktion. Sei dementsprechend ein $X \xleftarrow{h} Y$ mit $fh = \mathrm{id}_X$ gegeben. Dann ist $(Ff)(Fh) = F(fh) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$. Also ist Fh eine Coretraktion.

Aufgabe 37

Die dualen Aussagen lauten wie folgt. Der Wahrheitsgehalt einer kategoriellen Aussage ändert sich beim Dualisieren nicht, der Deutlichkeit halber werde er angemerkt.

(1) Ist fg ein Epimorphismus, so auch g. (Richtig.)

(2) Ist fg eine Retraktion, so auch g. (Richtig.)

(3) Ist f eine Coretraktion, so ist f monomorph. (Richtig.)

(4) Ist f monomorph und epimorph, so ist f ein Isomorphismus. (Selbstdual; falsch.)

(5) Ist f eine Retraktion und monomorph, so ist f ein Isomorphismus. (Richtig.)

(6) Ist f monomorph, so ist f eine Coretraktion. (Falsch.)

(7) Sind fg und gh Isomorphismen, so auch f, g und h. (Selbstdual; richtig.)

(8) Ist f ein Endomorphismus und eine Coretraktion, so ist f ein Automorphismus. (Falsch.)

(9) Ist Y terminal, so ist $X \xrightarrow{f} Y$ epimorph. (Falsch.)

(10) Ist f ein Epimorphismus, so auch Ff. (Falsch.)

(11) Ist f eine Retraktion, so auch Ff. (Richtig.)

Beachte für $(7,8)$, daß auch $\mathcal{C}^\circ \longrightarrow \mathcal{D}^\circ$, $f \longmapsto Ff$ ein Funktor ist.

Aufgabe 38

Existenz und Eindeutigkeit von $C(\xi,\eta)$ bezüglich $\rho C(\xi,\eta) = \eta\rho$ haben wir in Aufgabe 16 gesehen.

Für $(X \xrightarrow{f} Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $C\,\mathrm{id}_{(X\xrightarrow{f}Y)} = C(\mathrm{id}_X\,,\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{C(X\xrightarrow{f}Y)}$, da $\rho\,\mathrm{id}_{C(X\xrightarrow{f}Y)} = \mathrm{id}_Y\,\rho$.

Seien nun Morphismen $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{(\xi,\eta)} (X' \xrightarrow{f'} Y') \xrightarrow{(\xi',\eta')} (X'' \xrightarrow{f''} Y'')$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Wir haben $C(\xi,\eta)C(\xi',\eta') \overset{!}{=} C(\xi\xi',\eta\eta')$ zu zeigen. Wegen ρ epimorph genügt es, $\rho C(\xi,\eta)C(\xi',\eta') \overset{!}{=} \rho C(\xi\xi',\eta\eta')$ zu zeigen. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} \rho C(\xi,\eta)C(\xi',\eta') & = & \eta\rho C(\xi',\eta') \\ & = & \eta\eta'\rho \\ & = & \rho C(\xi\xi',\eta\eta')\,. \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\eta"] & C(X \xrightarrow{f} Y) \arrow[d, "C(\xi,\eta)"] \arrow[dd, bend left, "C(\xi\xi',\eta\eta')"] \\
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\xi'"'] & Y' \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\eta'"] & C(X' \xrightarrow{f'} Y') \arrow[d, "C(\xi',\eta')"] \\
X'' \arrow[r, "f''"] & Y'' \arrow[r, "\rho"] & C(X'' \xrightarrow{f''} Y'')
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 39

(1) Schreibe $0 \xrightarrow{\alpha} 1$ für den einzigen nichtidentischen Morphismus in Δ_1^{k}.

Die Objekte in $[\![\Delta_1^{\mathrm{k}}, R\text{-Mod}]\!]$ sind die Funktoren von Δ_1^{k} nach R-Mod. Ein solcher Funktor F ist durch die Angabe seines Bildes $F0 \xrightarrow{F\alpha} F1$ auf dem Morphismus $0 \xrightarrow{\alpha} 1$ bestimmt. Umgekehrt definiert jeder Morphismus in R-Mod auf diese Weise einen Funktor, denn wenn man noch id_0 und id_1 auf die jeweilige Identität schickt, so sind alle für die Verträglichkeit mit F zu überprüfenden Kompositionen trivial.

Ein Morphismus in $[\![\Delta_1^{\mathrm{k}}, R\text{-Mod}]\!]$ von F nach G ist ein Paar $(a0, a1)$ von Morphismen in R-Mod so, daß das Viereck

$$\begin{tikzcd}
F0 \arrow[r, "F\alpha"] \arrow[d, "a0"'] & F1 \arrow[d, "a1"] \\
G0 \arrow[r, "G\alpha"] & G1
\end{tikzcd}$$

Somit können wir $[\![\Delta_1^{\mathrm{k}}, R\text{-Mod}]\!]$ mit $\mathcal{C}$ via $F \longmapsto (F0 \xrightarrow{F\alpha} F1)$ und $a = (a0, a1) \longmapsto (a0, a1)$ identifizieren.

(2) Setze

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C} & \xrightarrow{F} & R\text{-Mod} \\
(X \xrightarrow{f} Y) & \longmapsto & Y \\
(\xi, \eta) & \longmapsto & \eta\,.
\end{array}$$

Dies ist offenbar ein Funktor.

Wir haben das Tupel

$$\Big(F(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow C(X \xrightarrow{f} Y)\Big)_{(X \xrightarrow{f} Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}} := \Big(Y \xrightarrow{\rho} \operatorname{Cokern} f\Big)_{(X \xrightarrow{f} Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}}.$$

Seine Natürlichkeit ist zu zeigen. Sei $(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{(\xi,\eta)} (X' \xrightarrow{f'} Y')$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Wie in der Lösung zu Aufgabe 38 erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\eta"] & \operatorname{Cokern} f \arrow[d, "C(\xi,\eta)"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "\rho"] & \operatorname{Cokern} f'
\end{tikzcd}$$

Das rechte kommutative Viereck darin zeigt die verlangte Natürlichkeit.

Aufgabe 40

(1) Sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Z}/4\text{-Mod})$. Wir wollen eine $\mathbf{Z}/2$-lineare Abbildung von $\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} M$ nach ${}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, M)$ angegeben.

Sei zunächst

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/2 \times M & \xrightarrow{\hat{a}M} & {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, M) \\ (z + 2\mathbf{Z}, m) & \mapsto & (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})m) \; . \end{array}$$

Dies ist wohldefiniert, da für $w \equiv_2 w'$ sich $2wz \equiv_4 2w'z$ ergibt und da für $z \equiv_2 z'$ sich $2wz \equiv_4 2wz'$ ergibt.

Es ist $\hat{a}M$ eine $\mathbf{Z}/4$-bilineare Abbildung:

Zum einen ist die Abbildung $\hat{a}M$ additiv in $z + 2\mathbf{Z}$ und in m.

Denn für $z,\, z' \in \mathbf{Z}$ und $m \in M$ wird $(z + z' + 2\mathbf{Z}, m)$ abgebildet auf

$$(w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2w(z + z') + 4\mathbf{Z})m) \;=\; (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})m) + (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz' + 4\mathbf{Z})m) \; .$$

Für $z \in \mathbf{Z}$ und $m,\, m' \in M$ wird $(z + z' + 2\mathbf{Z}, m)$ abgebildet auf

$$(w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})(m + m')) \;=\; (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})m) + (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})m') \; .$$

Zum anderen wird für $s + 4\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}/4$ sowohl $(zs + 2\mathbf{Z}, m)$ als auch $(z + 2\mathbf{Z}, (s + 4\mathbf{Z})m)$ auf

$$(w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wzs + 4\mathbf{Z})m)$$

abgebildet.

Folglich erhalten wir die additive Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} M & \xrightarrow{aM} & {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, M) \\ (z + 2\mathbf{Z}) \otimes m & \mapsto & (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})m) \; . \end{array}$$

Diese ist daher auch $\mathbf{Z}/2$-linear.

Wir wollen zeigen, daß $a := (aM)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Z}/4\text{-Mod})}$ eine Transformation ist. Wir haben die Natürlichkeit zu zeigen.

Sei $M \xrightarrow{f} N$ eine $\mathbf{Z}/4$-lineare Abbildung zwischen $\mathbf{Z}/4$-Moduln. Wir haben die Kommutativität des folgenden Vierecks nachzuweisen.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} M \arrow[r, "aM"] \arrow[d, "\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} f"'] & {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, M) \arrow[d, "{}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, f)"] \\ \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} N \arrow[r, "aN"] & {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, N) \end{tikzcd}$$

Wegen Additivität aller auftretenden Abbildungen genügt es zu zeigen, daß für $z \in \mathbf{Z}$ und $m \in M$ das Element $(z + 2\mathbf{Z}) \otimes m \in \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} M$ auf beiden Wegen im Diagramm auf dasselbe Element in ${}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, N)$ abgebildet wird.

Zum einen wird

$$\begin{array}{rcl} ((z + 2\mathbf{Z}) \otimes m)(aM)\, {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, f) & = & (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})m)\, {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, f) \\ & = & (w + 2\mathbf{Z} \mapsto ((2wz + 4\mathbf{Z})m)f) \; . \\ & = & (w + 2\mathbf{Z} \mapsto (2wz + 4\mathbf{Z})(mf)) \; . \end{array}$$

Zum anderen wird

$$\begin{array}{rcl} ((z+2\mathbf{Z})\otimes m)(\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} f)(aN) & = & ((z+2\mathbf{Z})\otimes mf)(aN) \\ & = & (w+2\mathbf{Z} \mapsto (2wz+4\mathbf{Z})(mf))\ . \end{array}$$

Das ist dasselbe.

Ferner ist $a \neq 0$, da z.B. für $M = \mathbf{Z}/4$, $m = 1+4\mathbf{Z}$ und $z = 1$ sich

$$((1+2\mathbf{Z})\otimes(1+4\mathbf{Z}))(a(\mathbf{Z}/4)) \;=\; (w+2\mathbf{Z} \mapsto 2w+4\mathbf{Z})$$

ergibt, und diese Abbildung schickt $1+2\mathbf{Z}$ nach $2+4\mathbf{Z}$, was ungleich 0 ist.

(2) *Annahme,* wir können eine Isotransformation $b : (\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} -) \xrightarrow{\sim} {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, -)$ wählen.

Wir betrachten den Morphismus $(M \xrightarrow{f} N) = (\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4)$ in $\mathbf{Z}/4$-Mod. Wir haben folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} \mathbf{Z}/2 \arrow[r, "b(\mathbf{Z}/2)", "\sim"'] \arrow[d, "\mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} 2"'] & {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}/4) \arrow[d, "{}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, 2)"] \\ \mathbf{Z}/2 \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "b(\mathbf{Z}/4)", "\sim"'] & {}_{\mathbf{Z}/4}(\mathbf{Z}/2, \mathbf{Z}/4) \end{tikzcd}$$

Auf der linken Seite steht vertikal der Nullmorphismus, da für $z,\ s \in \mathbf{Z}$ das Element

$$(z+2\mathbf{Z})\otimes(s+2\mathbf{Z})$$

abgebildet wird auf

$$(z{+}2\mathbf{Z})\otimes(2s{+}4\mathbf{Z}) \;=\; (z{+}2\mathbf{Z})\otimes(2{+}4\mathbf{Z})(s{+}4\mathbf{Z}) \;=\; (z{+}2\mathbf{Z})(2{+}4\mathbf{Z})\otimes(s{+}4\mathbf{Z}) \;=\; (2z{+}2\mathbf{Z})\otimes(s{+}4\mathbf{Z}) \;=\; 0\ .$$

Auf der rechten Seite steht vertikal nicht der Nullmorphismus, da z.B. die Abbildung $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ abgebildet wird auf $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$, was ungleich 0 ist.

Aus der Kommutativität des Vierecks und den beiden darin vertretenenen horizontalen Isomorphismen folgt aber, daß auch auf der rechten Seite vertikal der Nullmorphismus steht. Wir haben einen *Widerspruch.*

Aufgabe 41

(1) Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{array}{rcl} \hat{\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}(-,X), F\big) & \xrightarrow{\sim} & FX \\ a = (aY)_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} & \overset{\varphi}{\longmapsto} & (1_X)aX \\ (f \longmapsto \xi(Ff))_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} & \overset{\psi}{\longleftarrow\!\!\shortmid} & \xi\ . \end{array}$$

Zeigen wir, daß ψ wohldefiniert ist, i.e. zeigen wir die Natürlichkeit von $((\xi\psi)Y)_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} = (f \longmapsto \xi(Ff))_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}}$. Sei $Y \xleftarrow{g} Y'$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Wir erhalten folgendes Viereck.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(Y,X) \arrow[r, "(\xi\psi)Y"] \arrow[d, "\mathcal{C}(g,X)"'] & FY \arrow[d, "Fg"] \\ \mathcal{C}(Y',X) \arrow[r, "(\xi\psi)Y'"] & FY' \end{tikzcd}$$

Ist $f \in {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, so kommt es zum einen auf $f\,{}_{\mathcal{C}}(g,X)((\xi\psi)Y') = (gf)((\xi\psi)Y') = \xi F(gf) = \xi(Ff)(Fg)$. Zum anderen kommt es auf $f((\xi\psi)Y)(Fg) = \xi(Ff)(Fg)$. Also kommutiert dieses Viereck.

Zeigen wir, daß $\psi\varphi = \mathrm{id}$. Für $\xi \in FX$ ist $\xi\psi\varphi = (f \longmapsto \xi(Ff))_{Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}\,\varphi = (1_X)(f \longmapsto \xi(Ff)) = \xi(F1_X) = \xi 1_{FX} = \xi$.

Zeigen wir, daß $\varphi\psi = \mathrm{id}$. Für $a = (aY)_{Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \in {}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X), F\big)$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $f \in {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ ist

$$\begin{array}{rcl} f\big((a\varphi\psi)Y\big) & = & f\big(((1_X)(aX)\psi)Y\big) \\ & = & f(f \longmapsto (1_X)(aX)(Ff)) \\ & = & (1_X)(aX)(Ff) \\ & = & (1_X)\,{}_{\mathcal{C}}(f,X)(aY) \\ & = & f(aY)\,. \end{array}$$

Also ist $a\varphi\psi Y = aY$. Also ist $a\varphi\psi = a$. Also ist $\varphi\psi = \mathrm{id}$.

Die Aussage von (1) ist als *Yonedalemma* bekannt.

(2) Setze

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{C}} \\ (X \xrightarrow{f} X') & \longmapsto & \big({}_{\mathcal{C}}(-,X) \xrightarrow{{}_{\mathcal{C}}(-,f)} {}_{\mathcal{C}}(-,X')\big)\,, \end{array}$$

wobei ${}_{\mathcal{C}}(-,f)Y := {}_{\mathcal{C}}(Y,f)$ für $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dies ist eine Transformation, da das Viereck

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}(Y,f)"] \arrow[d, "{}_{\mathcal{C}}(g,X)"'] & {}_{\mathcal{C}}(Y,X') \arrow[d, "{}_{\mathcal{C}}(g,X')"] \\ {}_{\mathcal{C}}(Y',X) \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}(Y',f)"] & {}_{\mathcal{C}}(Y',X') \end{tikzcd}$$

für $Y \xleftarrow{g} Y'$ in $\mathcal{C}$ kommutiert. In der Tat ist ${}_{\mathcal{C}}(Y,f)\,{}_{\mathcal{C}}(g,X') = {}_{\mathcal{C}}(g,f) = {}_{\mathcal{C}}(g,X)\,{}_{\mathcal{C}}(Y',f)$, i.e. es kommt ein $h \in {}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ zum einen auf $h\,{}_{\mathcal{C}}(Y,f)\,{}_{\mathcal{C}}(g,X') = g(hf) = ghf$, und zum anderen auf $h\,{}_{\mathcal{C}}(g,X)\,{}_{\mathcal{C}}(Y',f) = (gh)f = ghf$.

Überprüfen wir, daß ein Funktor vorliegt. Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gegeben. Es kommt 1_X auf die Transformation ${}_{\mathcal{C}}(-,1_X)$, welche an der Stelle $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ den Eintrag ${}_{\mathcal{C}}(Y,1_X) = \mathrm{id}_{\,{}_{\mathcal{C}}(Y,X)}$ hat, welche also die Identität auf ${}_{\mathcal{C}}(-,X)$ ist. Sei $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Bei $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist ${}_{\mathcal{C}}(Y,f)\,{}_{\mathcal{C}}(Y,f') = {}_{\mathcal{C}}(Y,ff')$. Folglich ist ${}_{\mathcal{C}}(-,f)\,{}_{\mathcal{C}}(-,f') = {}_{\mathcal{C}}(-,ff')$.

Es bleibt zu zeigen, daß unser Funktor voll und treu ist. Seien $X,\ X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gegeben. Der Funktor liefert die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathcal{C}}(X,X') & \longrightarrow & {}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X),\, {}_{\mathcal{C}}(-,X')\big) \\ f & \longmapsto & {}_{\mathcal{C}}(-,f) \end{array}$$

Wir haben zu zeigen, daß diese bijektiv ist. Zusammengesetzt mit der Bijektion aus (1) ergibt sich

$$\begin{array}{rclcl} {}_{\mathcal{C}}(X,X') & \longrightarrow & {}_{\hat{\mathcal{C}}}\big({}_{\mathcal{C}}(-,X),\, {}_{\mathcal{C}}(-,X')\big) & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & {}_{\mathcal{C}}(X,X') \\ f & \longmapsto & {}_{\mathcal{C}}(-,f) & \longmapsto & (1_X)\,{}_{\mathcal{C}}(X,f) \;=\; f\,, \end{array}$$

und die Bijektivität unserer Abbildung folgt.

Aufgabe 42

(1) Sei $\mathrm{Ob}\,M^{\mathrm{k}} := M$. Sei $\mathrm{Mor}\,M^{\mathrm{k}} := \{(m,m') \in M \times M \ :\ m \leqslant m'\}$. Schreibe $s_{m,m'} := (m,m')$. Für einen Morphismus sei $m \xrightarrow{s_{m,m'}} m'$. Das Kompositum sei $s_{m,m'}s_{m',m''} := s_{m,m''}$; diese Komposition ist assoziativ, da zwischen zwei Objekten nicht mehr als zwei Morphismen existieren. Beachte, daß

letzterer Morphismus wegen der Transitivität von $(\leqslant)$ auch existiert. Die Identität auf $m \in M$ ist durch $s_{m,m}$ gegeben. Beachte, daß dieser Morphismus wegen der Reflexivität von $(\leqslant)$ auch existiert.

Wir halten noch fest, daß $|\,{}_{M^{\mathrm{k}}}(m,m')| \in \{0,1\}$ nach Konstruktion.

(2) Sei $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} := \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$. Für $m,\ m' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ sei $m \leqslant m'$, falls ${}_{\mathcal{M}}(m,m') \neq \emptyset$.

Zur Reflexivität. Sei $m \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$. Es ist $\mathrm{id}_m \in {}_{\mathcal{M}}(m,m)$. Also ist $m \leqslant m$.

Zur Transitivität. Seien $m,\ m',\ m'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ mit $m \leqslant m'$ und $m' \leqslant m''$. Sei $m \xrightarrow{\alpha} m'$ und $m' \xrightarrow{\beta} m''$. Da $\alpha\beta \in {}_{\mathcal{M}}(m,m'')$, ist $m \leqslant m''$.

Wir haben also eine teilgeordnete Menge $\mathcal{M}^{\mathrm{t}} = (\mathcal{M}^{\mathrm{t}}, \leqslant)$ definiert.

Setze $\mathcal{M}^{\mathrm{tk}} \longrightarrow \mathcal{M}$, $m \longmapsto m$, $s_{m,m'} \longmapsto \alpha$, wobei $\alpha \in {}_{\mathcal{M}}(m,m')$. Dies ist eine wohldefinierte Abbildung auf den Morphismen, da aus $s_{m,m'} \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{M}^{\mathrm{tk}}$ folgt, daß $m \leqslant m'$, i.e. daß $|\,{}_{\mathcal{M}}(m,m')| = 1$. Es liegt ein Funktor vor, da $s_{m,m} \longmapsto \mathrm{id}_m$, weil letzterer der einzige Morphismus in $\mathcal{M}$ von m nach m ist, und da wenn $s_{m,m'} \longmapsto \alpha$ und $s_{m',m''} \longmapsto \beta$, auch $s_{m,m''} \longmapsto \alpha\beta$, weil letzterer der einzige Morphismus in $\mathcal{M}$ von m nach m'' ist.

Dieser Funktor ist strikt dicht – die Abbildung auf den Objekten ist ja sogar die Identität.

Zeigen wir, daß dieser Funktor voll und treu ist. Seien $m,\ m' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ gegeben. Falls $m \not\leqslant m'$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$, dann sind sowohl ${}_{\mathcal{M}^{\mathrm{tk}}}(m,m')$ als auch ${}_{\mathcal{M}}(m,m')$ leer, und die von unserem Funktor induzierte Abbildung von ersterer in zweitere Menge bijektiv. Falls $m \leqslant m'$ in $\mathcal{M}^{\mathrm{t}}$, dann sind sowohl ${}_{\mathcal{M}^{\mathrm{tk}}}(m,m')$ als auch ${}_{\mathcal{M}}(m,m')$ einelementig, und die von unserem Funktor induzierte Abbildung von ersterer in zweitere Menge bijektiv.

Mit Lemma 96 folgt, daß unser Funktor eine Äquivalenz ist. Folglich ist $\mathcal{M}^{\mathrm{tk}} \simeq \mathcal{M}$.

Sei umgekehrt $M = (M, \leqslant)$ eine präteilgeordnete Menge. Die unterliegende Menge von M^{kt} ist gleich $\mathrm{Ob}\,M^{\mathrm{k}} = M$. Für $m,\ m' \in M$ ist nun $m \leqslant m'$ in M genau dann, wenn ${}_{M^{\mathrm{k}}}(m,m') \neq \emptyset$, was wiederum genau dann gilt, wenn $m \leqslant m'$ in M^{kt}. Also sind M und M^{kt} als präteilgeordnete Mengen gleich.

(3) Seien M und N präteilgeordnete Mengen. Sei ${}_{\mathrm{ptM}}(M,N)$ die Menge der monotonen Abbildungen von M nach N. Setze

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathrm{ptM}}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}\,[\![M^{\mathrm{k}}, N^{\mathrm{k}}]\!] \\ f & \longmapsto & f^{\mathrm{k}}\,, \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{rcl} M^{\mathrm{k}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{k}}} & N^{\mathrm{k}} \\ (m \xrightarrow{s_{m,m'}} m') & \longmapsto & (mf \xrightarrow{s_{mf,m'f}} m'f)\,. \end{array}$$

Es ist f^{k} ein Funktor, da zum einen aus $s_{m,m'}$ Morphismus in M^{k}, i.e. aus $m \leqslant m'$, in der Tat folgt, daß $mf \leqslant m'f$, i.e. $s_{mf,m'f}$ Morphismus in N^{k}. Zum zweiten wird die Identität $(m \xrightarrow{s_{m,m}} m)$ auf $m \in \mathrm{Ob}\,M^k$ auf die Identität $(mf \xrightarrow{s_{mf,mf}} mf)$ abgebildet. Sind, zum dritten, Morphismen $m \xrightarrow{s_{m,m'}} m' \xrightarrow{s_{m',m''}} m''$ in M^{k} gegeben, so kommt ihr Kompositum $m \xrightarrow{s_{m,m''}} m''$ auf das Kompositum $mf \xrightarrow{s_{mf,m''f}} m''f$ ihrer Bilder $mf \xrightarrow{s_{mf,m'f}} m'f \xrightarrow{s_{m'f,m''f}} m''f$ in N^{k}.

Zeigen wir, daß $f \longmapsto f^{\mathrm{k}}$ bijektiv ist.

Die Umkehrabbildung bilde einen Funktor F von M^{k} nach N^{k} nach $\mathrm{Ob}\,F$ ab. Es ist $\mathrm{Ob}\,F$ eine monotone Abbildung von M nach N, da aus $m \leqslant m'$ folgt, daß der Morphismus $s_{m,m'}$ in M^{k} existiert, welcher auf einen Morphismus $Fs_{m,m'}$ von Fm nach Fm' abgebildet wird (i.e. auf $s_{Fm,Fm'}$), was $Fm \leqslant Fm'$ zur Folge hat.

Nach Konstruktion ist $\mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}}) = f$.

Sei umgekehrt F ein Funktor von M^{k} nach N^{k}. Wir wollen zeigen, daß $(\mathrm{Ob}\,F)^{\mathrm{k}} = F$. Sei $s_{m,m'}$ ein Morphismus in M^{k}. Dieser wird unter $(\mathrm{Ob}\,F)^{\mathrm{k}}$ auf den einzigen Morphismus von Fm nach Fm' abgebildet, welcher folglich gleich $Fs_{m,m'}$ ist (und auch gleich $s_{Fm,Fm'}$), i.e. $(\mathrm{Ob}\,F)^{\mathrm{k}}s_{m,m'} = Fs_{m,m'}$. Also ist $(\mathrm{Ob}\,F)^{\mathrm{k}} = F$.

Aufgabe 43

(1) Die Aussage ist falsch. Wir verwenden Aufgabe 42 zur Konstruktion eines Gegenbeispiels, unter Verwendung der dortigen Notation.

Sei $P := \{1, 1'\}$. Sei $(\leqslant) := P \times P$, sei also insbesondere $1 \leqslant 1'$ und $1' \leqslant 1$. Dann ist $P = (P, \leqslant)$ präteilgeordnet. Sei $\mathcal{C} := P^{\mathrm{k}}$.

Sei $Q := \{1\}$. Sei $(\leqslant) := Q \times Q = \{(1,1)\}$. Dann ist $Q = (Q, \leqslant)$ präteilgeordnet. Sei $\mathcal{D} := Q^{\mathrm{k}}$.

Sei $f : P \to Q$ mit $1f := 1$ und $1'f := 1$. Für $i,\, j \in P$ gilt: $i \leqslant j \Rightarrow if \leqslant jf$.

Sei $F := f^{\mathrm{k}} : \mathcal{C} = P^{\mathrm{k}} \to Q^{\mathrm{k}} = \mathcal{D}$.

Wir zeigen, daß $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Da für alle $x,\, y \in P^{\mathrm{k}}$ die Menge ${}_{P^{\mathrm{k}}}(x,y)$ aus genau einem Element besteht, da ${}_{Q^{\mathrm{k}}}(1,1) = \{s_{1,1}\}$ ist und da eine Abbildung von einer einelementigen Menge in eine einelementige Menge bijektiv ist, ist f^{k} voll und treu.

Da $\mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}}) : \{1, 1'\} \to \{1\}$ surjektiv ist, ist f^{k} strikt dicht, insbesondere dicht.

Also ist $F = f^{\mathrm{k}}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Aber $\mathrm{Ob}(F) = \mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}})$ ist nicht injektiv.

(2) Die Aussage ist falsch. Wir verwenden die in (1) konstruierten Kategorien $\mathcal{C} := Q^{\mathrm{k}}$ und $\mathcal{D} := P^{\mathrm{k}}$ zur Konstruktion eines Gegenbeispiels.

Sei $g : Q \to P : 1 \mapsto 1$. Für $i,\, j \in Q$ gilt: $i \leqslant j \Rightarrow ig \leqslant jg$.

Sei $F := g^{\mathrm{k}} : \mathcal{C} = Q^{\mathrm{k}} \to P^{\mathrm{k}} = \mathcal{D}$.

Da ${}_{Q^{\mathrm{k}}}(1,1)$ und ${}_{P^{\mathrm{k}}}(1g, 1g) = {}_{P^{\mathrm{k}}}(1,1)$ beide aus einem Element bestehen, ist g^{k} voll und treu.

In P^{k} haben wir den Isomorphismus $1 \xrightarrow{s_{1,1'}} 1'$ mit Inversem $1' \xrightarrow{s_{1',1}} 1$. Insbesondere ist $1 \simeq 1'$.

Somit ist g^{k} dicht.

Folglich ist $F = g^{\mathrm{k}}$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Aber $\mathrm{Mor}(F) = \mathrm{Mor}(g^{\mathrm{k}})$ ist nicht surjektiv, da z.B. $\mathrm{id}_{1'} = s_{1',1'}$ nicht im Bild von $\mathrm{Mor}(g^{\mathrm{k}})$ liegt.

(3) Die Aussage ist richtig.

Als Äquivalenz von Kategorien ist F voll, treu und dicht.

Wir können einen Funktor $\mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ wählen, sowie eine Isotransformation $G \circ F \underset{\sim}{\xrightarrow{a}} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und eine Isotransformation $F \circ G \underset{\sim}{\xrightarrow{b}} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Es ist auch G eine Äquivalenz von Kategorien. Somit ist auch G voll, treu und dicht.

Sei zum einen Fu ein Monomorphismus in $\mathcal{D}$. Wir haben zu zeigen, daß $X \xrightarrow{u} X'$ ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ ist. Seien $T \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} X$ mit $s \cdot u = t \cdot u$ gegeben. Wir haben $s \overset{!}{=} t$ zu zeigen.

Anwendung von F gibt $Fs \cdot Fu = Ft \cdot Fu$. Da Fu monomorph ist, folgt $Fs = Ft$. Da F treu ist, folgt $s = t$.

Sei zum anderen $X \xrightarrow{u} X'$ ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$. Wir haben zu zeigen, daß $FX \xrightarrow{Fu} FX'$ ein Monomorphismus in $\mathcal{D}$ ist. Seien $T \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} FX$ mit $s \cdot Fu = t \cdot Fu$ gegeben. Wir haben $s \overset{!}{=} t$ zu zeigen.

Anwendung von G gibt $Gs \cdot GFu = Gt \cdot GFu$. Nun ist $GFu \cdot aX' = aX \cdot u$.

$$\begin{tikzcd}
GT \arrow[r, shift left, "Gs"] \arrow[r, shift right, "Gt"'] & GFX \arrow[r, "GFu"] \arrow[d, "aX"', "\wr"] & GFX' \arrow[d, "aX'", "\wr"'] \\
& X \arrow[r, "u"] & X'
\end{tikzcd}$$

Also wird $Gs \cdot aX \cdot u = Gs \cdot GFu \cdot aX' = Gt \cdot GFu \cdot aX' = Gt \cdot aX \cdot u$. Da aX und u monomorph sind, folgt $Gs = Gt$. Da G treu ist, folgt $s = t$.

Aufgabe 44

Sei, wie angekündigt, (Rel) die Kategorie der Mengen mit Relationen als Morphismen. Wir erinnern daran, daß für Mengen X und Y also ${}_{(\mathrm{Rel})}(X,Y) = \{R \;:\; R \subseteq X \times Y\} = \mathrm{Pot}(X \times Y)$ ist. Ferner ist für $X \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} Z$ in (Rel) das Kompositum

$$RS \;:=\; \{(x,z) \in X \times Z \;:\; \text{es gibt ein } y \in Y \text{ mit } (x,y) \in R \text{ und } (y,z) \in S\}$$

erklärt. Die Identität auf der Menge X ist gegeben durch $\mathrm{id}_X = \{(x,x) \in X \times X \;:\; x \in X\} : X \longrightarrow X$.

Es hat (Rel) das Nullobjekt $\emptyset$, da für eine Menge X sowohl ${}_{(\mathrm{Rel})}(\emptyset, X) = \mathrm{Pot}(\emptyset \times X) = \{\emptyset\}$ als auch ${}_{(\mathrm{Rel})}(X,\emptyset) = \mathrm{Pot}(X \times \emptyset) = \{\emptyset\}$ einelementig sind. Dementsprechend ist der Nullmorphismus von einer Menge X in eine Menge Y durch $\emptyset \in \mathrm{Pot}(X \times Y) = {}_{(\mathrm{Rel})}(X,Y)$ gegeben, i.e. $0_{X,Y} = \emptyset : X \longrightarrow Y$.

Zu (Add 1). Seien X und Y Mengen. Betrachte die disjunkte Vereinigung

$$X \sqcup Y \;:=\; \{(x,1) \;:\; x \in X\} \sqcup \{(y,2) \;:\; y \in Y\}$$

(leichter Mißbrauch der Notation $\sqcup$).

Wir haben die Relationen

$$\begin{array}{lcllcl} \iota_1 & := & \{(x,(x,1)) \in X \times (X \sqcup Y) \;:\; x \in X\} & : \; X & \longrightarrow & X \sqcup Y \\ \iota_2 & := & \{(y,(y,2)) \in Y \times (X \sqcup Y) \;:\; y \in Y\} & : \; Y & \longrightarrow & X \sqcup Y \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lcllcl} \pi_1 & := & \{((x,1),x) \in (X \sqcup Y) \times X \;:\; x \in X\} & : \; X \sqcup Y & \longrightarrow & X \\ \pi_2 & := & \{((y,2),y) \in (X \sqcup Y) \times Y \;:\; y \in Y\} & : \; X \sqcup Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Wir *behaupten,* daß $X \sqcup Y$, zusammen mit ι_1, ι_2, π_1 und π_2, eine direkte Summe darstellt.

Zu (Sum 1).

Sei S eine Menge. Seien $R_X \subseteq S \times X$, i.e. $R_X : S \longrightarrow X$, und $R_Y \subseteq S \times Y$, i.e. $R_Y : S \longrightarrow Y$, gegeben.

Wir behaupten die *Existenz* und die *Eindeutigkeit* eines $R : S \longrightarrow X \sqcup Y$ mit $R\pi_1 = R_X$ und $R\pi_2 = R_Y$.

Existenz. Setze

$$R \;:=\; \left\{(s,\alpha) \in S \times (X \sqcup Y) \;:\; \begin{array}{l} \text{falls } \alpha = (x,1) \text{ für ein } x \in X, \text{ dann } (s,x) \in R_X\,; \\ \text{falls } \alpha = (y,2) \text{ für ein } y \in Y, \text{ dann } (s,y) \in R_Y \end{array} \right\}$$

Sei $s \in S$.

Sei $x \in X$. Es ist $(s,x) \in R\pi_1$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in R$, da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in π_1 liegt. Nach Konstruktion ist $(s,(x,1)) \in R$ genau dann, wenn $(s,x) \in R_X$. Also $R\pi_1 = R_X$.

Sei $y \in Y$. Es ist $(s,y) \in R\pi_2$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in R$, da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in π_2 liegt. Nach Konstruktion ist $(s,(y,2)) \in R$ genau dann, wenn $(s,y) \in R_Y$. Also $R\pi_2 = R_Y$.

Eindeutigkeit. Sei $\tilde{R} \subseteq S \times (X \sqcup Y)$ mit $\tilde{R}\pi_1 = R_X$ und $\tilde{R}\pi_2 = R_Y$ gegeben. Sei $s \in S$.

Sei $x \in X$. Da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in π_1 liegt, ist $(s,x) \in R_X$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in \tilde{R}$. Auf der anderen Seite ist $(s,x) \in R_X$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in R$. Also ist $(s,(x,1)) \in \tilde{R}$ genau dann, wenn $(s,(x,1)) \in R$.

Sei $y \in Y$. Da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in π_2 liegt, ist $(s,y) \in R_Y$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in \tilde{R}$. Auf der anderen Seite ist $(s,y) \in R_Y$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in R$. Also ist $(s,(y,2)) \in \tilde{R}$ genau dann, wenn $(s,(y,2)) \in R$.

Es folgt $\tilde{R} = R$.

Zu (Sum 2). Genauso wie (Sum 1), viz. :

Sei T eine Menge. Seien $R'_X \subseteq X \times T$, i.e. $R'_X : X \longrightarrow T$, und $R'_Y \subseteq Y \times T$, i.e. $R'_Y : Y \longrightarrow T$, gegeben. Wir behaupten die *Existenz* und die *Eindeutigkeit* eines $R' : X \sqcup Y \longrightarrow T$ mit $\iota_1 R' = R'_X$ und $\iota_2 R' = R'_Y$.

Existenz. Setze

$$R' \;:=\; \left\{ (\alpha, t) \in (X \sqcup Y) \times T \;:\; \begin{array}{l} \text{falls } \alpha = (x,1) \text{ für ein } x \in X, \text{ dann } (x,t) \in R_X \,; \\ \text{falls } \alpha = (y,2) \text{ für ein } y \in Y, \text{ dann } (y,t) \in R_Y \end{array} \right\}$$

Sei $t \in T$.

Sei $x \in X$. Es ist $(x,t) \in \iota_1 R'$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in R'$, da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in ι_1 liegt. Nach Konstruktion ist $((x,1),t) \in R'$ genau dann, wenn $(x,t) \in R'_X$. Also $\iota_1 R' = R'_X$.

Sei $y \in Y$. Es ist $(y,t) \in \iota_2 R'$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in R'$, da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in ι_2 liegt. Nach Konstruktion ist $((y,2),t) \in R'$ genau dann, wenn $(y,t) \in R'_Y$. Also $\iota_2 R' = R'_Y$.

Eindeutigkeit. Sei $\tilde{R}' \subseteq (X \sqcup Y) \times T$ mit $\iota_1 \tilde{R}' = R'_X$ und $\iota_2 \tilde{R}' = R'_Y$ gegeben. Sei $t \in T$.

Sei $x \in X$. Da $(x,1)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit x in ι_1 liegt, ist $(x,t) \in R'_X$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in \tilde{R}'$. Auf der anderen Seite ist $(x,t) \in R'_X$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in R'$. Also ist $((x,1),t) \in \tilde{R}'$ genau dann, wenn $((x,1),t) \in R'$.

Sei $y \in Y$. Da $(y,2)$ das einzige Element in $X \sqcup Y$ ist, welches zusammen mit y in ι_2 liegt, ist $(y,t) \in R'_Y$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in \tilde{R}'$. Auf der anderen Seite ist $(y,t) \in R'_Y$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in R'$. Also ist $((y,2),t) \in \tilde{R}'$ genau dann, wenn $((y,2),t) \in R'$.

Es folgt $\tilde{R}' = R'$.

Zu (Sum 3).

Seien $x,\, x' \in X$. Da $(x,1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x in ι_1 liegt, und da $(x',1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x' in π_1 liegt, ist $(x,x') \in \iota_1\pi_1$ genau dann, wenn $x = x'$. Also ist $\iota_1\pi_1 = \mathrm{id}_X$.

Seien $y,\, y' \in Y$. Da $(y,2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y in ι_2 liegt, und da $(y',2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y' in π_2 liegt, ist $(y,y') \in \iota_2\pi_2$ genau dann, wenn $y = y'$. Also ist $\iota_2\pi_2 = \mathrm{id}_Y$.

Sei $x \in X$, sei $y' \in Y$. Da $(x,1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x in ι_1 liegt, und da $(y',2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y' in π_2 liegt, und da $(x,1) \neq (y',2)$, liegt (x,y') nicht in $\iota_1\pi_2$. Folglich ist $\iota_1\pi_2 = \emptyset = 0_{X,Y}$.

Sei $y \in Y$, sei $x' \in X$. Da $(y,2)$ das einzige Element ist, das zusammen mit y in ι_2 liegt, und da $(x',1)$ das einzige Element ist, das zusammen mit x' in π_1 liegt, und da $(y,2) \neq (x',1)$, liegt (y,x') nicht in $\iota_2\pi_1$. Folglich ist $\iota_2\pi_1 = \emptyset = 0_{Y,X}$.

Dies zeigt die *Behauptung,* und damit (Add 1).

Gegen (Add 2). Um zu zeigen, daß (Add 2) nicht gilt, zeigen wir, daß für $X = \{1\}$ die Relation $X \sqcup X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} X \sqcup X$ kein Isomorphismus in (Rel) ist.

Kürze $\underline{1} := (1,1)$ und $\underline{2} := (1,2)$ ab, also $X \sqcup X = \{\underline{1}, \underline{2}\}$.

Berechnen wir einmal $X \xrightarrow{(1\,1)} X \sqcup X$ als Teilmenge von $X \times (X \sqcup X) = \{(1,\underline{1}),\, (1,\underline{2})\}$. Beachte, daß $\pi_1 = \{(\underline{1},1)\} : X \sqcup X \longrightarrow X$. Da $(1\,1)\,\pi_1 = 1 = \{(1,1)\}$, folgt $(1,\underline{1}) \in (1\,1)$. Beachte, daß $\pi_2 = \{(\underline{2},1)\}$:

$X \sqcup X \longrightarrow X$. Da $(\,1\;1\,)\,\pi_2 = 1 = \{(1,1)\}$, folgt $(1,\underline{2}) \in (\,1\;1\,)$. Also ist $(\,1\;1\,) = X \times (X \sqcup X)$.

Cf. auch den obigen Nachweis von (Sum 1), darin den Existenznachweis.

Angenommen, es ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{id}_{X \sqcup X}$.

Dann ist $0 = \iota_2 \, \mathrm{id}_{X \sqcup X}\, \pi_1 = \iota_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\pi_1 = (\,1\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$. Da $(\,1\;1\,) = \{(1,\underline{1}),\, (1,\underline{2})\} = X \times (X \sqcup X)$, kann das nur erfüllt sein, wenn $\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right) = \emptyset = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : X \sqcup X \longrightarrow X$.

Sodann ist $1 = \iota_1 \, \mathrm{id}_{X \sqcup X}\, \pi_1 = \iota_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\pi_1 = \iota_1 \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\pi_1 = 0$, und wir haben einen *Widerspruch.*

Aufgabe 45

(1) Wir führen eine Induktion über m. Für $m = 0$ ist 0 eine direkte Summe wie verlangt.

Sei nun $m \geqslant 1$ und eine direkte Summe $X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}$ von $(X_1, \ldots, X_{m-1})$ als existent vorausgesetzt, zusammen mit Inklusionsmorphismen $\iota'_1, \ldots, \iota'_{m-1}$ und Projektionsmorphismen $\pi'_1, \ldots, \pi'_{m-1}$. Bilde die direkte Summe $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$, zusammen mit Inklusionsmorphismen

$$X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1} \xrightarrow{\iota''_1} (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \qquad \text{und} \qquad X_m \xrightarrow{\iota''_2} (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \;,$$

sowie Projektionsmorphismen

$$(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \xrightarrow{\pi''_1} X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1} \qquad \text{und} \qquad (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \xrightarrow{\pi''_2} X_m \;.$$

Wir *behaupten,* daß $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$, zusammen mit

$$\iota_i := \begin{cases} \iota'_i \iota''_1 & \text{für } i \in [1, m-1] \\ \iota''_2 & \text{für } i = m \end{cases}$$

und

$$\pi_i := \begin{cases} \pi''_1 \pi'_i & \text{für } i \in [1, m-1] \\ \pi''_2 & \text{für } i = m \end{cases}$$

eine direkte Summe von $(X_1, \ldots, X_m)$ ist.

Zu (Sum 1). Sei $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ und ein Tupel von Morphismen $(S \xrightarrow{s_i} X_i)_{i \in [1,m]}$ gegeben. Setze $s := \big(\,(\, s_1 \,\cdots\, s_{m-1}\,)\; s_m\,\big) : S \longrightarrow (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$. Es wird $s\pi_i = s\pi''_1\pi'_i = (\, s_1 \,\cdots\, s_{m-1}\,)\,\pi'_i = s_i$ für $i \in [1, m-1]$ und $s\pi_m = s\pi''_2 = s_m$. Sei umgekehrt $\tilde{s} : S \longrightarrow (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m$ mit $\tilde{s}\pi_i = s_i$ für $i \in [1, m]$ gegeben. Dann ist zum einen $\tilde{s}\pi''_2 = \tilde{s}\pi_m = s_m$. Zum anderen ist $\tilde{s}\pi''_1 = (\, s_1 \,\cdots\, s_{m-1}\,)$, da $\tilde{s}\pi''_1\pi'_i = \tilde{s}\pi_i = s_i$ für $i \in [1, m-1]$. Insgesamt ist $\tilde{s} = s$.

Zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1), viz.: Sei $T \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ und ein Tupel von Morphismen $(X_i \xrightarrow{t_i} T)_{i \in [1,m]}$ gegeben. Setze $t := \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{smallmatrix}\right) \\ t_m \end{smallmatrix}\right) : (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \longrightarrow T$. Es wird $\iota_i t = \iota'_i \iota''_1 t = \iota'_i \left(\begin{smallmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{smallmatrix}\right) = t_i$ für $i \in [1, m-1]$ und $\iota_m t = \iota''_2 t = t_m$.

Sei umgekehrt $\tilde{t} : (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{m-1}) \oplus X_m \longrightarrow T$ mit $\iota_i \tilde{t} = t_i$ für $i \in [1, m]$ gegeben. Dann ist zum einen $\iota''_2 \tilde{t} = \iota_m \tilde{t} = t_m$. Zum anderen ist $\iota''_1 \tilde{t} = \left(\begin{smallmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{m-1} \end{smallmatrix}\right)$, da $\iota'_i \iota''_1 \tilde{t} = \iota_i \tilde{t} = t_i$ für $i \in [1, m-1]$.

Insgesamt ist $\tilde{t} = t$.

Zu (Sum 3). Sei $i \in [1, m]$. Es ist $\iota_i \pi_i = \iota'_i \iota''_1 \pi''_1 \pi'_i = \iota'_i \pi'_i = 1$, falls $i \in [1, m-1]$. Es ist $\iota_i \pi_i = \iota''_2 \pi''_2 = 1$, falls $i = m$.

Seien $i,\, j \in [1, m]$ mit $i \neq j$. Es ist $\iota_i \pi_j = \iota'_i \iota''_1 \pi''_1 \pi'_j = \iota'_i \pi'_j = 0$, falls $i \in [1, m-1]$ und $j \in [1, m-1]$. Es ist $\iota_i \pi_j = \iota'_i \iota''_1 \pi''_2 = 0$, falls $i \in [1, m-1]$ und $j = m$. Es ist $\iota_i \pi_j = \iota''_2 \pi''_1 \pi'_j = 0$, falls $i = m$ und $j \in [1, m-1]$.

Cf. Bemerkung 101.

(2) Sei $i \in [1, \ell]$. Sei $k \in [1, n]$.

Sei $s \in [1, m]$. Zum einen ist $\iota_s \pi_s f_{i,s} = 1 \cdot f_{i,s} = \iota_s \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \pi_s$. Zum anderen ist für $t \in [1, m]$ mit $t \neq s$ auch $\iota_t \pi_s f_{i,s} = 0 \cdot f_{i,s} = 0 = \iota_t \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \pi_s$. Also ist $\pi_s f_{i,s} = \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \pi_s$.

Für $s \in [1, m]$ ist folglich

$$\begin{pmatrix} f_{i,1} & \cdots & f_{i,m} \end{pmatrix} \pi_s \;=\; f_{i,s} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \pi_s f_{i,s} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \pi_s \; ,$$

und also $\begin{pmatrix} f_{i,1} & \cdots & f_{i,m} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix}$.

Sei $s \in [1, m]$. Zum einen ist $g_{s,k} \iota_s \pi_s = g_{s,k} \cdot 1 = \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \pi_s$. Zum anderen ist für $t \in [1, m]$ mit $t \neq s$ auch $g_{s,k} \iota_s \pi_t = g_{s,k} \cdot 0 = 0 = \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \pi_t$. Also ist $g_{s,k} \iota_s = \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix}$.

Für $s \in [1, m]$ ist folglich

$$\iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} \\ \vdots \\ g_{m,k} \end{pmatrix} \;=\; g_{s,k} \;=\; g_{s,k} \iota_s \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \iota_s \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \; ,$$

und also $\begin{pmatrix} g_{1,k} \\ \vdots \\ g_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schließlich wird für $s \in [1, m]$

$$\begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \pi_s \;=\; \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \pi_s g_{s,k} \;=\; \pi_s f_{i,s} g_{s,k} \;=\; \begin{pmatrix} f_{i,1} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} g_{m_k} \end{pmatrix} \pi_s \; ,$$

und folglich $\begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{i,1} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} g_{m_k} \end{pmatrix}$.

Unter Verwendung dessen wird

$$\begin{aligned} \iota_i (f_{i,j})_{i,j} \, (g_{j,k})_{j,k} \pi_k \;&=\; \begin{pmatrix} f_{i,1} & \cdots & f_{i,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,k} \\ \vdots \\ g_{m,k} \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,1} g_{1,k} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{i,m} g_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &=\; \textstyle\sum_{j \in [1,m]} f_{i,j} g_{j,k} \; . \end{aligned}$$

Es folgt $(f_{i,j})_{i,j} \, (g_{j,k})_{j,k} \;=\; \left(\sum_{j \in [1,m]} f_{i,j} g_{j,k} \right)_{i,k}$.

Cf. Bemerkung 103.

(3) Bemerken wir zunächst, daß allgemein $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} v \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} u_1 v \\ \vdots \\ u_m v \end{pmatrix}$, wie man mit (2) oder direkt, durch Vergleich nach Komposition mit ι_i von links für $i \in [1, m]$, sieht.

Dual ist allgemein $v \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} \begin{pmatrix} v w_1 & \cdots & v w_n \end{pmatrix}$.

Beachte nun, daß

$$\begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota_1 \\ \vdots \\ \iota_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \dots \pi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i$$

und analog

$$\begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \iota_1 \\ \vdots \\ \iota_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{k+1} \dots \pi_{k+\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \textstyle\sum_{i\in[1,\ell]} f_{i+k} \,.$$

Ganz analog erhalten wir $f_i + 0 = \begin{pmatrix} 1\, 1 \end{pmatrix} \binom{f_i}{0} = \begin{pmatrix} 1\, 1 \end{pmatrix} \binom{1}{0} f_i = \begin{pmatrix} 1\, 1 \end{pmatrix} \pi_1\, f_i = 1 \cdot f_i = f_i$ und $0 + f_i = \begin{pmatrix} 1\, 1 \end{pmatrix} \binom{0}{f_i} = \begin{pmatrix} 1\, 1 \end{pmatrix} \binom{0}{1} f_i = \begin{pmatrix} 1\, 1 \end{pmatrix} \pi_2\, f_i = 1 \cdot f_i = f_i$ für $i \in [1, k+\ell]$.
Wir haben nun

$$\begin{aligned}
(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i) + (\textstyle\sum_{i\in[1,\ell]} f_{i+k}) &= \begin{pmatrix} \sum_{i\in[1,k]} f_i & \sum_{i\in[1,\ell]} f_{i+k} \end{pmatrix} \binom{1}{1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ f_k & 0 \\ 0 & f_{k+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & f_{k+\ell} \end{pmatrix} \binom{1}{1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1+0 \\ \vdots \\ f_k+0 \\ 0+f_{k+1} \\ \vdots \\ 0+f_{k+\ell} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \dots 1\, 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+\ell} \end{pmatrix} \\
&= \textstyle\sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i \,.
\end{aligned}$$

Cf. Bemerkung 104.

(4) Es wird

$$\begin{aligned}
(\textstyle\sum_{i\in[1,k]} f_i)(\textstyle\sum_{j\in[1,\ell]} g_j) &\overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \dots g_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 g_1 & \dots & f_1 g_\ell \\ \vdots & & \vdots \\ f_k g_1 & \dots & f_k g_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j\in[1,\ell]} f_1 g_j \\ \vdots \\ \sum_{j\in[1,\ell]} f_k g_j \end{pmatrix} \\
&\overset{(2)}{=} \textstyle\sum_{i\in[1,k]} \sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j \,.
\end{aligned}$$

Cf. Bemerkung 105.

(5) *Nochmals zur Assoziativität.* Seien $f_1,\ f_2,\ f_3 \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Gemäß (3) ist

$$(f_1+f_2)+f_3 \;=\; (\textstyle\sum_{i\in[1,2]} f_i) + (\sum_{i\in[3,3]} f_i) \;=\; \sum_{i\in[1,3]} f_i \;=\; (\sum_{i\in[1,1]} f_i) + (\sum_{i\in[2,3]} f_i) \;=\; f_1+(f_2+f_3)\;.$$

Nochmals zum neutralen Element. Sei $f \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.
Es ist, wie auch schon in (3) bemerkt, $f+0 = (\,1\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} f \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = (\,1\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) f = (\,1\;1\,)\,\pi_1\, f \;=\; 1\cdot f = f$ und $0+f = (\,1\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ f \end{smallmatrix}\right) = (\,1\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) f = (\,1\;1\,)\,\pi_2\, f = 1\cdot f = f$.
Zur Kommutativität. Seien $f,\ g \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$. Es wird

$$f+g \;=\; (\,1\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right) \;=\; (\,1\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} 0 & f \\ g & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; (\,g\;f\,)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; g+f\;.$$

Zum additiv Inversen. Sei $f \in {}_{\mathcal{A}}(X,Y)$.
Nach (Add 2) aus Definition 99 ist $X\oplus X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)} X\oplus X$ ein Isomorphismus. Sei $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)$ sein Inverses.
Es wird

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ u+w & v+x \end{smallmatrix}\right)\;.$$

Also ist $u=1$, $v=0$, und folglich $x=1$ und $1+w=0$.
Mit (4) folgt $f+wf = 1\cdot f + w\cdot f = (1+w)f = 0\cdot f = 0$.
Cf. Bemerkung 106.

In einer Kategorie mit Nullobjekt, welche (Add 1) erfüllt, ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ stets ein Monomorphismus, da aus $0 = (\,s\;t\,)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (\,s{+}t\;\;0{+}t\,)$ zunächst $t=0$ und dann auch $s=0$ folgt, wie sich aus dem bisherigen ergibt. Dual hierzu ist darin $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ stets auch epimorph. Ist in einer solchen Kategorie also desweiteren bekannt, daß Morphismen, die mono- und epimorph sind, bereits Isomorphismen sind, dann ist sie additiv. Umgekehrt gibt es in (Rel) Morphismen, die Mono- und Epi-, aber keine Isomorphismen sind; cf. Aufgabe 44.

(6) Sei $k\in[1,m]$. Sei $\ell\in[1,n]$. Mit (4) wird

$$\iota_k\big((f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j}\big)\pi_\ell \;=\; \iota_k(f_{i,j})_{i,j}\pi_\ell + \iota_k(f'_{i,j})_{i,j}\pi_\ell \;=\; f_{k,\ell} + f'_{k,\ell}\;.$$

Also ist $(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} = (f_{i,j}+f'_{i,j})_{i,j}\,$.
Cf. Bemerkung 107.

(7) Wir behaupten, daß

$$(X\oplus Y)\oplus Z \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (\,0\;0\;1\,) \end{smallmatrix}\right)} X\oplus Y\oplus Z$$

ein Isomorphismus ist, der von

$$(X\oplus Y)\oplus Z \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)} X\oplus Y\oplus Z$$

invertiert wird.
In der Tat wird unter Verwendung von (2)

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (\,0\;0\;1\,) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ (\,0\;0\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & (\,0\;0\;1\,)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (\,0\;0\,) & 1 \end{pmatrix} \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 1$$

und

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ (\,0\;0\;1\,) \end{pmatrix} \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)(\,0\;0\;1\,) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \;=\; 1\;.$$

Aufgabe 46

(1) Die Aussage ist richtig.

Sind a und d Isomorphismen, dann ist $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus, mit $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$.

Sei umgekehrt $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus. Sei $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} au & av \\ dw & dx \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ua & vd \\ wa & xd \end{smallmatrix}\right)$. Es folgt, daß a ein Isomorphismus ist mit $a^{-1} = u$ und daß d ein Isomorphismus ist mit $d^{-1} = x$. (Ferner folgt $v = 0$ und $w = 0$.)

(2) Die Aussage ist falsch.

Die inverse Implikation trifft zu. Seien a und d Isomorphismen. Es wird $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus, mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}$.

Die direkte Implikation trifft nicht zu. Betrachte e.g. in $\mathcal{A} = \mathbf{Q}$-Mod den Morphismus $\mathbf{Q} \oplus 0 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} 0 \oplus \mathbf{Q}$. Dies ist ein Isomorphismus mit dem Inversen $\mathbf{Q} \oplus 0 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} 0 \oplus \mathbf{Q}$. In der Tat ist $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, da $0_0 = 1_0$; und genauso $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(3) Die Aussage ist richtig.

Falls a und d Isomorphismen sind, so haben wir bereits beim Beweis der zutreffenden inversen Implikation in (2) gesehen, daß dann auch $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus ist.

Sei umgekehrt $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus. Sei $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} au+bw & av+bx \\ dw & dx \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ua & ub+vd \\ wa & wb+xd \end{smallmatrix}\right)$. Da $X = X'$ und da $ua = 1$, ist $X \xrightarrow{a} X$ eine Retraktion und somit nach Voraussetzung ein Isomorphismus. Aus $wa = 0$ folgt $w = 0$. Es ist $dx = 1$ und $xd = wb + xd = 1$. Also ist auch d ein Isomorphismus.

Aufgabe 47

Zeigen wir, daß $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X), +, \cdot)$ ein Ring ist, wobei $(+)$ resp. $(\cdot)$ die Morphismenaddition resp. -komposition aus $\mathcal{A}$ bezeichnet.

(Ring 1) Dank Bemerkung 106 ist $(\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X), +)$ eine abelsche Gruppe.

(Ring 2) Assoziativität von $(\cdot)$ folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).

(Ring 3) Das neutrale Element bezüglich $(\cdot)$ ist id_X , cf. (Kat 1,2).

(Ring 4) Distributivität von $(+, \cdot)$ folgt aus Bemerkung 105.

Zeigen wir, daß $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), +, \cdot, *)$ ein $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$-$\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Y)$-Bimodul ist, wobei $(+)$ durch die Morphismenaddition in $\mathcal{A}$ gegeben ist und wobei sowohl $(\cdot)$ als auch $(*)$ durch die Komposition in $\mathcal{A}$ gegeben sind.

(BiMod 1)

(LMod 1) Dank Bemerkung 106 ist $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), +)$ eine abelsche Gruppe.

(LMod 2) Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).

(LMod 3) Es verhält sich id_X multiplikativ neutral gemäß (Kat 2).

(LMod 4) Distributivität von $(+, \cdot)$ folgt aus Bemerkung 105.

(BiMod 2)

(RMod 1) Siehe (LMod 1) oben.

(RMod 2) Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).

(RMod 3) Es verhält sich id_Y multiplikativ neutral gemäß (Kat 2).

(RMod 4) Distributivität von $(+, *)$ folgt aus Bemerkung 105.

(BiMod 3) Die Assoziativität der beiden Skalarmultiplikationen $(\cdot)$ und $(*)$ folgt aus der Assoziativität der Komposition in $\mathcal{A}$, i.e. (Kat 4).

Übrigens. Seien R und S Ringe. Ein R-Linksmodul ist auffaßbar als eine abelsche Gruppe M, zusammen mit einem Ringmorphismus $R^\circ \to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}} M$, $r \mapsto r \cdot (-)$. Ein S-Rechtsmodul ist auffaßbar als eine abelsche Gruppe M, zusammen mit einem Ringmorphismus $S \to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}} M$, $r \mapsto (-) * r$. Ein R-S-Bimodul ist auffaßbar als eine abelsche Gruppe M, zusammen mit einem Ringmorphismus $R^\circ \otimes_{\mathbf{Z}} S \to \mathrm{End}_{\mathbf{Z}} M$, $r \otimes s \mapsto r \cdot (-) * s$; cf. Aufgabe 28.

Aufgabe 48

Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2). Da F additiv ist, sind $\begin{pmatrix} F\pi_1 & F\pi_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix}$ sich invertierende Isomorphismen.

Sei $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. Seien $Y \xrightarrow{s_1} FX_1$ und $Y \xrightarrow{s_2} FX_2$ Morphismen in $\mathcal{B}$. Sei $s := \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix}$. Es wird

$$s \cdot F\pi_1 \;=\; \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix} F\pi_1 \;=\; \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\iota_1\pi_1) \\ F(\iota_2\pi_1) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; s_1 \,.$$

Analog wird $s \cdot F\pi_2 = s_2$.

Sei nun umgekehrt $Y \xrightarrow{\tilde{s}} F(X_1 \oplus X_2)$ mit $\tilde{s} \cdot F\pi_1 = s_1$ und $\tilde{s} \cdot F\pi_2 = s_2$ gegeben. Dann wird

$$\tilde{s} \;=\; \tilde{s} \begin{pmatrix} F\pi_1 & F\pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \tilde{s}\cdot F\pi_1 & \tilde{s}\cdot F\pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F\iota_1 \\ F\iota_2 \end{pmatrix} \;=\; s \,.$$

Wir zeigen (1) $\Leftarrow$ (2). Seien X_1, $X_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ gegeben, und werde die direkte Summe $X_1 \oplus X_2$ betrachtet.

Es genügt zu zeigen, daß $\begin{pmatrix} F\pi_1 & F\pi_2 \end{pmatrix}$ monomorph ist; cf. Bemerkung 109. Sei $t \begin{pmatrix} F\pi_1 & F\pi_2 \end{pmatrix} = 0$. Dann ist $0 = t \begin{pmatrix} F\pi_1 & F\pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cdot F\pi_1 & t\cdot F\pi_2 \end{pmatrix}$, und also $t\cdot F\pi_1 = 0 = 0\cdot F\pi_1$ und $t\cdot F\pi_2 = 0 = 0\cdot F\pi_2$. Nach Voraussetzung an $F\pi_1$ und $F\pi_2$ folgt, daß $t = 0$ ist.

Aufgabe 49

Sei $Z \xrightarrow[\sim]{(u\ v)} X \oplus Y$. Seien $X \oplus Y \xrightarrow{\pi_X} X$ und $X \oplus Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ die Projektionen auf die Summanden; i.e. $\pi_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pi_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
FZ \arrow[r, "\alpha Z"] \arrow[d, "F(u\ v)"', "\wr"] & GZ \arrow[d, "G(u\ v)", "\wr"'] \\
F(X \oplus Y) \arrow[r, "\alpha(X\oplus Y)"] \arrow[d, "(F\pi_X\ F\pi_Y)"', "\wr"] & G(X \oplus Y) \arrow[d, "(G\pi_X\ G\pi_Y)", "\wr"'] \\
FX \oplus FY \arrow[r, "\begin{pmatrix} \alpha X & 0 \\ 0 & \alpha Y \end{pmatrix}"] & GX \oplus GY
\end{tikzcd}$$

In der Tat kommutiert das obere Viereck dank der Natürlichkeit von α. Das untere Viereck kommutiert wegen

$$\alpha(X\oplus Y) \begin{pmatrix} G\pi_X & G\pi_Y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (\alpha(X\oplus Y))(G\pi_X) & (\alpha(X\oplus Y))(G\pi_Y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (F\pi_X)(\alpha X) & (F\pi_Y)(\alpha Y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} F\pi_X & F\pi_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha X & 0 \\ 0 & \alpha Y \end{pmatrix} \,.$$

Sind αX und αY Isomorphismen, so auch $\left(\begin{smallmatrix}\alpha X & 0\\ 0 & \alpha Y\end{smallmatrix}\right)$ und damit auch αZ. Ist umgekehrt αZ ein Isomorphismus, so auch $\left(\begin{smallmatrix}\alpha X & 0\\ 0 & \alpha Y\end{smallmatrix}\right)$ und damit αX und αY. Cf. Aufgabe 46.(1).

Aufgabe 50

(1) Zunächst einmal halten wir fest, daß $0_{\mathcal{A}}$ auch in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein Nullobjekt ist, da zu und von diesem Objekt nur je ein repräsentierender Morphismus existiert. Wir können also $0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}} := 0_{\mathcal{A}}$ wählen.

Zeigen wir, daß die Kategorie $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ additiv ist.

Zu (Add 1). Seien X_1, $X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Wir bilden $X_1 \oplus X_2$ in $\mathcal{A}$, zusammen mit Inklusionsmorphismen ι_1, ι_2 und Projektionsmorphismen π_1, π_2.

Wir *behaupten,* daß $X_1 \oplus X_2$ zusammen mit den gleichnamigen Restklassen ι_1, ι_2, π_1 und π_2 eine direkte Summe ist.

Zu (Sum 1). Sei $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Seien $S \xrightarrow{s_1} X_1$ und $S \xrightarrow{s_2} X_2$ Morphismen in $\mathcal{A}$, welche Morphismen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ repräsentieren. Dann sind die Gleichheiten $(\,s_1\; s_2\,)\,\pi_1 = s_1$ und $(\,s_1\; s_2\,)\,\pi_2 = s_2$ bereits in $\mathcal{A}$ gültig, also a fortiori auch in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. Sei $S \xrightarrow{(\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,)} X_1 \oplus X_2$ mit $\tilde{s}_1 = (\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,)\,\pi_1 \equiv_{\mathcal{N}} s_1$ und $\tilde{s}_2 = (\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,)\,\pi_2 \equiv_{\mathcal{N}} s_2$. Zu zeigen ist, daß $(\,\tilde{s}_1\; \tilde{s}_2\,) \overset{!}{\equiv}_{\mathcal{N}} (\,s_1\; s_2\,)$, i.e. daß $(\,\tilde{s}_1 - s_1 \;\; \tilde{s}_2 - s_2\,) \overset{!}{\equiv}_{\mathcal{N}} 0$.

Wir können $(S \xrightarrow{\tilde{s}_1 - s_1} X_1) = (S \xrightarrow{u_1} N_1 \xrightarrow{v_1} X_1)$ und $(S \xrightarrow{\tilde{s}_2 - s_2} X_2) = (S \xrightarrow{u_2} N_2 \xrightarrow{v_2} X_2)$ faktorisieren. Also wird

$$\left(S \xrightarrow{(\,\tilde{s}_1 - s_1 \;\; \tilde{s}_2 - s_2\,)} X_1 \oplus X_2 \right) \;=\; \left(S \xrightarrow{(\,u_1\; u_2\,)} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} v_1 & 0\\ 0 & v_2\end{smallmatrix}\right)} X_1 \oplus X_2 \right),$$

und $N_1 \oplus N_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Somit ist in der Tat $(\,\tilde{s}_1 - s_1 \;\; \tilde{s}_2 - s_2\,) \equiv_{\mathcal{N}} 0$.

Zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1).

Zu (Sum 3). Vererbt sich von $\mathcal{A}$.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Zu (Add 2). Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Bemerken wir zunächst, daß, ausführlich geschrieben,

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right) + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X \oplus X,\, X \oplus X) \;=\; \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X) & 0 + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X)\\ 1 + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X) & 1 + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X,X)\end{pmatrix},$$

wie Komposition der linken Seite mit ι_i und π_j in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ für $i, j \in \{1, 2\}$ zeigt.

Da $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ in $\mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist, ist nun auch $R\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right) + \mathrm{Null}_{\mathcal{A},\mathcal{N}}(X \oplus X,\, X \oplus X)$ in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein Isomorphismus.

Zeigen wir, daß der Funktor $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ additiv ist.

Beachte, daß R auf den Objekten identisch operiert.

Zunächst ist $R0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}$, wie schon festgestellt.

Seien X_1, $X_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Es ist zu zeigen, daß $R(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{(\,R\pi_1\; R\pi_2\,)} RX_1 \oplus RX_2$ monomorph ist. Da direkte Summen in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ nach dem eben Gezeigten wie in $\mathcal{A}$ gebildet werden, und da das auch für die Repräsentanten der Inklusions- und Projektionsmorphismen zutrifft, ist dieser Morphismus gleich

$$X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)} X_1 \oplus X_2,$$

i.e. gleich der Identität, welche insbesondere monomorph ist.

Cf. Bemerkung 115.

(2) *Zur Eindeutigkeit.*

Da $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ auf den Morphismen surjektiv abbildet, ist $\bar{F}$ durch die Bedingung $\bar{F} \circ R = F$ eindeutig festgelegt.

Zur Existenz.

Setze $\bar{F}RX = \bar{F}X := FX$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Setze $\bar{F}(RX \xrightarrow{Rf} RX') := F(X \xrightarrow{f} X')$ für $X \xrightarrow{f} X'$ in $\mathcal{A}$. Dies ist wohldefiniert, da aus $Rf = R\tilde{f}$ folgt, daß wir eine Faktorisierung

$$(X \xrightarrow{f-\tilde{f}} X') \;=\; (X \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} X')$$

mit $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ haben, und sich folglich

$$(FX \xrightarrow{\quad Ff-F\tilde{f}\quad} FX') \;=\; (FX \xrightarrow{\quad F(f-\tilde{f})\quad} FX') \;=\; (FX \xrightarrow{Fu} \underbrace{FN}_{\simeq 0} \xrightarrow{Fv} FX') \;=\; 0$$

ergibt, wobei $X \overset{f}{\underset{\tilde{f}}{\rightrightarrows}} X'$ in $\mathcal{A}$.

Es ist $\bar{F}$ ein Funktor, da zum einen für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$

$$\bar{F}(RX \xrightarrow{\mathrm{id}_{RX} = R\,\mathrm{id}_X} RX) \;=\; F(X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X) \;=\; (FX \xrightarrow{F\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{FX}} FX)$$

ist, und sich für $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$ in $\mathcal{A}$ zum anderen

$$\begin{aligned}
\bar{F}(RX \xrightarrow{\quad (Rf)(Rf')\quad} RX'') \;&=\; \bar{F}(RX \xrightarrow{R(ff')} RX'') \\
&=\; F(X \xrightarrow{ff'} X'') \\
&=\; F(X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X'') \\
&=\; (FX \xrightarrow{Ff} FX' \xrightarrow{Ff'} FX'') \\
&=\; (\bar{F}RX \xrightarrow{\bar{F}Rf} \bar{F}RX' \xrightarrow{\bar{F}Rf'} \bar{F}RX'')
\end{aligned}$$

ergibt.

Nach Konstruktion ist $\bar{F} \circ R = F$.

Schließlich ist $\bar{F}0_{\mathcal{A}/\mathcal{N}} = \bar{F}R0_{\mathcal{A}} = F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$ und

$$\left(\bar{F}\pi_1\ \bar{F}\pi_2\right) \;=\; \left(\bar{F}R\pi_1\ \bar{F}R\pi_2\right) \;=\; \left(F\pi_1\ F\pi_2\right) \;:\; F(X_1 \oplus X_2) \longrightarrow FX_1 \oplus FX_2$$

ein Isomorphismus für $X_1\,,\, X_2 \,\in\, \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Also ist $\bar{F}$ additiv.

Cf. Bemerkung 116.(1).

(3) *Zur Eindeutigkeit.* Da $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ auf den Objekten identisch, und damit insbesondere surjektiv abbildet, ist $\bar{\alpha}$ durch die Bedingung $\bar{\alpha}RX = \alpha X$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ eindeutig festgelegt.

Zur Existenz. Wir setzen $\bar{\alpha}X := \alpha X$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Wir haben die Natürlichkeit von $(\alpha X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N})}$ zu zeigen. Repräsentiert $X \xrightarrow{f} X'$ einen Morphismus gleichen Namens in $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, so wird in der Tat

$$(\bar{F}f)(\bar{\alpha}X') \;=\; (Ff)(\alpha X') \;=\; (\alpha X)(Gf) \;=\; (\bar{\alpha}X)(\bar{G}f)\,.$$

Cf. Bemerkung 116.(2).

Aufgabe 51

(1) Schreibe $F := {}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\text{-Mod}^\circ \longrightarrow \mathbf{Z}\text{-Mod}$. Es ist F ein additiver Funktor; cf. Beispiel 113.(3).

Jedes Objekt von $\mathbf{Z}/k$-mod ist isomorph zu einer direkten Summe zyklischer abelscher Gruppen der Form $\mathbf{Z}/\ell$ mit $\ell\,|\,k$; cf. Aufgabe 18, Bemerkung 40. Wollen wir also zeigen, daß F zu einem Funktor F_k von $\operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod nach $\operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod einschränkt, genügt es zu zeigen, daß $F(\mathbf{Z}/\ell)$ in $\operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod liegt. Aber es ist

$$F(\mathbf{Z}/\ell) \;=\; {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/\ell,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \;=\; \{\mathbf{Z}/\ell \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,,\; z+\ell\mathbf{Z} \longmapsto z\cdot\tfrac{a}{\ell}+\mathbf{Z} \;:\; a\in\mathbf{Z}\}\,.$$

Folglich ist

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/\ell & \xrightarrow[\sim]{\sigma_\ell} & F(\mathbf{Z}/\ell) \\ a+\ell\mathbf{Z} & \longmapsto & (z+\ell\mathbf{Z} \longmapsto z\cdot\tfrac{a}{\ell}+\mathbf{Z})\,. \end{array}$$

Behauptung. Es ist $F_k^2 \simeq \mathrm{id} : \mathbf{Z}/k\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Z}/k\text{-mod}$.

Gemäß Beispiel 93 haben wir eine Transformation von $\mathrm{id}_{\mathbf{Z}\text{-Mod}}$ nach ${}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}(-,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = F^2$, die bei $X\in\operatorname{Ob}\mathbf{Z}\text{-Mod}$ gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{\tau X} & F^2X \;=\; {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}(X,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ x & \longmapsto & \qquad\qquad (f \longmapsto xf)\,. \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, daß τX für $X\in\operatorname{Ob}\mathbf{Z}/k$-mod ein Isomorphismus ist. Mit Aufgabe 49 genügt es zu zeigen, daß $\tau(\mathbf{Z}/\ell)$ ein Isomorphismus ist für $\ell\,|\,k$. Betrachte

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/\ell & \xrightarrow{\tau(\mathbf{Z}/\ell)} & F^2(\mathbf{Z}/\ell) = {}_{\mathbf{Z}}({}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/\ell,\,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ b+\ell\mathbf{Z} & \longmapsto & \big((z+\ell\mathbf{Z}\mapsto z\cdot\tfrac{a}{\ell}+\mathbf{Z}) \longmapsto \tfrac{ab}{\ell}+\mathbf{Z}\big)\,. \end{array}$$

Es haben Urbild- und Bildbereich wegen $\mathbf{Z}/\ell \simeq F(\mathbf{Z}/\ell) \simeq F^2(\mathbf{Z}/\ell)$ gleichviele Elemente; cf. σ_ℓ von oben. Bleibt also die Injektivität von $\tau(\mathbf{Z}/\ell)$ zu zeigen. Kommt $b+\ell\mathbf{Z}$ unter $\tau(\mathbf{Z}/\ell)$ auf null, so ist insbesondere $\frac{b}{\ell}+\mathbf{Z} = 0$, wie man erkennt, wenn man $a=1$ setzt. Also ist $b\in\ell\mathbf{Z}$, i.e. $b+\ell\mathbf{Z}=0$. Dies zeigt die Injektivität.

Dies zeigt die *Behauptung.*

Die Behauptung zeigt auch gleich, daß F_k eine Äquivalenz von $\mathbf{Z}/k\text{-mod}^\circ$ nach $\mathbf{Z}/k$-mod ist.

(2) Beachte, daß $t := s\cdot\ell\cdot m^{-1}$ in $\mathbf{Z}$ liegt.

Für $a\in\mathbf{Z}$ wird $(w+m\mathbf{Z}\longmapsto w\cdot\frac{a}{m}+\mathbf{Z}) \in F(\mathbf{Z}/m)$ unter $Fs = {}_{\mathbf{Z}}(s,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ geschickt auf

$$(z+\ell\mathbf{Z}\longmapsto sz+m\mathbf{Z}\longmapsto sz\cdot\frac{a}{m}+\mathbf{Z}) \;=\; (z+\ell\mathbf{Z}\longmapsto z\cdot\frac{at}{\ell}+\mathbf{Z}) \;\in\; F(\mathbf{Z}/\ell)\,.$$

Unter dem Isomorphismus σ_m aus (1) entspricht $(w+m\mathbf{Z}\longmapsto w\cdot\frac{a}{m}+\mathbf{Z})$ dem Element $a+m\mathbf{Z}$.

Unter dem Isomorphismus σ_ℓ aus (1) entspricht $(z+\ell\mathbf{Z}\longmapsto z\cdot\frac{at}{\ell}+\mathbf{Z})$ dem Element $at+\ell\mathbf{Z}$.

Also haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd} F(\mathbf{Z}/\ell) & F(\mathbf{Z}/m) \arrow[l, "Fs"'] \arrow[d, "\wr", "\sigma_m"'] \\ \mathbf{Z}/\ell & \mathbf{Z}/m \arrow[l, "t"'] \arrow[from=1-1, to=2-1, "\sigma_\ell"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

(3) Setze $t_{i,j} := s_{i,j} \cdot \ell_i \cdot m_j^{-1}$ für $i \in [1,p]$ und $j \in [1,q]$. Wir haben folgendes kommutative Diagramm.

$$
\begin{tikzcd}
F(\bigoplus_i \mathbf{Z}/\ell_i) \arrow[d, "\wr", "{\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 & \cdots & F\iota_p \end{smallmatrix}\right)}"'] & F(\bigoplus_j \mathbf{Z}/m_j) \arrow[l, "{F((s_{i,j})_{i,j})}"'] \arrow[d, "\wr"', "{\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 & \cdots & F\iota_q \end{smallmatrix}\right)}"] \\
\bigoplus_i F(\mathbf{Z}/\ell_i) \arrow[d, "\wr", "{\left(\begin{smallmatrix} \sigma_{\ell_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{\ell_p} \end{smallmatrix}\right)}"'] & \bigoplus_j F(\mathbf{Z}/m_j) \arrow[l, "{(Fs_{i,j})_{j,i}}"'] \arrow[d, "\wr"', "{\left(\begin{smallmatrix} \sigma_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{m_q} \end{smallmatrix}\right)}"] \\
\bigoplus_i \mathbf{Z}/\ell_i & \bigoplus_j \mathbf{Z}/m_j \arrow[l, "{(t_{i,j})_{j,i}}"']
\end{tikzcd}
$$

Das untere Viereck darin kommutiert dank (2). Das obere Viereck darin kommutiert, da für $\alpha \in [1,p]$

$$
\begin{array}{rcl}
\left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 & \cdots & F\iota_q \end{smallmatrix}\right) (Fs_{i,j})_{j,i}\, \pi_\alpha & = & \sum_j (F\iota_j)(Fs_{\alpha,j}) \\
& = & \sum_j F(s_{\alpha,j}\iota_j) \\
& = & F\big(\sum_j s_{\alpha,j}\iota_j\big) \\
& = & F\big(\left(\begin{smallmatrix} s_{\alpha,1} & \cdots & s_{\alpha,q} \end{smallmatrix}\right)\big) \\
& = & F\big(\iota_\alpha (s_{i,j})_{i,j}\big) \\
& = & F\big((s_{i,j})_{i,j}\big) F\iota_\alpha \\
& = & F\big((s_{i,j})_{i,j}\big) \left(\begin{smallmatrix} F\iota_1 & \cdots & F\iota_p \end{smallmatrix}\right) \pi_\alpha
\end{array}
$$

ist; cf. auch Bemerkung 112.

(4) Es bildet

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

unter F gemäß (3) ab auf einen Morphismus isomorph zu

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \,.$$

Wie in Aufgabe 19 können wir diesen zu folgender rechtsexakter Sequenz ergänzen.

$$\mathbf{Z}/4 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

Diese bildet unter F gemäß (3) ab auf eine Sequenz isomorph zu

$$\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \,.$$

Da $F = {}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, ist nach Lemma 52.(2) die resultierende Sequenz isomorph zu einer linksexakten in $\mathbf{Z}$-Mod, und somit selbst linksexakt.

Da $F_{16}^2 \simeq \mathrm{id}$ auf $\mathbf{Z}/16$-mod, ist es zwingend, daß zweimaliges Anwenden von F (und zweier isomorpher Ersetzungen) unseren Morphismus bis auf Isomorphie zurückgibt. Daß unser Verfahren genau den Ausgangsmorphismus zurückgibt, und nicht nur bis auf einen Isomorphismus, ist hingegen ein glücklicher Umstand.

(5) Es bildet

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$$

unter F gemäß (3) ab auf einen Morphismus isomorph zu

$$\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1&2&4 \\ 1&2&4 \\ 1&1&4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \; .$$

Wie in Aufgabe 19 können wir diesen zu folgender rechtsexakter Sequenz ergänzen.

$$\mathbf{Z}/8 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1&2&4 \\ 1&2&4 \\ 1&1&4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \; .$$

Diese bildet unter F gemäß (3) ab auf eine Sequenz isomorph zu

$$\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{(\,1\;0\;1\,)} \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2&2&4 \\ 2&2&2 \\ 2&2&4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8 \; .$$

Nach Lemma 52.(2), beachte $F = {}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, ist die resultierende Sequenz isomorph zu einer linksexakten in $\mathbf{Z}$-Mod, und somit selbst linksexakt.

Sei $A \xrightarrow{f} B$ in $\mathbf{Z}$-mod. Nach Homomorphiesatz, Lemma 30, können wir

$$(A \xrightarrow{f} B) \; = \; (A \xrightarrow{\rho_\iota} \mathrm{C}_\iota \xrightarrow{j} B)$$

zerlegen mit einem eindeutig bestimmten j. Wir erinnern uns daran, daß in Aufgabe 19 die repräsentierende Matrix von $A \xrightarrow{\rho_\iota} \mathrm{C}_\iota$ als eine ganzzahlig invertierbare Matrix T konstruiert wurde. Ist f von F repräsentiert, so repräsentiert $T^{-1}F$ die Abbildung j. Denn repräsentiert der ganzzahlige Vektor x ein Element in C_ι, so repräsentiert xT^{-1} ein Urbild von x in A, und dessen Bild in B unter f wird wiederum von $xT^{-1}F$ repräsentiert. Also ist $T^{-1}F$ eine repräsentierende Matrix von j.

Im Beispiel von Aufgabe 19.(4) und Aufgabe 51.(5) wird $T = \left(\begin{smallmatrix} 1&-1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$, und es repräsentiert T einen Morphismus von $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/8$ nach $\mathbf{Z}/1 \oplus \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/4$. Mit $T^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$ und $F = \left(\begin{smallmatrix} 2&2&4 \\ 2&2&2 \\ 2&2&4 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir $T^{-1}F = \left(\begin{smallmatrix} 4&4&8 \\ 2&2&4 \\ 2&2&2 \end{smallmatrix}\right)$. Weglassen des Summanden $\mathbf{Z}/1 \simeq 0$ gibt also

$$(\mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2&2&4 \\ 2&2&2 \\ 2&2&4 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8) \; = \; (\mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1&0 \\ 0&1 \\ 1&0 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/2\oplus\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2&2&4 \\ 2&2&2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/4\oplus\mathbf{Z}/8) \; .$$

Die Kongruenzen zu überprüfen, die besagen, daß $T^{-1}F$ in der Tat einen Morphismus repräsentiert, ist eine gute Probe. Eine weitere gute Probe ergibt sich aus den Gleichungen $|\mathrm{K}_f||\mathrm{C}_\iota| = |A|$ und $|\mathrm{C}_\iota||\mathrm{C}_f| = |B|$; bei Bedarf auch aus der daraus hervorgehenden Gleichung $|A|/|B| = |\mathrm{K}_f|/|\mathrm{C}_f|$.

Aufgabe 52

(1) Die Aussage ist richtig.

Wir konstruieren eine Äquivalenz von $\mathbf{Z}$-free$^\circ$ nach $\mathbf{Z}$-free.

Beachte, daß wir ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}^{\oplus k}, \mathbf{Z}^{\oplus \ell})$ mit $\mathbf{Z}^{k \times \ell}$ identifizieren können, wobei $k,\, \ell \geqslant 0$.

Auf den Objekten schicken wir $\mathbf{Z}^{\oplus k}$ nach $\mathbf{Z}^{\oplus k}$ für $k \geqslant 0$.

Einen Morphismus $A \in \mathbf{Z}^{k \times \ell}$ von $\mathbf{Z}^{\oplus k}$ nach $\mathbf{Z}^{\oplus \ell}$ schicken wir auf den Morphismus $A^{\mathrm{t}} \in \mathbf{Z}^{\ell \times k}$

Dies ist ein Funktor, strikt dicht, voll und treu. Somit liegt eine Äquivalenz vor; cf. Lemma 96.(1).

Dies ist eine Matrixbeschreibung von ${}_{\mathbf{Z}}(-, \mathbf{Z}) : \mathbf{Z}\text{-free}^\circ \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}\text{-free}$ (cum grano salis).

(2) Die Aussage ist richtig.

Dank (1) genügt es zu zeigen, daß jeder Morphismus einen Kern hat.

Dank Aufgabe 10 ist jeder Morphismus in $\mathbf{Z}$-free bis auf Isomorphie in $[\![\Delta_1^{\mathrm{k}}, \mathbf{Z}\text{-free}]\!]$ von der Form $\mathbf{Z}^{\oplus k} \xrightarrow{A = (a_{i,j})_{i,j}} \mathbf{Z}^{\oplus \ell}$ mit $a_{i,j} = \partial_{i,j} d_i$ für $i \in [1,k]$, $j \in [1,\ell]$, wobei noch $d_i \neq 0$ genau dann wenn $i \in [1,m]$ für ein gewisses $m \in [1, \min(k,\ell)]$ angenommen werden kann.

Ein Kern dieses Morphismus ist gegeben durch $\mathbf{Z}^{\oplus(k-m)} \xrightarrow{U = (u_{i,j})_{i,j}} \mathbf{Z}^{\oplus k}$ mit $u_{i,j} = \partial_{i+m,\,j}$ für $i \in [1,m]$, i.e. $U = (\,0\ \mathrm{E}_{k-m}\,)$. Denn eine Matrix $T \in \mathbf{Z}^{t\times m}$, wobei $t \geqslant 0$, erfüllt genau dann $TA = 0$, wenn ihre ersten m Spalten verschwinden, so daß wir diesenfalls $T = (\,0\ T'\,)$ mit $T' \in \mathbf{Z}^{t\times(k-m)}$ schreiben und eindeutig $T = (\,0\ T'\,) = T'\,(\,0\ \mathrm{E}_{k-m}\,)$ faktorisieren können.

(3) Die Aussage ist falsch.

Es ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ ein Monomorphismus, da für einen Morphismus $S \in \mathbf{Z}^{s\times 1}$ von $\mathbf{Z}^{\oplus s}$ nach $\mathbf{Z}$, wobei $s \geqslant 0$, aus $S \cdot 2 = 0$ folgt, daß $S = 0$.

Es ist $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ kein Kern. *Annahme,* $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ ist der Kern eines Morphismus $T \in \mathbf{Z}^{1\times t}$ von $\mathbf{Z}$ nach $\mathbf{Z}^{\oplus t}$, wobei $t \geqslant 0$. Dann ist $2 \cdot T = 0$ und also $T = 0$. (In anderen Worten, $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ ist epimorph.) Daraus aber folgt, daß $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ ein Isomorphismus ist; cf. Bemerkung 119.(4, 2). Dies aber trifft nicht zu, da es kein $x \in \mathbf{Z}$ mit $2x = 1$ gibt. Wir sind an einem *Widerspruch* angelangt.

(4) Die Aussage ist falsch.

Dank (1) folgt dies daraus, daß die Aussage (3) falsch ist.

(5) Die Aussage ist falsch.

Denn da dank (3) nicht jeder Monomorphismus in $\mathbf{Z}$-free ein Kern ist, ist (Ab 2) nicht erfüllt.

Aufgabe 53

(1) *Vorbemerkung.* Sei in einer abelschen Kategorie $\mathcal{B}$ folgendes kommutative Diagramm gegeben.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"', "\wr"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"', "\wr"] & X'' \arrow[d, "f''"', "\wr"] \\ Y' \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & Y'' \end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen: Ist (X', X, X'') kurz exakt, dann ist auch (Y', Y, Y'') kurz exakt. Wir zeigen dazu: j ist Kern von s, und s ist epimorph.

Zu: s epimorph. Es ist $rf'' = fs$, also $s = f^{-1}rf''$, und dies ist epimorph als Kompositum von Isomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, d.h. von drei Epimorphismen.

Zu: j monomorph. Es ist $if = f'j$, also $j = f'^{-1}rf''$, und dies ist monomorph als Kompositum von Isomorphismus, Monomorphismus, Isomorphismus, d.h. von drei Monomorphismen.

Zu: j ist Kern von s. Sei $T \xrightarrow{t} Y$ mit $ts = 0$ gegeben. Dann ist $0 = tsf''^{-1} = tf^{-1}r$, weswegen es ein $T \xrightarrow{\tilde{t}'} X'$ gibt mit $\tilde{t}'i = tf^{-1}$. Sei $t' := \tilde{t}'f'$. Dann wird $t'j = \tilde{t}'f'j = \tilde{t}'if = tf^{-1}f = t$. Dies zeigt die Existenz von t' wie verlangt. Die Eindeutigkeit von t' folgt aus j monomorph.

Dies zeigt die *Vorbemerkung.*

Nun haben wir folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "(1\,0)"] \arrow[d, "1"', "\wr"] & \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1&9\\0&1\end{smallmatrix}\right)"', "\wr"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[d, "1"', "\wr"] \\ \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "(1\,9)"] & \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "\binom{-9}{1}"] & \mathbf{Z}/27 \end{tikzcd}$$

Man beachte dabei, daß $\mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&9\\0&1\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27$ von $\mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&-9\\0&1\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27$ beidseitig invertiert wird und daher ein Isomorphismus ist.

Da die obere Sequenz darin bekanntermaßen kurz exakt ist, ist nach Vorbemerkung auch die untere Sequenz kurz exakt.

(2) Das Wechsellemma und die dazu duale Aussage liefert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "3"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \mathbf{Z}/9 \arrow[d, "(1\,0)"] \arrow[dr, "-9"] & \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "(1\,9)"] \arrow[dr, "9"'] & \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}-9\\1\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near end] & \mathbf{Z}/27 \arrow[d, "1"] \\
& \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "1"'] & \mathbf{Z}/9
\end{tikzcd}$$

Man beachte hierzu links oben: $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27$ ist linksexakt, und das Viereck dort kommutiert.

Man beachte hierzu rechts unten: $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/9$ ist rechtsexakt, und das Viereck dort kommutiert.

Aufgabe 54

(1) Da f monomorph ist, gibt es dank (Ab 2) ein $Y \xrightarrow{g} Z$ mit f Kern von g. Da $fg = 0$, gibt es dank r Cokern von f ein $C \xrightarrow{s} Z$ mit $rs = g$. Sei nun $T \xrightarrow{t} Y$ mit $tr = 0$ gegeben. Dann ist auch $tg = trs = 0s = 0$. Also gibt es ein $T \xrightarrow{t'} X$ mit $t'f = t$. Aus der Monomorphie von f folgt die diesbezügliche Eindeutigkeit von t'.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, "t'"'] \arrow[dr, "t"] & & \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "g"'] & C \arrow[d, "s"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Man kann alternativ auch Lemma 122 auf (f, g) und (i', r) anwenden.

(2) Da f epimorph ist, ist $C \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.($3°, 2°$). Da f monomorph ist, ist mit (1) aber f ein Kern zu $Y \longrightarrow 0$. Also ist f ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 119.(4, 2).

(3) Da $if = 0$, erhalten wir zunächst ein $C' \xrightarrow{q} Y$ mit $r'q = f$. Da r' epimorph ist, folgt aus $r'qr = fr = 0 = r'0$, daß $qr = 0$. Also gibt es ein $C' \xrightarrow{\tilde{f}} K'$ mit $\tilde{f}i' = q$, also mit $r'\tilde{f}i' = f$. Da r' epi- und i' monomorph ist, ist $\tilde{f}$ durch diese Gleichung auch festgelegt. Wir haben zu zeigen, daß $\tilde{f}$ ein Isomorphismus ist.

Wir *behaupten,* daß $\tilde{f}$ ein Epimorphismus ist. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{C}_{\tilde{f}} \overset{!}{\simeq} 0$ ist; cf. Bemerkung 119.($3°$).

Schreibe $\rho := \rho_{\tilde{f}}$. Schreibe $\iota := \iota_\rho$. Da $\tilde{f}\rho = 0$, gibt es ein eindeutiges $C' \xrightarrow{\tilde{f}'} \mathrm{K}_\rho$ mit $\tilde{f}'\iota = \tilde{f}$.

Schreibe $\rho' := \rho_{\iota i'}$. Es ist $f\rho' = r'\tilde{f}i'\rho' = r'\tilde{f}'\iota i'\rho' = 0$. Also gibt es ein $C \xrightarrow{s} \mathrm{C}_{\iota i'}$ mit $rs = \rho'$.

Wir haben folgendes kommutative Diagramm konstruiert.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{C}_{\tilde f} & & \mathrm{C}_{\iota i'} \\
X \arrow[r, "r'"] & C' \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[dr, "\tilde f'"'] & K' \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "i'"] & Y \arrow[ur, "\rho'"] \arrow[r, "r"] & C \arrow[u, "s"'] \\
 & & \mathrm{K}_\rho \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\iota i'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dank (1) ist $\iota i'$ ein Kern von ρ'. Nun ist $i'\rho' = i'rs = 0$. Also gibt es ein $K' \xrightarrow{j} \mathrm{K}_\rho$ mit $j\iota i' = i'$, wegen i' monomorph also mit $j\iota = \mathrm{id}_{K'}$. Es folgt $0 = j\iota\rho = \rho$, i.e. $(K' \xrightarrow{\rho} \mathrm{C}_{\tilde f}) = (K' \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{C}_{\tilde f})$.
Es folgt $0 \longrightarrow \mathrm{C}_{\tilde f}$, und da dies sowohl eine Coretraktion als auch ein Epimorphismus ist, ist es ein Isomorphismus. Dies zeigt die *Behauptung.*
Dual hierzu ist $\tilde f$ auch ein Monomorphismus.
Mit (2) können wir schließen, daß $\tilde f$ insgesamt ein Isomorphismus ist.
Cf. Lemma 123.

Cf. [**11,** 12.4.5, 12.4.6.b].

Beachte, daß (1) und (2) auch aus (3) folgen.

Aufgabe 55

Dank Dualität genügt es, (Ab 1, 2) nachzuweisen.

Zu (Ab 1). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{B}$ gegeben. Sei $K \xrightarrow{i} X$ ein in $\mathcal{A}$ genommener und in $\mathcal{B}$ liegender Kern von f. Dieser ist a fortiori auch ein Kern von f in $\mathcal{B}$.

Zu (Ab 2). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus in $\mathcal{B}$.

Wir *behaupten,* daß f auch in $\mathcal{A}$ monomorph ist. Sei $K \xrightarrow{i} X$ ein in $\mathcal{A}$ genommener und in $\mathcal{B}$ liegender Kern von f. Wir haben zu zeigen, daß $K \overset{!}{\simeq} 0$ in $\mathcal{A}$, i.e. $K \overset{!}{\simeq} 0$ in $\mathcal{B}$; cf. Bemerkung 119.(3, 2). Aber K ist, wie schon für (Ab 1) gesehen, auch ein Kern von f in $\mathcal{B}$, woraus $K \simeq 0$ in $\mathcal{A}$ folgt; cf. Bemerkung 119.(3, 2). Dies zeigt die *Behauptung.*

Sei nun $Y \xrightarrow{r} C$ ein in $\mathcal{A}$ genommener und in $\mathcal{B}$ liegender Cokern von f. Da f in $\mathcal{A}$ monomorph ist, ist f in $\mathcal{A}$ ein Kern von r; cf. Aufgabe 54.(1). A fortiori ist f auch in $\mathcal{B}$ ein Kern von r.

Aufgabe 56

Sei $Z' \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{r} Z''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Zu zeigen ist, daß

$$_{\mathcal{A}}(X, Z') \xrightarrow{_{\mathcal{A}}(X,i)} {_{\mathcal{A}}(X, Z)} \xrightarrow{_{\mathcal{A}}(X,r)} {_{\mathcal{A}}(X, Z'')} .$$

linksexakt ist. Wir können hierzu die alte Definition 47.(2) heranziehen; cf. Beispiel 127.

Es ist $_{\mathcal{A}}(X, i)$ injektiv, da i monomorph ist.

Es ist Im $_{\mathcal{A}}(X, i) \subseteq$ Kern $_{\mathcal{A}}(X, r)$, da $ir = 0$.

Zeigen wir, daß auch Im $_{\mathcal{A}}(X, i) \overset{!}{\supseteq}$ Kern $_{\mathcal{A}}(X, r)$ ist. Sei $f \in {_{\mathcal{A}}(X, Z)}$ im Kern von $_{\mathcal{A}}(X, r)$, i.e. sei $fr = 0$. Da i ein Kern zu r ist, gibt es ein f' mit $f'i = f$, i.e. mit $f'\,{_{\mathcal{A}}(X, i)} = f$. Somit ist $f \in$ Im $_{\mathcal{A}}(X, i)$.

Insgesamt ist also Im $_{\mathcal{A}}(X, i) =$ Kern $_{\mathcal{A}}(X, r)$.

Aufgabe 57

(1) **Zeigen wir, daß $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ additiv ist.**

Für $X \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ und $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$ schreiben wir $X(u \xrightarrow{\alpha} v) =: (X_u \xrightarrow{X_\alpha} X_v)$.

Für $X \xrightarrow{f} Y$ in $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ und $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ schreiben wir $(X \xrightarrow{f} Y)u =: (X_u \xrightarrow{f_u} Y_u)$.
Es ist also $X_\alpha f_v = f_u Y_\alpha$ stets.

Wir sehen einen Funktor von $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{A}$ als "Diagramm auf $\mathcal{D}$ mit Werten in $\mathcal{A}$" an.

Setze $0(u \xrightarrow{\alpha} v) := (0 \longrightarrow 0)$ für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$. Dies liefert einen Funktor $0 \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$. Für alle $X \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ gibt es genau einen Morphismus $X \longrightarrow 0$, denn das einzige hierzu in Frage kommende Tupel ist in der Tat natürlich. Dual hierzu gibt es auch genau einen Morphismus $0 \longrightarrow X$. Also ist 0 ein Nullobjekt in $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$. Für $X,\, Y \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ ist dementsprechend der Nullmorphismus durch $(X \xrightarrow{0} Y)_u = (X_u \xrightarrow{0} Y_u)$ für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ gegeben.

Zu (Add 1). Seien $X,\, Y \in [\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ gegeben.

Sei $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Wir haben direkte Summen $X_u \oplus Y_u$ für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, zusammen mit Inklusionsmorphismen $X_u \xrightarrow{\iota_{u,1}} X_u \oplus Y_u$ und $Y_u \xrightarrow{\iota_{u,2}} X_u \oplus Y_u$, sowie Projektionsmorphismen $X_u \oplus Y_u \xrightarrow{\pi_{u,1}} X_u$ und $X_u \oplus Y_u \xrightarrow{\pi_{u,2}} Y_u$.

Setze $(X \oplus Y)_u := X_u \oplus Y_u$ für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Für $u \xrightarrow{\alpha} v$ setzen wir

$$\left((X \oplus Y)_u \xrightarrow{(X\oplus Y)_\alpha} (X \oplus Y)_v\right) \;:=\; \left(X_u \oplus Y_u \xrightarrow{\begin{pmatrix} X_\alpha & \\ & Y_\alpha \end{pmatrix}} X_v \oplus Y_v\right).$$

Dann ist $X \oplus Y \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$. Denn zum einen ist $(X \oplus Y)_{\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \\ & \mathrm{id} \end{pmatrix} = \mathrm{id}$. Zum anderen ist für gegebene $u \xrightarrow{\alpha} v \xrightarrow{\beta} w$ in $\mathcal{D}$ auch

$$(X \oplus Y)_\alpha (X \oplus Y)_\beta \;=\; \begin{pmatrix} X_\alpha & \\ & Y_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_\beta & \\ & Y_\beta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X_\alpha X_\beta & \\ & Y_\alpha Y_\beta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X_{\alpha\beta} & \\ & Y_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \;=\; (X \oplus Y)_{\alpha\beta}\,.$$

Setze $\iota_1 : X \longrightarrow X \oplus Y$ durch $(\iota_1)_u := \iota_{1,u}$ für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Es ist ι_1 ein Morphismus in $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$, i.e. eine Transformation, da für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$ sich

$$\iota_{1,u}(X \oplus Y)_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_\alpha & \\ & Y_\alpha \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X_\alpha & 0 \end{pmatrix} \;=\; X_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; X_\alpha \iota_{1,v}$$

ergibt. Analog resp. dual dazu können wir $\iota_2 : Y \longrightarrow X \oplus Y$ durch $(\iota_2)_u := \iota_{2,u}$, sowie $\pi_1 : X \oplus Y \longrightarrow X$ durch $(\pi_1)_u := \pi_{1,u}$ und $\pi_2 : X \oplus Y \longrightarrow X$ durch $(\pi_2)_u := \pi_{2,u}$ festlegen.

Zu (Sum 1). Seien Transformationen $S \xrightarrow{\xi} X$ und $S \xrightarrow{\eta} Y$ gegeben.

Zur Existenz des Induzierten. Setze $S \xrightarrow{(\xi\ \eta)} X \oplus Y$ durch $(\xi\ \eta)_u = (\xi_u\ \eta_u)$ für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Dies ist eine Transformation, da für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$ sich

$$\begin{aligned} (\xi\ \eta)_u (X \oplus Y)_\alpha &= (\xi_u\ \eta_u)\begin{pmatrix} X_\alpha & \\ & Y_\alpha \end{pmatrix} = (\xi_u X_\alpha\ \eta_u Y_\alpha) \\ &= (S_\alpha \xi_v\ S_\alpha \eta_v) = S_\alpha (\xi_v\ \eta_v) = S_\alpha (\xi\ \eta)_v \end{aligned}$$

ergibt. Ferner ist in der Tat $(\xi\ \eta)\pi_1 = \xi$, da sich bei $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$

$$((\xi\ \eta)\pi_1)_u \;=\; (\xi_u\ \eta_u)\pi_{1,u} \;=\; \xi_u$$

ergibt. Genauso wird auch $(\xi\ \eta)\pi_2 = \eta$.

Zur Eindeutigkeit des Induzierten. Sei umgekehrt ein $S \xrightarrow{\zeta} X \oplus Y$ mit $\zeta\pi_1 = \xi$ und $\zeta\pi_2 = \eta$ gegeben. Bei $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ist dann $\zeta_u\pi_{1,u} = (\zeta\pi_1)_u = \xi_u$ und $\zeta_u\pi_{2,u} = (\zeta\pi_2)_u = \eta_u$, also insgesamt $\zeta_u = (\,\xi_u\ \eta_u\,)$.

Zu (Sum 2). Dual zu (Sum 1).

Zu (Sum 3). Es ist $\iota_1\pi_1 = 1$, da bei $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ sich $(\iota_1\pi_1)_u = \iota_{1,u}\pi_{1,u} = 1$ ergibt. Es ist $\iota_1\pi_2 = 0$, da bei $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ sich $(\iota_1\pi_2)_u = \iota_{1,u}\pi_{2,u} = 0$ ergibt. Genauso wird auch $\iota_2\pi_1 = 0$ und $\iota_2\pi_2 = 1$.

Zu (Add 2). Sei $X \in \operatorname{Ob}[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$. Wir behaupten, daß $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{smallmatrix}\right) : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$ durch $\left(\begin{smallmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{smallmatrix}\right)_u = \left(\begin{smallmatrix} 1_{X_u} & 0_{X_u,X_u} \\ 1_{X_u} & 1_{X_u} \end{smallmatrix}\right)$ für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ gegeben ist. In der Tat wird

$$\iota_{1,u}\left(\begin{smallmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{smallmatrix}\right)_u \pi_{1,u} \;=\; \left(\iota_1\left(\begin{smallmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{smallmatrix}\right)\pi_1\right)_u \;=\; (1_X)_u \;=\; 1_{X_u}\;,$$

usf. Daher ist $\left(\begin{smallmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{smallmatrix}\right)_u$ ein Isomorphismus für alle $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Mit Bemerkung 92 folgt, daß $\left(\begin{smallmatrix} 1_X & 0_{X,X} \\ 1_X & 1_X \end{smallmatrix}\right)$ eine Isotransformation, i.e. ein Isomorphismus in $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ ist.

Zeigen wir, daß $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ additiv ist.

Wir wissen mittlerweile, daß $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}},\mathcal{A}]\!]$ additiv ist. Darin ist $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine volle Teilkategorie. Es genügt zu zeigen, daß $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ darin eine volle additive Teilkategorie ist.

Zum einen ist unser Nullobjekt in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}},\mathcal{A}]\!]$ in der Tat ein Komplex, i.e. in $\operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

Bleibt zum anderen zu zeigen, daß die direkte Summe zweier Komplexe wieder ein Komplex ist. Seien also $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Sei $n \in \mathbf{Z}$. Wir haben zu zeigen, daß der Morphismus $n \longrightarrow n+2$ unter $X \oplus Y$ auf einen Nullmorphismus abgebildet wird. Wir erhalten

$$\begin{array}{rl}
& \big((X\oplus Y)^n \longrightarrow (X\oplus Y)^{n+2}\big) \\
= & \big((X\oplus Y)^n \longrightarrow (X\oplus Y)^{n+1} \longrightarrow (X\oplus Y)^{n+2}\big) \\
= & \Big(X^n \oplus Y^n \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d_X^n & \\ & d_Y^n \end{smallmatrix}\right)} X^{n+1}\oplus Y^{n+1} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d_X^{n+1} & \\ & d_Y^{n+1} \end{smallmatrix}\right)} X^{n+2}\oplus Y^{n+2}\Big) \\
= & \Big(X^n \oplus Y^n \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d_X^n d_X^{n+1} & \\ & d_Y^n d_Y^{n+1} \end{smallmatrix}\right)} X^{n+2}\oplus Y^{n+2}\Big) \\
= & \Big(X^n \oplus Y^n \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & 0 \end{smallmatrix}\right)} X^{n+2}\oplus Y^{n+2}\Big)\,.
\end{array}$$

(2) **Zeigen wir, daß $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ abelsch ist.**

Mit (1) wissen wir, daß $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ additiv ist. Dank Dualität genügt es nun, (Ab 1, 2) zu zeigen.

Zu (Ab 1). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $[\![\mathcal{D},\mathcal{A}]\!]$ gegeben. Wir konstruieren einen Kern K von f. Sei $K_u \xrightarrow{i_u} X_u$ ein Kern von $X_u \xrightarrow{f_u} Y_u$ für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$ konstruieren wir

$$\begin{tikzcd}
K_u \arrow[r, "i_u"] \arrow[d, "K_\alpha"'] & X_u \arrow[r, "f_u"] \arrow[d, "X_\alpha"'] & Y_u \arrow[d, "Y_\alpha"] \\
K_v \arrow[r, "i_v"] & X_v \arrow[r, "f_v"] & Y_v
\end{tikzcd}\;;$$

cf. Bemerkung 124.(2). Dies definiert einen Funktor K, da wegen der Eindeutigkeit des auf den Kernen Induzierten auch $K_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ und $K_{\alpha\beta} = K_\alpha K_\beta$ für $u \xrightarrow{\alpha} v \xrightarrow{\beta} w$ in $\mathcal{D}$ ist; für ersteres beachte man $K_{\mathrm{id}}\, i_u = i_u = \mathrm{id}\, i_u$; für letzteres beachte man $K_{\alpha\beta}\, i_w = i_u X_{\alpha\beta} = i_u X_\alpha X_\beta = K_\alpha\, i_v X_\beta = K_\alpha K_\beta\, i_w$.

Da nach Konstruktion $i_u X_\alpha = K_\alpha i_v$ ist für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$, ist i in der Tat eine Transformation.

Wir *behaupten,* daß i ein Kern von f ist. Sei $T \xrightarrow{t} X$ mit $tf = 0$ gegeben. Für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ ist dann $t_u f_u = (tf)_u = 0$. Da i_u nach Konstruktion ein Kern von f_u ist, gibt es folglich ein $t'_u : T_u \longrightarrow K_u$ mit $t'_u i_u = t_u$. Für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$ ist $t'_u K_\alpha i_v = t'_u i_u X_\alpha = t_u X_\alpha = T_\alpha t_v = T_\alpha t'_v i_v$, und also, wegen i_v monomorph, $t'_u K_\alpha = T_\alpha t'_v$. Somit ist $t' : T \longrightarrow K$ eine Transformation mit $t'i = t$. Die Eindeutigkeit von t' bezüglich $t'i = t$ folgt aus der Monomorphie von i_u für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Dies zeigt die *Behauptung.*

Zu (Ab 2). Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Monomorphismus. Wir haben zu zeigen, daß f ein Kern eines Morphismus in $[\![\mathcal{D}, \mathcal{A}]\!]$ ist.

Nach Bemerkung 119.(3) ist $0 \longrightarrow X$ ein Kern von f. Nach Bemerkung 119.(2) ist der in (Ab 1) konstruierte Kern von f also isomorph zu 0. Folglich ist $\mathrm{K}_{f_u} \simeq 0$ für alle $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Nach Bemerkung 119.(5, 3) folgt, daß f_u monomorph ist für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$.

Dual zur Konstruktion für (Ab 1) erhalten wir einen Cokern $Y \xrightarrow{r} C$ von $X \xrightarrow{f} Y$ mit r_u Cokern von f_u für $u \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Nach Aufgabe 54.(1) ist f_u ein Kern von r_u . Nach Konstruktion für (Ab 1) ist f ein Kern von r, da für $u \xrightarrow{\alpha} v$ in $\mathcal{D}$ der eindeutige Morphismus ξ mit $\xi f_v = f_u Y_\alpha$ gleich X_α ist.

Zeigen wir, daß $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ **abelsch ist.**

Wir wissen mittlerweile, daß $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ eine volle additive Teilkategorie der abelschen Kategorie $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ ist.

Mit Dualität und Aufgabe 55 genügt es zu zeigen, daß wenn $K \xrightarrow{i} X$ der in $[\![\mathbf{Z}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A}]\!]$ wie oben konstruierte Kern eines Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ ist, dann $K \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$ liegt, und damit $K \xrightarrow{i} X$ sich in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ befindet. Sei also $n \in \mathbf{Z}$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß der Morphismus $n \longrightarrow n + 2$ unter K auf einen Nullmorphismus abgebildet wird. Wir erhalten, wenn wir die vereinbarte Differentialnotation für K schon vorwegnehmen,

$$\begin{aligned}
& (K^n \longrightarrow K^{n+2} \xrightarrow{i^{n+2}} X^{n+2}) \\
= \; & (K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1} \xrightarrow{d_K^{n+1}} K^{n+2} \xrightarrow{i^{n+2}} X^{n+2}) \\
= \; & (K^n \xrightarrow{d_K^n} K^{n+1} \xrightarrow{i^{n+1}} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2}) \\
= \; & (K^n \xrightarrow{i^n} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^{n+2}) \\
= \; & (K^n \xrightarrow{0} X^{n+2}) \, .
\end{aligned}$$

Damit ist auch $K^n \longrightarrow K^{n+2}$ selbst null.

Aufgabe 58

(1) Da r epimorph ist und g'' als Retraktion epimorph ist, ist auch $rg'' = gs$ epimorph, und also auch s epimorph.

Da i monomorph ist und f' als Coretraktion monomorph ist, ist auch $f'i = jf$ monomorph, und also auch j monomorph.

Bleibt zu zeigen, daß j ein Kern von s ist. Zum einen ist $js = jsf''g'' = jfrg'' = f'irg'' = 0$. Sei zum anderen ein t mit $ts = 0$ gegeben. Dann ist $tfr = tsf'' = 0$, und folglich gibt es ein $\tilde{t}$ mit $tf = \tilde{t}i$. Setze $t' := \tilde{t}g'$. Es wird $t'j = \tilde{t}g'j = \tilde{t}ig = tfg = t$. Es ist t' durch $t'j = t$ auch eindeutig bestimmt, da j monomorph ist.

$$\begin{tikzcd}
& X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift left, "g'"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, shift left, "g"] & X'' \arrow[d, shift left, "g''"] \\
& Y' \arrow[r, "j"] \arrow[u, shift left, "f'"] & Y \arrow[r, "s"] \arrow[u, shift left, "f"] & Y'' \arrow[u, shift left, "f''"] \\
T \arrow[uur, "\tilde{t}"] \arrow[ur, "t'"] \arrow[urr, "t"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(2) Sei $ip = 1$. Es ist $i(1 - pi) = 0$. Also gibt es ein q mit $rq = 1 - pi$. Da $rqr = (1 - pi)r = r$, ist $qr = 1$.

Beachte ferner, daß $qpi = q(1 - rq) = 0$, und folglich $qp = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, shift right, "i"'] & X \arrow[l, shift right, "p"'] \arrow[r, shift right, "r"'] & X'' \arrow[l, shift right, "q"']
\end{tikzcd}
$$

Wir erhalten die folgenden Morphismen von Sequenzen; i.e. in folgendem Diagramm kommutieren alle Vierecke.

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "(p\ r)"] & X'' \arrow[d, equal] \\
X' \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, equal] & X' \oplus X'' \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\binom{i}{q}"] & X'' \arrow[d, equal] \\
X' \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "r"] & X''
\end{tikzcd}
$$

Diese invertieren sich gegenseitig, da $(p\ r)\binom{i}{q} = pi + rq = 1$ und $\binom{i}{q}(p\ r) = \begin{pmatrix} ip & ir \\ qp & qr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) Sei $V \overset{n}{\longleftarrow} U$ mit $mn = 1$.

Sei U azyklisch. Für $i \in \mathbf{Z}$ erhalten wir mittels Bemerkung 124.(2) Morphismen von Sequenzen wie folgt.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \arrow[r, "\dot d_V^{i-1}"] \arrow[d, "b"] & V^i \arrow[r, "\bar d_V^i"] \arrow[d, "m^i"] & \mathrm{I}_{d_V^i} \arrow[d] \\
\mathrm{I}_{d_U^{i-1}} \arrow[r, "\dot d_U^{i-1}"] \arrow[d, "c"] & U^i \arrow[r, "\bar d_U^i"] \arrow[d, "n^i"] & \mathrm{I}_{d_U^i} \arrow[d] \\
\mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \arrow[r, "\dot d_V^{i-1}"] & V^i \arrow[r, "\bar d_V^i"] & \mathrm{I}_{d_V^i}
\end{tikzcd}
$$

Wegen der Eindeutigkeit der Induzierten komponieren diese beiden Morphismen zur Identität auf der zu V gehörigen Sequenz.

Da die zu U gehörige Sequenz kurz exakt ist, gilt dies nach (1) auch für die zu V gehörige. Also ist auch V azyklisch.

Sobald der Homologiefunktor und die Charakterisierung von azyklischen Komplexen als Komplexe, deren Homologie überall verschwindet, aus Bemerkung 143 zur Verfügung steht, kann man auch wie folgt argumentieren.

Da U azyklisch ist, ist $\mathrm{H}^k U \simeq 0$ für $k \in \mathbf{Z}$. Also ist $0 = \mathrm{H}^k m \cdot \mathrm{H}^k n = \mathrm{H}^k \operatorname{id}_V = \operatorname{id}_{\mathrm{H}^k V}$. Also ist $\mathrm{H}^k V \simeq 0$ für $k \in \mathbf{Z}$. Folglich ist V azyklisch.

Sei U split azyklisch. Dann ist $\dot d_U^{i-1}$ eine Coretraktion für alle $i \in \mathbf{Z}$, da die entsprechende Aussage in einem zu U isomorphen Komplex der Form wie in Beispiel 131.(2) gilt. Sei etwa $\dot d_U^{i-1} s = 1$. Dann ist

$$\dot d_V^{i-1} m^i sc \;=\; b \dot d_U^{i-1} sc \;=\; bc \;=\; 1\,.$$

Also ist auch $\dot d_V^{i-1}$ eine Coretraktion. Es folgt mit (2), daß die zu V gehörige Sequenz isomorph zu $\mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \xrightarrow{(1\ 0)} \mathrm{I}_{d_V^{i-1}} \oplus \mathrm{I}_{d_V^i} \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{I}_{d_V^i}$ ist, wobei es einen Isomorphismus gibt, der Identitäten auf den äußeren Termen stehen hat.

Verwendet man diese Isomorphismen für alle $i \in \mathbf{Z}$, so erkennt man, daß V split azyklisch ist.

(4) Seien zum einen V und V' split azyklisch.

Sei $i \in \mathbf{Z}$ gegeben. Es ist $\mathrm{I}_{\dot{d}^i_V} \xrightarrow{\dot{d}^i_V} V^{i+1}$ eine Coretraktion, da die entsprechende Aussage in einem zu V isomorphen Komplex der Form wie in Beispiel 131.(2) gilt. Genauso ist $\mathrm{I}_{\dot{d}^i_{V'}} \xrightarrow{\dot{d}^i_{V'}} V'^{i+1}$ eine Coretraktion. Die Faktorisierung

$$d^i_{V \oplus V'} \;=\; \begin{pmatrix} d^i_V & \\ & d^i_{V'} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \bar{d}^i_V & \\ & \bar{d}^i_{V'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}$$

in einen Epimorphismus, gefolgt von einem Monomorphismus zeigt, daß aus $\dot{d}^i_V$ und $\dot{d}^i_{V'}$ Coretraktion folgt, daß $\dot{d}^i_{V \oplus V'}$ eine Coretraktion ist.

Ferner ist $\left(\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{d}^{i+1}_V & \\ & \bar{d}^{i+1}_{V'} \end{pmatrix}\right)$ kurz exakt. Dazu zeigen wir, daß $\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}$ ein Kern von $\begin{pmatrix} \bar{d}^{i+1}_V & \\ & \bar{d}^{i+1}_{V'} \end{pmatrix}$ ist. Ist $(\,t\;t'\,)\begin{pmatrix} \bar{d}^{i+1}_V & \\ & \bar{d}^{i+1}_{V'} \end{pmatrix} = (\,0\;0\,)$, so ist $t\bar{d}^{i+1}_V = 0$ und also $t = \hat{t}\dot{d}^i_V$ für ein $\hat{t}$, da $(\dot{d}^i_V\,,\,\bar{d}^{i+1}_V)$ kurz exakt ist. Analog ist $t' = \hat{t}'\dot{d}^i_{V'}$ für ein $\hat{t}'$. Insgesamt ist also $(\,t\;t'\,) = (\,\hat{t}\;\hat{t}'\,)\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}$. Die Eindeutigkeit von $(\,\hat{t}\;\hat{t}'\,)$ bezüglich dieser Gleichung folgt aus der Monomorphie von $\begin{pmatrix} \dot{d}^i_V & \\ & \dot{d}^i_{V'} \end{pmatrix}$. Dank (2) hat dies $V \oplus V'$ split azyklisch zur Folge.

Sei zum anderen $V \oplus V'$ split azyklisch. Dann ist $V \xrightarrow{(\,1\;0\,)} V \oplus V'$ eine Coretraktion. Dank (3) ist V split azyklisch.

Aufgabe 59

Sei i ein Kern und r ein Cokern von x. Sei j ein Kern und s ein Cokern von y. Sei k ein Kern und t ein Cokern von z. Vervollständige zu folgendem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & L \arrow[r, "v"] \arrow[d, "j"] & M \arrow[d, "k"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "y"] & Z \arrow[d, "z"] \\
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "r"'] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "s"] & Z' \arrow[d, "t"] \\
C \arrow[r, "p"] & D \arrow[r, "q"] & E
\end{tikzcd}$$

Wir verwenden das Kern-Cokern-Kriterium aus Lemma 134 kommentarlos.

(1) Die Aussage ist richtig.

Sind (X, X', Y, Y') und (Y, Y', Z, Z') Pullbacks, dann sind u und v Isomorphismen und p und q Monomorphismen. Also ist auch uv ein Isomorphismus und pq ein Monomorphismus. Somit ist (X, X', Z, Z') ein Pullback.

(2) Die Aussage ist falsch.

Sei $\mathcal{A}$ eine nichttriviale abelsche Kategorie, wie e.g. $\mathbf{Z}$-Mod. Seien Y nicht isomorph zu 0, aber sei $X = X' = Y' = Z = Z' = 0$. Es ist $(X, X', Z, Z') = (0, 0, 0, 0)$ ein Pullback, nicht aber $(X, X', Y, Y') = (0, 0, Y, 0)$, da u ein Monomorphismus, aber kein Epimorphismus ist.

(3) Die Aussage ist richtig.

Zum einen folgt aus (X, X', Z, Z') Pullback, daß pq monomorph ist, und also, daß p monomorph ist. Zum anderen folgt aus (X, X', Z, Z') und (Y, Y', Z, Z') Pullbacks, daß uv und v Isomorphismen sind, und somit auch $u = (uv)v^{-1}$. Also ist auch (X, X', Y, Y') ein Pullback.

(4) Die Aussage ist falsch.

Sei $\mathcal{A}$ eine nichttriviale abelsche Kategorie, wie e.g. $\mathbf{Z}$-Mod. Sei Y' nicht isomorph zu 0, aber sei $X = X' = Y = Z = Z' = 0$. Es sind $(X, X', Z, Z') = (0, 0, 0, 0)$ und $(X, X', Y, Y') = (0, 0, 0, Y')$ Pullbacks, nicht aber $(Y, Y', Z, Z') = (0, Y', 0, 0)$, da q kein Monomorphismus ist.

(5) Die Aussage ist richtig.

Da (X, X', Z, Z') ein Pullback ist, ist uv ein Isomorphismus. Folglich ist $u(v(uv)^{-1}) = 1$, und somit u eine Coretraktion. Da (X, X', Y, Y') ein Pushout ist, ist u ein Epimorphismus. Insgesamt ist u ein Isomorphismus. Also ist auch $v = u^{-1}(uv)$ ein Isomorphismus.

Da (X, X', Z, Z') ein Pullback ist, ist pq ein Monomorphismus. Da (X, X', Y, Y') ein Pushout ist, ist p ein Isomorphismus. Folglich ist auch $q = p^{-1}(pq)$ ein Monomorphismus.

Also sind u und p Isomorphismen, und somit (X, X', Y, Y') ein Quadrat. Ferner ist v ein Isomorphismus und q ein Monomorphismus. Folglich ist (Y, Y', Z, Z') ein Pullback.

(6) Die Aussage ist falsch.

Sei $\mathcal{A}$ eine nichttriviale abelsche Kategorie, wie e.g. $\mathbf{Z}$-Mod. Sei Y' nicht isomorph zu 0, aber sei $X = X' = Y = 0$. Dann ist (X, X', Y, Y') ein Pullback, da $0 \xrightarrow{u} 0$ ein Isomorphismus und $0 \xrightarrow{p} Y'$ ein Monomorphismus ist. Es ist zwar f ein Isomorphismus, also insbesondere epimorph, aber $0 \xrightarrow{f'} X$ nicht epimorph.

(7) Die Aussage ist richtig.

Denn es sind $K \simeq 0$, $L \simeq 0$ und $C \simeq 0$. Folglich ist u ein Isomorphismus und p ein Monomorphismus. Somit ist (X, X', Y, Y') ein Pullback.

Aufgabe 60

(1, 2) Der Pushout (X, Y, X', Y') hat die rechtsexakte Diagonalsequenz

$$X \xrightarrow{(\,x\ f\,)} X' \oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)} Y' \,.$$

Wir tragen ein Bild P von $(\,x\ f\,)$ ein.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dr, "(\,v\ u\,)"] & & \\
X \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "(\,x\ f\,)"] & & X' \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} f' \\ -y \end{smallmatrix}\right)"] & Y' \,.
\end{tikzcd}$$

Es ist darin auch $(P, X' \oplus Y, Y')$ rechtsexakt, wegen $(\,v\ u\,)$ also kurz exakt. Somit haben wir das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "y"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \,,
\end{tikzcd}$$

was insbesondere ein Pullback ist.

Es ist $a\,(\,v\ u\,) = (\,x\ f\,)$, also $av = x$ und $au = f$, und dieser Morphismus a ist ein Epimorphimus.

(3) Wir wenden das Umfangssequenzlemma auf das kommutative Dreieck (X, P, Y) an.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_a \arrow[d, "b"] \arrow[dr, "\iota_a"] & & & & \\
\mathrm{K}_f \arrow[r, "\iota_f"] \arrow[dd, "c"'] & X \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "a"] \arrow[ddd, "x"'] & & & Y \arrow[ddd, "y"] \\
& & P \arrow[urr, "u"'] \arrow[dr, "\rho_a"] \arrow[ddl, "v"] & & \\
\mathrm{K}_u \arrow[urr, "\iota_u"] \arrow[rrr, "d"'] & & & \mathrm{C}_a & \\
& X' \arrow[rrr, "f'"'] & & & Y'
\end{tikzcd}$$

Da a epimorph ist, ist $\mathrm{C}_a \simeq 0$. Da $(0, \mathrm{K}_a, \mathrm{K}_f, \mathrm{K}_u, \mathrm{C}_a)$ lang exakt ist, ist c epimorph und b ein Kern von c.

Wegen $\mathrm{id}_{\mathrm{K}_a}\,\iota_a = b\iota_f$ wird auf den gewählten Kernen von c und von a der Isomorphismus $\mathrm{id}_{\mathrm{K}_a}$ induziert.

Wegen c und a epimorph wird auch auf den Cokernen ein Isomorphismus induziert, nämlich ein Isomorphismus von Nullobjekt zu Nullobjekt.

Aufgabe 61

(1) Wir ergänzen zu folgender linksexakten Diagonalsequenz.

$$\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{(1\ 3)} \mathbf{Z}/3 \oplus \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/9$$

Wegen $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ epimorph ist sie auch kurz exakt.

Auf das aus dieser kurz exakten Diagonalsequenz resultierende Quadrat wenden wir das Kern-Cokern-Kriterium wie folgt horizontal und vertikal an.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"', "\wr"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "3"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbf{Z}/3 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & 0 \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "1"'] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
& \mathbf{Z}/3 \arrow[r, "\sim", "1"'] & \mathbf{Z}/3 &
\end{tikzcd}$$

Da auf den Kernen und Cokernen durchweg Isomorphismen induziert werden, wird so zweimal bestätigt, einmal vertikal, einmal horizontal, daß ein Quadrat vorliegt.

(2) Wir ergänzen zu folgender linksexakten Diagonalsequenz.

$$\mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/9$$

Denn es ist $\begin{pmatrix}1&3\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, als Morphismus von $\mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3$ nach $\mathbf{Z}/9$.

Ferner ist $\mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&3\\0&9\end{pmatrix}} \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27$ injektiv, da für $(m+9\mathbf{Z}, n+3\mathbf{Z}) \in \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3$ aus $m \equiv_9 0$ und $3m + 9n \equiv_{27} 0$ folgt, daß $n \equiv_3 0$ ist.

Schließlich ist $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ surjektiv, weswegen der Kern Ordnung $9 \cdot 27/9 = 27$ hat. Damit ist die Sequenz exakt bei $\mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/27$, und insgesamt tatsächlich kurz exakt.

Auf das aus dieser kurz exakten Diagonalsequenz resultierende Quadrat wenden wir das Kern-Cokern-Kriterium wie folgt horizontal und vertikal an.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{Z}/3 \arrow[r, "1", "\sim"'] \arrow[d, "(3\ -1)"'] & \mathbf{Z}/3 \arrow[d, "3"] & \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "(0\ 1)"] \arrow[d, "1"', "\wr"] & \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\binom{3}{9}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & 0 \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "1"'] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
 & \mathbf{Z}/3 \arrow[r, "\sim", "1"'] & \mathbf{Z}/3 &
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{(3\ -1)} \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3$ ein Kern von $\mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3 \xrightarrow{\binom{3}{9}} \mathbf{Z}/27$, da für $(m+9\mathbf{Z}, n+3\mathbf{Z}) \in \mathbf{Z}/9 \oplus \mathbf{Z}/3$ genau dann $3m + 9n \equiv_{27} 0$ ist, wenn $m \equiv_9 -3n$ ist, wenn also $(m+9\mathbf{Z}, n+3\mathbf{Z}) = (-3n+9\mathbf{Z}, n+3\mathbf{Z}) = (n+3\mathbf{Z})\,(3\ -1)$ ist.

Da auf den Kernen und Cokernen durchweg Isomorphismen induziert werden, wird so zweimal bestätigt, einmal vertikal, einmal horizontal, daß ein Quadrat vorliegt.

(3) Es ist z.B.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/3
\end{tikzcd}$$

ein Pullback, aber kein Quadrat, da die Diagonalsequenz

$$0 \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/3$$

linksexakt ist, aber nicht rechtsexakt.

Aufgabe 62

Zeigen wir, daß $F0 \simeq 0$. Es ist $0 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} 0$ kurz exakt. Also ist auch $F0 \xrightarrow{1} F0 \xrightarrow{1} F0$ kurz exakt. Insbesondere ist $1_{F0} = 1_{F0}1_{F0} = 0$. Also sind $F0 \longrightarrow 0$ und $0 \longrightarrow F0$ sich gegenseitig invertierende Isomorphismen.

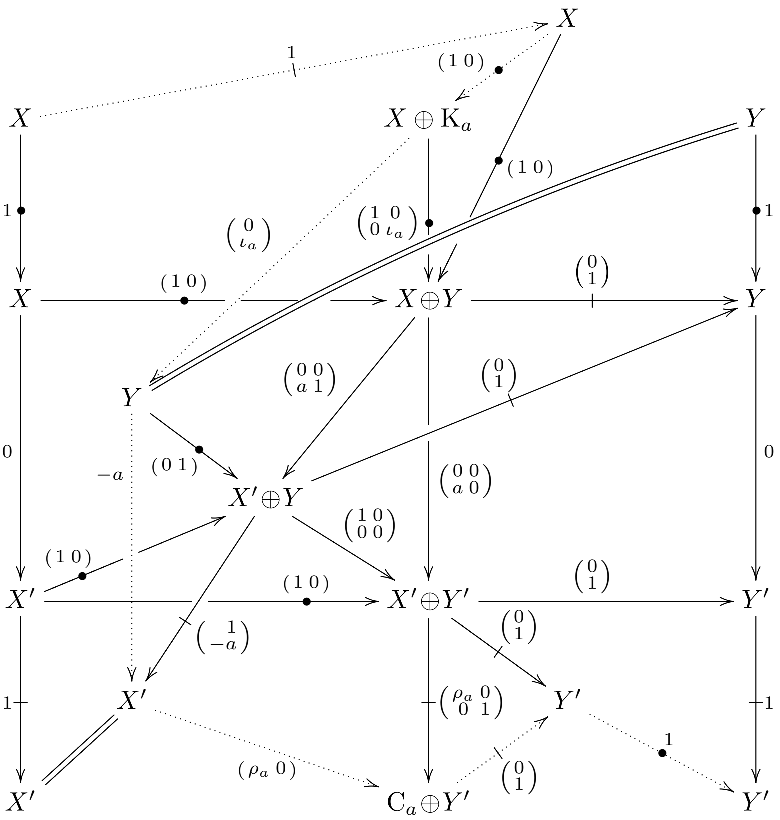
Zeigen wir, daß F additiv ist. Seien $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ gegeben. Wir haben folgenden Morphismus kurz exakter Sequenzen.

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F(1\ 0)"] \arrow[d, equal] & F(X \oplus Y) \arrow[r, "F\binom{0}{1}"] \arrow[d, "(F\pi_1\ F\pi_2)"'] & FY \arrow[d, equal] \\
FX \arrow[r, "(1\ 0)"] & FX \oplus FY \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & FY
\end{tikzcd}$$

Das Schlangenlemma, Lemma 136, zeigt nun, daß $(F\pi_1\ F\pi_2)$ ein Isomorphismus ist; cf. Definition 110.

Aufgabe 63

Wie im Beweis zum Schlangenlemma bilden wir folgendes kommutative Diagramm.



Darin ist das Viereck $(X, X\oplus Y, X', X'\oplus Y)$ ein Quadrat, und also auch ein Pushout wie verlangt, da horizontal das Kern-Cokern-Kriterium erfüllt ist.

Es ist $X\oplus \mathrm{K}_a \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\iota_a\end{smallmatrix}\right)} X\oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\a&0\end{smallmatrix}\right)} X'\oplus Y'$, da zum einen $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\iota_a\end{smallmatrix}\right)$ monomorph ist und da zum anderen für $T \xrightarrow{(u\ v)} X\oplus Y$ mit $(u\ v)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\a&0\end{smallmatrix}\right) = (0\ 0)$ sich $va = 0$ ergibt, also v' mit $v'\iota_a = v$ existiert und somit auch $(u\ v')\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\iota_a\end{smallmatrix}\right) = (u\ v)$ gilt.

Dual ist $X\oplus Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\a&0\end{smallmatrix}\right)} X'\oplus Y' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\rho_a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)} \mathrm{C}_a\oplus Y'$ rechtsexakt.

Somit ergibt sich die lang exakte Sequenz aus dem Schlangenlemma zu

$$0 \to X \xrightarrow{(1\ 0)} X\oplus\mathrm{K}_a \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0\\\iota_a\end{smallmatrix}\right)} Y \xrightarrow{-a} X' \xrightarrow{(\rho_a\ 0)} \mathrm{C}_a\oplus Y' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)} Y \to 0\,.$$

Man kann auch den Spezialfall $X = 0$ und $Y' = 0$ dieses Diagramms betrachten. Auch diesenfalls ist der Konnektor durch $Y \xrightarrow{-a} X'$ gegeben.

Aufgabe 64

(1) Es ist $\mathbf{Z}/k$-mod eine volle additive Teilkategorie von $\mathbf{Z}/k$-Mod, da 0 endlich ist, und da die direkte Summe zweier endlicher $\mathbf{Z}/k$-Moduln wieder endlich ist, und in $\mathbf{Z}/k$-mod a fortiori (Sum 1-3) erfüllt.

Dank Aufgabe 55 genügt es zu zeigen, daß die in $\mathbf{Z}/k$-Mod genommenen Kern- und Cokernobjekte eines Morphismus in $\mathbf{Z}/k$-mod bereits in $\mathbf{Z}/k$-mod liegen.

Da $\mathbf{Z}/k$-mod dank Aufgabe 51.(1) äquivalent zu $\mathbf{Z}/k$-mod$^\circ$ ist, genügt es, dies für den Kern zu zeigen.

Aber ein Teilmodul eines endlichen Moduls ist endlich.

> Man sieht natürlich auch direkt, daß der in $\mathbf{Z}/k$-Mod genommene Cokern eines Morphismus in $\mathbf{Z}/k$-mod wieder in $\mathbf{Z}/k$-mod liegt.

(2) Da $\mathbf{Z}/k$-mod dank Aufgabe 51.(1) äquivalent zu $\mathbf{Z}/k$-mod$^\circ$ ist, vermittels einer Äquivalenz, unter welcher laut Aufgabe 51.(3) $(\mathbf{Z}/k)^{\oplus n}$ bis auf Isomorphie auf sich selbst geschickt wird, genügt es, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) zu zeigen.

(ii) $\Leftarrow$ (iii). Es genügt zu zeigen, daß $(\mathbf{Z}/k)^{\oplus n}$ in $\mathbf{Z}/k$-mod projektiv ist für $n \geqslant 0$. Dies ist aber laut Aufgabe 31.(3) sogar in $\mathbf{Z}/k$-Mod der Fall, also auch in $\mathbf{Z}/k$-mod, da Epimorphismen in $\mathbf{Z}/k$-mod auch in $\mathbf{Z}/k$-Mod noch epimorph sind.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Es ist X nach Aufgabe 18.(2) isomorph zu $\bigoplus_{i\in[1,m]} \mathbf{Z}/\ell_i$ für ein $m \geqslant 0$ und gewisse Teiler $\ell_i \geqslant 2$ von k; cf. §1.2.7.

Es genügt zu zeigen, daß $\bigoplus_{i\in[1,m]} \mathbf{Z}/\ell_i$ nicht projektiv ist in $\mathbf{Z}/k$-mod, falls $\ell_i < k$ ist für ein $i \in [1,m]$.

Dank Bemerkung 141 genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z}/\ell$ nicht projektiv ist in $\mathbf{Z}/k$-mod, falls ℓ ein Teiler von k mit $\ell \in [2, k-1]$ ist.

Annahme, es ist $\mathbf{Z}/\ell$ projektiv. Dann hat $\mathrm{id}_{\mathbf{Z}/\ell}$ ein Urbild unter

$$
{}_{\mathbf{Z}/k\text{-mod}}(\mathbf{Z}/\ell, \mathbf{Z}/k) \xrightarrow{{}_{\mathbf{Z}/k\text{-mod}}(\mathbf{Z}/\ell, 1)} {}_{\mathbf{Z}/k\text{-mod}}(\mathbf{Z}/\ell, \mathbf{Z}/\ell)\ ,
$$

in anderen Worten, es gibt ein $\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{c} \mathbf{Z}/k$ mit $(\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{c} \mathbf{Z}/k \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/\ell) = (\mathbf{Z}/\ell \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/\ell)$.

Der Repräsentant $c \in \mathbf{Z}$ ist durch k/ℓ teilbar, $c = d(k/\ell)$ für ein $d \in \mathbf{Z}$. Es ist also $d(k/\ell) = c = c \cdot 1 \equiv_\ell 1$ in $\mathbf{Z}$.

Da k eine Primpotenz ist, gibt es eine Primzahl p mit $k = p^\alpha$ für ein $\alpha > 0$. Ferner ist $\ell = p^\beta$ für ein $\beta \in [1, \alpha - 1]$. Also ist $0 \equiv_p dp^{\alpha-\beta} \equiv_{p^\beta} 1$, und wir haben einen *Widerspruch.*

(3) Nein, dies ist nicht der Fall.

Es ist $\mathbf{Z}/k$ nicht projektiv in $\mathbf{Z}$-Mod. Denn wäre dem so, so wäre $\mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/k$ eine Retraktion. Aber es ist ${}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/k, \mathbf{Z}) = \{0\}$, und somit ist dem nicht so.

Es ist $\mathbf{Z}/k$ nicht injektiv in $\mathbf{Z}$-Mod. *Annahme,* doch. Sei p Primteiler von k. Da $\mathbf{Z}/k$ injektiv ist, ist der Monomorphismus $\mathbf{Z}/k \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/kp$ eine Coretraktion. Also gibt es ein $a \in \mathbf{Z}$ mit $pa \equiv_k 1$. Da p ein Teiler von k ist, folgt $0 \equiv_p pa \equiv_p 1$, und wir haben einen *Widerspruch.*

(4) Da $\mathbf{Z}/k$-mod äquivalent zu $\mathbf{Z}/k$-mod$^\circ$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{Z}/k$-mod genügend Projektive hat.

Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Z}/k$-mod. Es ist X nach Aufgabe 18.(2) isomorph zu $\bigoplus_{i\in[1,m]} \mathbf{Z}/\ell_i$ für ein $m \geqslant 0$ und gewisse Teiler $\ell_i \neq 1$ von k.

Es genügt, einen Epimorphismus von einem Projektiven nach $\bigoplus_{i\in[1,m]} \mathbf{Z}/\ell_i$ in $\mathbf{Z}/k$-mod anzugeben. Dafür können wir e.g.

$$
\bigoplus_{i\in[1,m]} \mathbf{Z}/k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right)} \bigoplus_{i\in[1,m]} \mathbf{Z}/\ell_i
$$

anführen; cf. (2).

Aufgabe 65

(1) Gebe es ein Tupel $(X^i \xrightarrow{h^i} Y^{i-1})_{i \in \mathbf{Z}}$ von Morphismen in $\mathcal{A}$ so, daß $h^i d + d h^{i-1} = f^i$ für alle $i \in \mathbf{Z}$. Dann komponieren die beiden Morphismen von Komplexen

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[d, "c_X"] \\ C_X \arrow[d] \\ Y \end{tikzcd}\right) := \left(\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(1\ d)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & X^{i-1} \oplus X^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} h^{i-1}d \\ h^i \end{smallmatrix}\right)"] & X^i \oplus X^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} h^i d \\ h^{i+1} \end{smallmatrix}\right)"] & X^{i+1} \oplus X^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} h^{i+1}d \\ h^{i+2} \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d"] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^i \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots \end{tikzcd}\right)$$

zu f, mithin faktorisiert f über einen split azyklischen Komplex und verschwindet also in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Sei umgekehrt $f = 0$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, i.e. faktorisiere f über einen split azyklischen Komplex, o.E. wie folgt.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d"] & X^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(u^{i-1}\ v^{i-1})"] & X^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(u^i\ v^i)"] & X^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(u^{i+1}\ v^{i+1})"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & T^{i-1} \oplus T^i \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} a^{i-1} \\ b^{i-1} \end{smallmatrix}\right)"] & T^i \oplus T^{i+1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} a^i \\ b^i \end{smallmatrix}\right)"] & T^{i+1} \oplus T^{i+2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} a^{i+1} \\ b^{i+1} \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "d"] & Y^{i-1} \arrow[r, "d"] & Y^i \arrow[r, "d"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Sei also $f^i = u^i a^i + v^i b^i$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Aus den kommutativen Vierecken des oberen Komplexmorphismus entnehmen wir, daß $v^i = d u^{i+1}$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Aus den kommutativen Vierecken des unteren Komplexmorphismus entnehmen wir, daß $b^i d = a^{i+1}$ für $i \in \mathbf{Z}$.

Setze $h^i := u^i b^{i-1}$ für $i \in \mathbf{Z}$. Es ergibt sich

$$f^i \;=\; u^i a^i + v^i b^i \;=\; u^i b^{i-1} d + d u^{i+1} b^i \;=\; h^i d + d h^{i+1} \,.$$

(2) Zu zeigen ist nur, daß aus $X \simeq 0$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ folgt, daß X split azyklisch ist. Es folgt aus $X \simeq 0$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, daß $\mathrm{id}_X = 0_{X,X}$ in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, daß also id_X in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ über einen split azyklischen Komplex A faktorisiert. Somit gibt es eine Coretraktion $X \longrightarrow A$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Dank Aufgabe 58.(3) ist X also split azyklisch.

Aufgabe 66

(1) *Ad (i) ⇒ (ii).* Sei ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow{\Phi} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$ eine Isotransformation von Funktoren von $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B}$ nach (Sets). Wir schreiben $\Phi_{X,Y} := \Phi(X,Y)$ für $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B})$, i.e. für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ und $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$. Die Natürlichkeit von Φ besagt für $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{A}$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{B}$, daß

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{B}}(FX,Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "(Ff)(-)g"'] & {}_{\mathcal{A}}(X,GY) \arrow[d, "f(-)(Gg)"] \\ {}_{\mathcal{B}}(FX',Y') \arrow[r, "\Phi_{X',Y'}"] & {}_{\mathcal{A}}(X',GY') \end{tikzcd}$$

kommutiert, i.e. daß für $FX \xrightarrow{s} Y$ stets $((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} = f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)$ ist.
Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ setzen wir $\varepsilon X := (1_{FX})\Phi_{X,FX} : X \longrightarrow GFX$. Wir haben zu zeigen, daß $\varepsilon := (\varepsilon X)_{X\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}}$ eine Transformation ist. Sei hierzu $X \xrightarrow{f} X'$ in $\mathcal{A}$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, daß $f(\varepsilon X') = (\varepsilon X)(GFf)$. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} f(\varepsilon X') & = & f\big((1_{FX'})\Phi_{X',FX'}\big) \\ & = & ((Ff)1_{FX'})\Phi_{X,FX'} \\ & = & (1_{FX}(Ff))\Phi_{X,FX'} \\ & = & (1_{FX})\Phi_{X,FX}(GFf) \\ & = & (\varepsilon X)(GFf)\ . \end{array}$$

Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ setzen wir $\eta Y := (1_{GY})\Phi^{-1}_{GY,Y} : FGY \longrightarrow Y$. Dual zu ε ist auch $\eta := (\eta Y)_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}}$ eine Transformation.
Nun berechnen wir für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$

$$\begin{array}{rcl} (\varepsilon GY)(G\eta Y) & = & ((1_{FGY})\Phi_{GY,FGY})(G\eta Y) \\ & = & (1_{FGY}(\eta Y))\Phi_{GY,Y} \\ & = & (\eta Y)\Phi_{GY,Y} \\ & = & 1_{GY}\ . \end{array}$$

Dual ergibt sich auch $(F\varepsilon X)(\eta FX) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Ad (i) $\Leftarrow$ (ii). Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$. Für $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{B}$ setzen wir

$$(s)\Phi_{X,Y} \ := \ (\varepsilon X)(Gs)\ .$$

Umgekehrt setzen wir für $X \xrightarrow{t} GY$ in $\mathcal{A}$

$$(t)\Phi'_{X,Y} \ := \ (Ft)(\eta Y)\ .$$

Wir haben zu zeigen, daß sich $\Phi_{X,Y}$ und $\Phi'_{X,Y}$ wechselseitig invertieren und daß $\Phi := (\Phi_{X,Y})_{(X,Y)\in\operatorname{Ob}(\mathcal{A}^\circ\times\mathcal{B})}$ natürlich ist.
Zunächst wird

$$\begin{array}{rcl} ((s)\Phi_{X,Y})\Phi'_{X,Y} & = & ((\varepsilon X)(Gs))\Phi'_{X,Y} \\ & = & (F\varepsilon X)(FGs)(\eta Y) \\ & = & (F\varepsilon X)(\eta FX)s \\ & = & s\ . \end{array}$$

Dual dazu ist auch $((t)\Phi'_{X,Y})\Phi_{X,Y} = t$.

Seien nun $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{A}$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{B}$ und $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{B}$ gegeben. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} ((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} & = & (\varepsilon X')(GFf)(Gs)(Gg) \\ & = & f(\varepsilon X)(Gs)(Gg) \\ & = & f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)\ . \end{array}$$

(2) Es gibt ein $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow[\sim]{\alpha} G\circ F$.
Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathcal{B}}(FX,Y) & \xrightarrow[\sim]{\Phi_{X,Y}} & {}_{\mathcal{A}}(X,GY) \\ s & \longmapsto & (\alpha X)(Gs) \end{array}$$

da αX ein Isomorphismus ist und G gemäß Lemma 96.(1) voll und treu ist. Wie in der letzten Rechnung unter (1) sieht man, daß $\Phi := (\Phi_{X,Y})_{(X,Y)\in\operatorname{Ob}(\mathcal{A}^\circ\times\mathcal{B})}$ eine Transformation ist, denn für $X' \xrightarrow{f} X$ in $\mathcal{A}$ und $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{B}$ und $FX \xrightarrow{s} Y$ in $\mathcal{B}$ ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} ((Ff)sg)\Phi_{X',Y'} & = & (\alpha X')(GFf)(Gs)(Gg) \\ & = & f(\alpha X)(Gs)(Gg) \\ & = & f((s)\Phi_{X,Y})(Gg)\ . \end{array}$$

Cf. auch **[8,** Aufg. 10.(2).]

(3) Es ist ${}_{\mathcal{A}}(-,G(=)) \simeq {}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \simeq {}_{\mathcal{A}}(-,\tilde{G}(=))$. Der Funktor

$$H \;:=\; {}_{\mathcal{A}}(-,=) \;:\; \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}\,,\;\; X \longmapsto {}_{\mathcal{A}}(-,X)$$

ist voll und treu; cf. Aufgabe 41.(2). Es gibt ein $H\circ G \xrightarrow[\sim]{\alpha} H\circ\tilde{G}$. Für $Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$ sei $GY \xrightarrow{\beta Y} \tilde{G}Y$ durch $H\beta Y := \alpha Y$ definiert. Da αY ein Isomorphismus ist und H voll und treu, ist βY ein Isomorphismus; cf. Bemerkung 90. Bleibt die Natürlichkeit von $(\beta Y)_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}}$ zu zeigen. Sei $Y \xrightarrow{g} Y'$ in $\mathcal{B}$ gegeben. Es wird

$$H\big((Gg)(\beta Y')\big) \;=\; (HGg)(\alpha Y') = (\alpha Y)(H\tilde{G}g) = H\big((\beta Y)(\tilde{G}g)\big)\,,$$

wegen H treu mithin $(Gg)(\beta Y') = (\beta Y)(\tilde{G}g)$.

(4) Es gibt ein ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow[\sim]{\Phi} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$, notiert wie in (1).
Sei $Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$. Es ist ${}_{\mathcal{B}}(F0_{\mathcal{A}},Y) \simeq {}_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{A}},GY)$ einelementig, also $F0_{\mathcal{A}}$ initial, also $F0_{\mathcal{A}} \simeq 0_{\mathcal{B}}$; cf. Bemerkung 81.(1).
Für $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$ ist $(0_{FX,Y})\Phi_{X,Y} = (0_{FX,FX}0_{FX,Y})\Phi_{X,Y} = ((F0_{X,X})0_{FX,Y})\Phi_{X,Y} = 0_{X,X}\big((0_{FX,Y})\Phi_{X,Y}\big) = 0_{X,GY}$.
Seien $X_1,\, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß $\left(\begin{smallmatrix}F\iota_1\\F\iota_2\end{smallmatrix}\right) : FX_1\oplus FX_2 \longrightarrow F(X_1\oplus X_2)$ epimorph ist; cf. Bemerkung 109.(2). Sei $F(X_1\oplus X_2) \xrightarrow{u} Y$ mit $0 = \left(\begin{smallmatrix}F\iota_1\\F\iota_2\end{smallmatrix}\right)u = \left(\begin{smallmatrix}(F\iota_1)u\\(F\iota_2)u\end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Dann ist

$$0_{X_1\,,\,GY} \;=\; (0_{FX_1\,,\,Y})\Phi_{X_1\,,\,Y} \;=\; ((F\iota_1)u)\Phi_{X_1\,,\,Y} \;=\; \iota_1\big((u)\Phi_{X_1\oplus X_2\,,\,Y}\big)\,,$$

und genauso $0_{X_2,GY} = \iota_2\big((u)\Phi_{X_1\oplus X_2\,,\,Y}\big)$. Es folgt

$$(u)\Phi_{X_1\oplus X_2\,,\,Y} \;=\; 0_{X_1\oplus X_2\,,\,GY} \;=\; (0_{F(X_1\oplus X_2),Y})\Phi_{X_1\oplus X_2\,,\,Y}\,,$$

und somit $u=0$.

Sei $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$. Wir *behaupten,* daß ${}_{\mathcal{B}}(FX,Y) \xrightarrow[\sim]{\Phi_{X,Y}} {}_{\mathcal{A}}(X,GY)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist. Seien $FX \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathcal{B}$ gegeben. Dank (4°) ist G additiv. Es wird

$$\begin{array}{rcl}(g+g')\Phi_{X,Y} & = & (1_{FX}(g+g'))\Phi_{X,Y}\\ & = & ((1_{FX})\Phi_{X,FX})G(g+g')\\ & = & ((1_{FX})\Phi_{X,FX})(Gg+Gg')\\ & = & ((1_{FX})\Phi_{X,FX})(Gg)+((1_{FX})\Phi_{X,FX})(Gg')\\ & = & (1_{FX}g)\Phi_{X,Y}+(1_{FX}g')\Phi_{X,Y}\\ & = & (g)\Phi_{X,Y}+(g')\Phi_{X,Y}\;;\end{array}$$

cf. Bemerkung 111. Dies zeigt die *Behauptung,* und so auch abermals die oben gesehene Tatsache, daß $(0_{FX,Y})\Phi_{X,Y} = 0_{X,GY}$ für $X\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$.

(5) Es gibt ein ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow[\sim]{\Phi} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$, notiert wie in (1). Gemäß (4) und (4°) sind F und G additiv.
Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathcal{A}$. Wir haben zu zeigen, daß Fr ein Cokern von Fi ist. Sei hierzu $FX \xrightarrow{t} T$ in $\mathcal{B}$ mit $(Fi)t=0$ gegeben. Es ist $i\big((t)\Phi_{X,T}\big) = ((Fi)t)\Phi_{X',T} = (0_{FX',T})\Phi_{X',T} = 0_{X',GT}$; letztere Gleichheit folgt hierbei aus der Lösung zu (4). Da r ein Cokern zu i ist, gibt es ein $X'' \xrightarrow{u} GT$ in $\mathcal{A}$ mit $(t)\Phi_{X,T} = ru$. Es folgt

$$\big((Fr)\big((u)\Phi^{-1}_{X'',T}\big)\big)\Phi_{X,T} \;=\; r\big(\big((u)\Phi^{-1}_{X'',T}\big)\Phi_{X'',T}\big) \;=\; ru \;=\; (t)\Phi_{X,T}\,,$$

und somit $(Fr)\big((u)\Phi^{-1}_{X'',T}\big) = t$. Für die Eindeutigkeit dieser Faktorisierung bleibt zu zeigen, daß Fr epimorph ist. Ist $(Fr)v = 0_{FX,T}$ für ein $FX'' \xrightarrow{v} T$ in $\mathcal{B}$, so wird $r\big((v)\Phi_{X'',T}\big) = ((Fr)v)\Phi_{X,T} = (0_{FX,T})\Phi_{X,T} = 0_{X,GT}$, also $(v)\Phi_{X'',T} = 0_{X'',GT} = (0_{FX'',T})\Phi_{X'',T}$, also $v = 0_{FX'',T}$.

Aufgabe 67

Wir erinnern an $(F\varepsilon X)(\eta FX) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ und $(\varepsilon GY)(G\eta Y) = 1_{GY}$ für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$; cf. Aufgabe 66.(1.ii).

(1) Da F voll ist, gibt es ein $GFX \xrightarrow{a} X$ mit $Fa = \eta FX$. Aus $\mathrm{id}_{FX} = (F\varepsilon X)(\eta FX)$ folgt also

$$(\eta FX) \;=\; (\eta FX)(F\varepsilon X)(\eta FX) \;=\; \big(F(a(\varepsilon X))\big)(\eta FX)\,,$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{GFX} &= (\varepsilon GFX)(G\eta FX) \\ &= (\varepsilon GFX)\big(GF(a(\varepsilon X))\big)(G\eta FX) \\ &= a(\varepsilon X)(\varepsilon GFX)(G\eta FX) \\ &= a(\varepsilon X)\,. \end{aligned}$$

(2) Sei $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Da F voll ist, gibt es ein $GFX \xrightarrow{a} X$ mit $Fa = \eta FX$ und $\mathrm{id}_{GFX} = a(\varepsilon X)$; cf. Lösung zu (1). Aus

$$F\,\mathrm{id}_X \;=\; \mathrm{id}_{FX} \;=\; (F\varepsilon X)(\eta FX) \;=\; F((\varepsilon X)a)$$

folgt wegen F treu auch $\mathrm{id}_X = (\varepsilon X)a$. Also ist εX ein Isomorphismus mit $(\varepsilon X)^{-1} = a$.

Somit ist ε eine Isotransformation; cf. Bemerkung 92.

(3) Es sind F und G additiv, cf. Aufgabe 66.(4, 4°).

Sei $Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Y''$ eine Sequenz in $\mathcal{B}$.

Es respektiert G Cokerne, dies nach Voraussetzung, und Kerne, dies mit dem dualen Argument zur Lösung zu Aufgabe 66.(5).

Zu (Ab 1) *für* $\mathcal{A}$. Gegeben sei $X_1 \xrightarrow{x} X_2$ in $\mathcal{A}$. Wir wollen zeigen, daß das Kompositum $(G\mathrm{K}_{Fx} \xrightarrow{G\iota_{Fx}} GFX_1 \xrightarrow{(\varepsilon X_1)^{-1}} X_1)$ ein Kern von $X_1 \xrightarrow{x} X_2$ ist. Da $(\varepsilon X_1)(GFx) = x(\varepsilon X_2)$, genügt es zu zeigen, daß $G\iota_{Fx}$ ein Kern von GFx ist; cf. (2). Dies folgt, da G Kerne respektiert.

Zu (Ab 1°) *für* $\mathcal{A}$. Gegeben sei $X_1 \xrightarrow{x} X_2$ in $\mathcal{A}$. Wir wollen zeigen, daß das Kompositum $(X_2 \xrightarrow{\varepsilon X_2} GFX_2 \xrightarrow{G\rho_{Fx}} G\mathrm{C}_{Fx})$ ein Cokern von x ist. Da $(\varepsilon X_1)(GFx) = x(\varepsilon X_2)$, genügt es zu zeigen, daß $G\rho_{Fx}$ ein Cokern von GFx ist; cf. (2). Dies folgt, da G Cokerne respektiert.

$$\begin{tikzcd}
G\mathrm{K}_{Fx} \arrow[r, "G\iota_{Fx}"] \arrow[dr] & GFX_1 \arrow[r, "GFx"] & GFX_2 \arrow[r, "G\rho_{Fx}"] & G\mathrm{C}_{Fx} \\
& X_1 \arrow[u, "\varepsilon X_1", "\wr"'] \arrow[r, "x"] & X_2 \arrow[u, "\varepsilon X_2"', "\wr"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Zu (Ab 2, 2°) *für* $\mathcal{A}$. Es genügt zu zeigen, daß in $\mathcal{A}$ der Homomorphiesatz gilt, i.e. daß für einen gegebenen Morphismus $X_1 \xrightarrow{x} X_2$ in $\mathcal{A}$ der induzierte Morphismus von C_{ι_x} nach K_{ρ_x} ein Isomorphismus ist; cf. Lemma 123. Denn dies liefert für x monomorph, daß x ein Kern von ρ_x ist; dual liefert dies für x epimorph, daß x ein Cokern von ι_x ist; cf. Bemerkung 119.

Da $(\varepsilon X_1)(GFx) = x(\varepsilon X_2)$, genügt es zu zeigen, daß in $\mathcal{A}$ der Homomorphiesatz für GFx gilt; cf. (2) und Bemerkung 124.(2). Da G Kerne und Cokerne respektiert, folgt dies daraus, daß in $\mathcal{B}$ der Homomorphiesatz für Fx gilt.

Somit ist gezeigt, daß $\mathcal{A}$ abelsch ist.

Es ist F rechtsexakt; cf. Aufgabe 66.(5). Es ist G exakt, da G Kerne und Cokerne respektiert.

Aufgabe 68

(1) Sei ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow[\sim]{\Phi} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$ mit $1_{GY}\Phi^{-}_{GY,Y} = \eta Y : FGY \longrightarrow Y$ für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Sei ${}_{\mathcal{B}}(F(-),=) \xrightarrow[\sim]{\tilde{\Phi}} {}_{\mathcal{A}}(-,G(=))$ mit $1_{GY}\tilde{\Phi}^{-}_{GY,Y} = \tilde{\eta} Y : FGY \longrightarrow Y$ für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ setzen wir $uY := \eta Y \tilde{\Phi}_{GY,Y} : GY \longrightarrow GY$ und $\tilde{u}Y := \tilde{\eta}Y\Phi_{GY,Y} : GY \longrightarrow GY$.

Dann ist

$$\begin{array}{rcl} (uY)\tilde{\Phi}^{-}_{Y,GY} & \overset{1.}{=} & (uY\cdot 1_{GY})\tilde{\Phi}^{-}_{Y,GY} \;=\; FuY \cdot 1_{GY}\tilde{\Phi}^{-}_{Y,GY} \;=\; FuY \cdot \tilde{\eta}Y \\ & \overset{2.}{=} & \eta Y \tilde{\Phi}_{GY,Y}\tilde{\Phi}^{-}_{Y,GY} \;=\; \eta Y \, . \end{array}$$

Genauso ist $F\tilde{u}Y \cdot \eta Y = \tilde{\eta}Y$.

Bleibt zu zeigen, daß uY und $\tilde{u}Y$ sich gegenseitig invertieren für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ und daß das Tupel $(uY)_{Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}}$ natürlich ist.

Für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ ist

$$\begin{array}{rcl} 1_{GY} & = & (\eta Y)\Phi_{Y,GY} \\ & = & (FuY\cdot\tilde{\eta}Y)\Phi_{Y,GY} \\ & = & (FuY\cdot F\tilde{u}Y\cdot\eta Y)\Phi_{Y,GY} \\ & = & (F(uY\cdot\tilde{u}Y)\cdot\eta Y)\Phi_{Y,GY} \\ & = & (uY\cdot\tilde{u}Y)\cdot\eta Y\Phi_{Y,GY} \\ & = & uY\cdot\tilde{u}Y \, . \end{array}$$

Genauso folgt $\tilde{u}Y\cdot uY = 1_{GY}$.

Sei $Y \xrightarrow{y} Y'$ gegeben. Es wird

$$\begin{array}{rcl} uY\cdot Gy & = & \eta Y\tilde{\Phi}_{GY,Y}\cdot Gy \\ & = & 1_{GY}\Phi^{-}_{GY,Y}\tilde{\Phi}_{GY,Y}\cdot Gy \\ & = & (1_{GY}\Phi^{-}_{GY,Y}\cdot y)\tilde{\Phi}_{GY,Y'} \\ & = & (1_{GY}\cdot Gy)\Phi^{-}_{GY,Y'}\tilde{\Phi}_{GY,Y'} \\ & = & (Gy\cdot 1_{GY'})\Phi^{-}_{GY,Y'}\tilde{\Phi}_{GY,Y'} \\ & = & (FGy\cdot 1_{GY'}\Phi^{-}_{GY',Y'})\tilde{\Phi}_{GY,Y'} \\ & = & Gy\cdot 1_{GY'}\Phi^{-}_{GY',Y'}\tilde{\Phi}_{GY',Y'} \\ & = & Gy\cdot\eta Y'\tilde{\Phi}_{GY',Y'} \\ & = & Gy\cdot uY' \, . \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} GY \arrow[r, "uY"] \arrow[d, "Gy"'] & GY \arrow[d, "Gy"] \\ GY' \arrow[r, "uY'"] & GY' \end{tikzcd}$$

(2) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/2$-mod. Sei $\mathcal{B} = \mathbf{Z}/4$-mod.

Der Inklusionsfunktor $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ ist voll und treu.

Wir konstruieren Adjungierte unter Zuhilfenahme von Lemma 62.

Sei $M := {}_{\mathbf{Z}/4}\mathbf{Z}/2_{\mathbf{Z}/2}$. Es ist F isomorph zu $M \underset{\mathbf{Z}/2}{\otimes} -$. Folglich ist F linksadjungiert zu ${}_{\mathbf{Z}/4}(M,-)$, und damit auch zum Funktor $\mathbf{Z}/4\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Z}/2\text{-mod} : X \longmapsto \{x \in X \;:\; 2x = 0\}$, auf Morphismen die Einschränkungen. Dieser Funktor schickt den Epimorphismus $Z/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$ bis auf Isomorphie nach $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2$, ist also nicht exakt.

Sei $N := {}_{\mathbf{Z}/2}\mathbf{Z}/2_{\mathbf{Z}/4}$. Es ist F isomorph zu ${}_{\mathbf{Z}/2}(N,-)$. Folglich ist F rechtsadjungiert zu $N \underset{\mathbf{Z}/4}{\otimes} -$, und damit auch zum Funktor $\mathbf{Z}/4\text{-mod} \longrightarrow \mathbf{Z}/2\text{-mod} : X \longmapsto X/2X$, auf Morphismen die Induzierten. Dieser Funktor schickt den Monomorphismus $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4$ bis auf Isomorphie nach $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2$, ist also nicht exakt.

(3) Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$-free; cf. Aufgabe 52.(2). Sei $\mathcal{B} = \mathbf{Z}$-mod. Sei $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ der Inklusionsfunktor dieser vollen Teilkategorie.

Sei $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ auf Objekten $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$ definiert durch

$$TY \;:=\; \{\, y \in Y \;:\; \text{es gibt ein } z \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\} \text{ mit } zy = 0 \,\}$$

und auf Morphismen $Y' \xrightarrow{b} Y$ in $\mathcal{B}$ durch

$$Tb \;:=\; b|_{TY'}^{TY} \,.$$

Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist $FY := Y/TY$ eine freie abelsche Gruppe. Wir können also $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ auf $Y' \xrightarrow{b} Y$ in $\mathcal{B}$ definieren durch folgenden Morphismus split kurz exakter Sequenzen in $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} TY' \arrow[r, tail] \arrow[d, "Tb"'] & Y' \arrow[r, two heads, "rY'"] \arrow[d, "b"'] & GFY' \arrow[d, "GFb"] \\ TY \arrow[r, tail] & Y \arrow[r, two heads, "rY"] & GFY \end{tikzcd}$$

Hierbei sei $rY : Y \to Y/TY = FY = GFY$, $y \mapsto y + TY$, die Restklassenabbildung.

Es ist für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ und $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$

$$\begin{array}{rcl} {}_{\mathcal{A}}(FY, X) & \xrightarrow{\sim} & {}_{\mathcal{B}}(Y, GX) \\ c & \longmapsto & rY \cdot Gc \,, \end{array}$$

da ${}_{\mathcal{B}}(-, GX)$ die split kurz exakte Sequenz (TY, Y, GFY) in eine kurz exakte Sequenz mit verschwindendem Cokern überführt und da ${}_{\mathcal{B}}(GFY, GX) = {}_{\mathcal{A}}(FY, X)$ ist.

Dies definiert eine Isotransformation von ${}_{\mathcal{A}}(F(-), =)$ nach ${}_{\mathcal{B}}(-, G(=))$. Denn für $Y' \xrightarrow{b} Y$ in $\mathcal{B}$, $FY \xrightarrow{c} X$ in $\mathcal{A}$ und $X \xrightarrow{a} X'$ in $\mathcal{A}$ wird

$$Fb \cdot c \cdot a \;\longmapsto\; rY' \cdot GFb \cdot Gc \cdot Ga \;=\; b \cdot (rY \cdot Gc) \cdot Ga$$

abgebildet.

Folglich ist $F \dashv G$.

Wir *behaupten,* daß F Monomorphismen respektiert. Obiger Morphismus split kurz exakter Sequenzen mit $\mathbf{Q}$ tensoriert wird zu einem Morphismus split kurz exakter Sequenzen mit verschwindenden Kernen. Dies zeigt, daß aus $Y' \xrightarrow{b} Y$ monomorph folgt, daß $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} GFb$ monomorph ist. Dies wiederum zeigt, daß $\mathbf{Q} \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} \operatorname{Kern} GFb$ verschwindet. Da dieser Kern aber ebenfalls frei und endlich erzeugt über $\mathbf{Z}$ ist, folgt $\operatorname{Kern} GFb = 0$. Das zeigt die *Behauptung.*

Da $\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}$ in $\mathcal{A}$ mono- und epimorph ist, ohne ein Isomorphismus zu sein, ist $\mathcal{A}$ nicht abelsch.

Es wird $F(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2) \simeq (\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \longrightarrow 0)$. Folglich respektiert F Kerne nicht.

Es wird $G(\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \longrightarrow 0) = (\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \longrightarrow 0)$. Folglich respektiert G Cokerne nicht.

Aufgabe 69

(1) Es ist $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9$ ein Kern des der Stelle k nachfolgenden Differentials $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9$.

Es ist $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ ein Cokern des der Stelle k vorangehenden Differentials $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9$.

Mit diesen Wahlen von Kern und Cokern erhalten wir als Kompositum

$$(\mathrm{Z}^k X \xrightarrow{h_X^k} \tilde{\mathrm{Z}}^k X) \;=\; (\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{3 \cdot 1} \mathbf{Z}/3) \;=\; (\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/3)$$

Das Bild der Nullabbildung ist der Nullmodul, und folglich ist $\mathrm{H}^k X = 0$.

Da dies für jedes $k \in \mathbf{Z}$ zutrifft, ist X azyklisch.

(2) Es ist

$$
\begin{array}{rcl}
FX & = & (\dots \xrightarrow{\mathbf{Z}/3 \otimes_{\mathbf{Z}/27} 3} \mathbf{Z}/3 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{\mathbf{Z}/3 \otimes_{\mathbf{Z}/27} 3} \mathbf{Z}/3 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{\mathbf{Z}/3 \otimes_{\mathbf{Z}/27} 3} \mathbf{Z}/3 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{\mathbf{Z}/3 \otimes_{\mathbf{Z}/27} 3} \mathbf{Z}/3 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{\mathbf{Z}/3 \otimes_{\mathbf{Z}/27} 3} \dots) \\
& \simeq & (\dots \overset{3}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{3}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{3}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{3}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{3}{\to} \dots) \\
& = & (\dots \overset{0}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{0}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{0}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{0}{\to} \mathbf{Z}/3 \overset{0}{\to} \dots)\,.
\end{array}
$$

Folglich ist $\mathrm{H}^k FX \simeq \mathbf{Z}/3$ für $k \in \mathbf{Z}$.

Folglich ist FX nicht azyklisch, insbesondere nicht split azyklisch.

Da F additiv ist, würde aus X split azyklisch folgen, daß FX split azyklisch ist. Also ist X nicht split azyklisch.

(3) Es ist $\mathrm{H}^k Y = 0$ für $k \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0, 1, 2\}$.

Es ist $\mathrm{H}^0 Y = \mathrm{Z}^0 Y \simeq \mathbf{Z}/9$.

Es ist $\mathrm{H}^2 Y = \tilde{\mathrm{Z}}^0 Y \simeq \mathbf{Z}/9$.

Wir berechnen noch $\mathrm{H}^1 Y$. Es ist $\mathbf{Z}/9 \overset{3}{\to} \mathbf{Z}/27$ ein Kern des Differentials $\mathbf{Z}/27 \overset{9}{\to} \mathbf{Z}/27$. Es ist $\mathbf{Z}/27 \overset{1}{\to} \mathbf{Z}/9$ ein Cokern des Differentials $\mathbf{Z}/27 \overset{9}{\to} \mathbf{Z}/27$. Mit diesen Wahlen von Kern und Cokern erhalten wir als Kompositum

$$
(\mathrm{Z}^1 Y \xrightarrow{h^k_Y} \tilde{\mathrm{Z}}^1 Y) \;=\; (\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{3 \cdot 1} \mathbf{Z}/9) \;=\; (\mathbf{Z}/3 \overset{3}{\to} \mathbf{Z}/9)\,.
$$

Das Bild dieser injektiven $\mathbf{Z}/27$-linearen Abbildung ist isomorph zu $\mathbf{Z}/3$, und folglich ist $\mathrm{H}^1 Y \simeq \mathbf{Z}/3$.

(4) Wir behaupten, daß der folgende Komplexmorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ nicht verschwindet. Der untere Komplex sei dabei das gefragte Z.

$$
\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathbf{Z}/3}_{\text{Pos. } 0} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

Wir verwenden Aufgabe 65, um zu zeigen, daß dieser Morphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ nicht verschwindet.

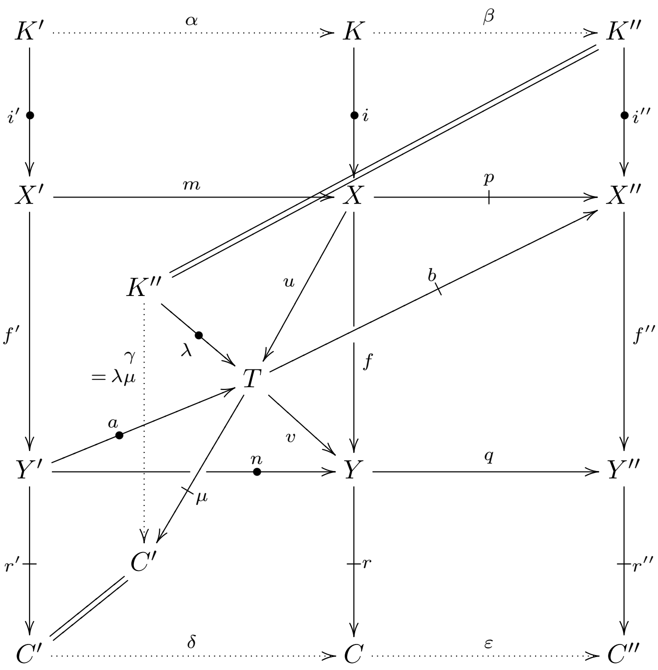
Annahme, er verschwindet in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. Dann können wir eine Homotopie $(h^k)_{k \in \mathbf{Z}}$ wählen, die diesen Morphismus liefert. Für $k \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{1\}$ ist $h^k = 0$. Sei $a := h^1 : \mathbf{Z}/9 \to \mathbf{Z}/3$. Es gilt

$$
1 \;=\; 3 \cdot h^1 + h^0 \cdot 0 \;=\; 3a\,,
$$

als Morphismus von $\mathbf{Z}/9$ nach $\mathbf{Z}/3$. Das geht nicht. *Widerspruch.*

Aufgabe 70

Wir sind in folgender Situation, wobei das entsprechende Diagramm für $(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')$ und der Morphismus zwischen dem zu (f', f, f'') und dem zu $(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'')$ gehörenden Diagramm gedanklich ergänzt werden muß.



Es wird $\alpha k\tilde{i} = \alpha i x = i' m x = i' x' \tilde{m} = k' \tilde{i}' \tilde{m} = k' \tilde{\alpha} \tilde{i}$, also $\alpha k = k' \tilde{\alpha}$.

Es wird $\beta k'' \tilde{i}'' = \beta i'' x'' = i p x'' = i x \tilde{p} = k \tilde{i} \tilde{p} = k \tilde{\beta} \tilde{i}''$, also $\beta k'' = k \tilde{\beta}$.

Dual ist $\delta c = c' \tilde{\delta}$ und $\varepsilon c'' = c \tilde{\varepsilon}$.

Es bleibt $\gamma c' \overset{!}{=} k'' \tilde{\gamma}$ zu zeigen.

Es ist $m(x\tilde{u}) = x' \tilde{m} \tilde{u} = x' \tilde{f}' \tilde{a} = f'(y' \tilde{a})$. Da (X', X, Y', T) ein Pushout ist, gibt es ein t mit $ut = x\tilde{u}$ und $at = y'\tilde{a}$.

Da (X', X, Y', T) ein Pushout ist, ist $\left(\begin{smallmatrix} u \\ -a \end{smallmatrix}\right)$ epimorph; cf. Lemma 134°.

Es ist $t\tilde{v} = vy$, da zum einen $a(t\tilde{v}) = y' \tilde{a} \tilde{v} = y' \tilde{n} = ny = a(vy)$ und zum anderen $u(t\tilde{v}) = x \tilde{u} \tilde{v} = x \tilde{f} = fy = u(vy)$.

Es ist $t\tilde{b} = bx''$, da zum einen $a(t\tilde{b}) = y' \tilde{a} \tilde{b} = 0 = a(bx'')$ und zum anderen $u(t\tilde{b}) = x \tilde{u} \tilde{b} = x \tilde{p} = p x'' = u(bx'')$.

Somit ist die Situation selbstdual; man hätte zur Konstruktion von t auch verwenden können, daß $(\tilde{T}, \tilde{X}'', \tilde{Y}, \tilde{Y}'')$ ein Pullback ist.

Wir wollen nun zeigen, daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$
\begin{tikzcd}
K'' \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "k''"'] & T \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "t"] & C' \arrow[d, "c'"] \\
\tilde{K}'' \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] & \tilde{T} \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & \tilde{C}'
\end{tikzcd}
$$

Dank Dualität genügt es, das rechte Viereck als kommutativ nachzuweisen.

In der Tat ist $\mu c' = t\tilde{\mu}$, da zum einen $u(\mu c') = 0 = x\tilde{u}\tilde{\mu} = u(t\tilde{\mu})$ und zum anderen $a(\mu c') = r'c' = y'\tilde{r}' = y'\tilde{a}\tilde{\mu} = a(t\tilde{\mu})$.

Damit ist das zur Aufgabe gestellte Diagramm als kommutativ nachgewiesen.

Es seien nun zwei Konstruktionen von γ gemäß Beweis zum Schlangenlemma aus Lemma 136 gegeben, in welchen während der Konstruktionen möglicherweise verschiedene Wahlen getroffen wurden, in welchen aber dasselbe i'' und dasselbe r' gewählt wurde. Dann können wir $(x', x, x'') := (1, 1, 1)$, $(y', y, y'') := (1, 1, 1)$ und $(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{f}'') := (f', f, f'')$ einsetzen, und im einen Diagramm die eine, im anderen Diagramm die andere Konstruktion verwenden. Wir erhalten zunächst $k'' = 1$ wegen der übereinstimmenden Wahl $i'' = \tilde{i}''$, und $c' = 1$ wegen der übereinstimmenden Wahl $r' = \tilde{r}'$. Nun haben wir insbesondere das kommutative Viereck

$$\begin{tikzcd} K'' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "1 = k''"'] & C' \arrow[d, "c' = 1"] \\ K'' = \tilde{K}'' \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] & \tilde{C}' = C' \end{tikzcd}$$

Es folgt $\gamma = \tilde{\gamma}$.

Aufgabe 71

(1) Wir zeigen zunächst, daß $F0_{\mathcal{A}} \overset{!}{\simeq} 0_{\mathcal{B}}$ ist.

Nach Voraussetzung an F ist für $X,\, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ die Abbildung ${}_{\mathcal{A}}(X, X') \to {}_{\mathcal{B}}(FX, FX')$, $u \mapsto Fu$ ein Gruppenmorphismus, weswegen $F0_{X,X'} = 0_{FX,FX'}$ gilt. Insbesondere wird

$$\mathrm{id}_{F0_{\mathcal{A}}} \;=\; F\,\mathrm{id}_{0_{\mathcal{A}}} \;=\; F0_{0_{\mathcal{A}},0_{\mathcal{A}}} \;=\; 0_{F0_{\mathcal{A}},F0_{\mathcal{A}}}\;.$$

Also sind die Morphismen $F0_{\mathcal{A}} \to 0_{\mathcal{B}}$ und $F0_{\mathcal{A}} \leftarrow 0_{\mathcal{B}}$ sich beidseitig invertierende Isomorphismen.

Seien $X_1,\, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Es genügt nun zu zeigen, daß $F(X_1 \oplus X_2) \xrightarrow{(F\pi_1\ F\pi_2)} FX_1 \oplus FX_2$ ein Monomorphismus ist. In der Tat ist $(F\pi_1\ F\pi_2)$ eine Coretraktion wegen

$$(F\pi_1\ F\pi_2)\binom{F\iota_1}{F\iota_2} \;=\; (F\pi_1)(F\iota_1)+(F\pi_2)(F\iota_2) \;=\; F(\pi_1\iota_1)+F(\pi_2\iota_2) \;=\; F(\pi_1\iota_1+\pi_2\iota_2) \;=\; F\,\mathrm{id}_{X\oplus Y} \;=\; \mathrm{id}_{F(X\oplus Y)}\;.$$

(2) Was die Definition der Funktoren Z^k und H^k angeht, sei auf §5.4.2 verwiesen.

Sei $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Gemäß (1) genügt es, $\mathrm{H}^k(f+g) \overset{!}{=} \mathrm{H}^k(f) + \mathrm{H}^k(g)$ zu zeigen.

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z}^k X \arrow[r, "\iota_{d_X^k}"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & X^k \arrow[d, "f^k"] \\ \mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "\iota_{d_Y^k}"] & Y^k\;. \end{tikzcd}$$

Es ist also $\mathrm{Z}^k f \cdot \iota_{d_Y^k} = \iota_{d_X^k} \cdot f^k$.

Genauso ist $\mathrm{Z}^k g \cdot \iota_{d_Y^k} = \iota_{d_X^k} \cdot g^k$ und $\mathrm{Z}^k(f+g) \cdot \iota_{d_Y^k} = \iota_{d_X^k} \cdot (f+g)^k$.

Also wird

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}^k(f+g)\cdot\iota_{d_Y^k} &= \iota_{d_X^k}\cdot(f+g)^k \\ &= \iota_{d_X^k}\cdot(f^k+g^k) \\ &= \iota_{d_X^k}\cdot f^k + \iota_{d_X^k}\cdot g^k \\ &= \mathrm{Z}^k f\cdot\iota_{d_Y^k} + \mathrm{Z}^k g\cdot\iota_{d_Y^k} \\ &= (\mathrm{Z}^k f + \mathrm{Z}^k g)\cdot\iota_{d_Y^k}\;. \end{aligned}$$

Da $\iota_{d_Y^k}$ monomorph ist, folgt

$$\mathrm{Z}^k(f+g) \;=\; \mathrm{Z}^k f + \mathrm{Z}^k g \;.$$

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k X \arrow[r, "\bar{h}_X^k"] \arrow[d, "\mathrm{Z}^k f"'] & \mathrm{H}^k X \arrow[d, "\mathrm{H}^k f"] \\
\mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "\bar{h}_Y^k"] & \mathrm{H}^k Y \;.
\end{tikzcd}$$

Es ist also $\mathrm{Z}^k f \cdot \bar{h}_Y^k = \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k f$.
Genauso ist $\mathrm{Z}^k g \cdot \bar{h}_Y^k = \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k g$ und $\mathrm{Z}^k(f+g) \cdot \bar{h}_Y^k = \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k(f+g)$.
Also wird

$$\begin{array}{rcl}
\bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k(f+g) & = & \mathrm{Z}^k(f+g) \cdot \bar{h}_Y^k \\
& = & (\mathrm{Z}^k f + \mathrm{Z}^k g) \cdot \bar{h}_Y^k \\
& = & \mathrm{Z}^k f \cdot \bar{h}_Y^k + \mathrm{Z}^k g \cdot \bar{h}_Y^k \\
& = & \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k f + \bar{h}_X^k \cdot \mathrm{H}^k g \\
& = & \bar{h}_X^k \cdot (\mathrm{H}^k f + \mathrm{H}^k g) \;.
\end{array}$$

Da $\bar{h}_X^k$ epimorph ist, folgt

$$\mathrm{H}^k(f+g) \;=\; \mathrm{H}^k f + \mathrm{H}^k g \;.$$

Alternative Lösung zu (2)*, ohne Verwendung von* (1)*.*

Wir *behaupten* zunächst, daß $\mathrm{Z}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ ein additiver Funktor ist. Es ist $\mathrm{Z}^k 0 \simeq 0$. Wir haben zu zeigen, daß für $X,\, Y \,\in\, \mathrm{C}(\mathcal{A})$ der Morphismus $(\,\mathrm{Z}^k\pi_1 \; \mathrm{Z}^k\pi_2\,) : \mathrm{Z}^k(X \oplus Y) \longrightarrow \mathrm{Z}^k X \oplus \mathrm{Z}^k Y$ ein Monomorphismus ist.
Hierzu betrachten wir folgendes Viereck.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k(X \oplus Y) \arrow[r, "\iota_{d^k_{X\oplus Y}}"] \arrow[d, "(\,\mathrm{Z}^k\pi_1 \; \mathrm{Z}^k\pi_2\,)"'] & X^k \oplus Y^k \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Z}^k X \oplus \mathrm{Z}^k Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} \iota_{d_X^k} & 0 \\ 0 & \iota_{d_Y^k} \end{smallmatrix}\right)"'] & X^k \oplus Y^k
\end{tikzcd}$$

Dieses kommutiert wegen $(\mathrm{Z}^k\pi_1)\iota_{d_X^k} = \iota_{d^k_{X\oplus Y}}\pi_1^k$ aus der Definition von $\mathrm{Z}^k\pi_1$, wegen $(\mathrm{Z}^k\pi_2)\iota_{d_Y^k} = \iota_{d^k_{X\oplus Y}}\pi_2^k$ aus der Definition von $\mathrm{Z}^k\pi_2$ und wegen $(\,\pi_1^k \; \pi_2^k\,) = \left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = \mathrm{id}_{X^k \oplus Y^k}$. Aus der Monomorphie von $\iota_{d^k_{X\oplus Y}}$ folgt die Monomorphie von $(\,\mathrm{Z}^k\pi_1 \; \mathrm{Z}^k\pi_2\,)$. Also ist Z^k additiv, was die *Behauptung* zeigt.

Dual dazu ist übrigens auch $\tilde{\mathrm{Z}}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ein additiver Funktor.

Wir *behaupten* nun, daß $\mathrm{H}^k : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ ein additiver Funktor ist. Zunächst ist $\mathrm{H}^k 0 \simeq 0$. Wir haben zu zeigen, daß für $X,\, Y \,\in\, \mathrm{C}(\mathcal{A})$ der Morphismus $\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{H}^k\iota_1 \\ \mathrm{H}^k\iota_2\end{smallmatrix}\right) : \mathrm{H}^k X \oplus \mathrm{H}^k Y \longrightarrow \mathrm{H}^k(X \oplus Y)$ ein Epimorphismus ist. Hierzu betrachten wir folgendes Viereck

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k(X \oplus Y) \arrow[r, "\bar{h}^k_{X\oplus Y}"] & \mathrm{H}^k(X \oplus Y) \\
\mathrm{Z}^k X \oplus \mathrm{Z}^k Y \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{Z}^k\iota_1 \\ \mathrm{Z}^k\iota_2\end{smallmatrix}\right)", "\wr"'] \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} \bar{h}_X^k & 0 \\ 0 & \bar{h}_Y^k \end{smallmatrix}\right)"'] & \mathrm{H}^k X \oplus \mathrm{H}^k Y \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{H}^k\iota_1 \\ \mathrm{H}^k\iota_2\end{smallmatrix}\right)"']
\end{tikzcd}$$

Dieses kommutiert wegen $(\mathrm{Z}^k\iota_1)\bar{h}^k_{X\oplus Y} = \bar{h}^k_X(\mathrm{H}^k\iota_1)$ aus der Definition von $\mathrm{H}^k\iota_1$ und wegen $(\mathrm{Z}^k\iota_2)\bar{h}^k_{X\oplus Y} = \bar{h}^k_Y(\mathrm{H}^k\iota_2)$ aus der Definition von $\mathrm{H}^k\iota_2$. Da Z^k additiv ist, ist $\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{Z}^k\iota_1\\ \mathrm{Z}^k\iota_2\end{smallmatrix}\right)$ ein Isomorphismus. Aus der Epimorphie von $\bar{h}^k_{X\oplus Y}$ folgt nun die Epimorphie von $\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{H}^k\iota_1\\ \mathrm{H}^k\iota_2\end{smallmatrix}\right)$. Also ist H^k additiv, was die *Behauptung* zeigt.

Aufgabe 72

Wir werden kommentarlos verwenden, daß $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})$ genau dann azyklisch ist, wenn $\mathrm{H}^k X \simeq 0$ ist für $k \in \mathbf{Z}$; cf. Bemerkung 143.

(1) Die Aussage ist richtig.

Seien X' und X'' azyklisch. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Es sind $\mathrm{H}^k X'$ und $\mathrm{H}^k X''$ isomorph zu 0. Die lang exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \longrightarrow \mathrm{H}^k X \longrightarrow \mathrm{H}^k X'' \longrightarrow \cdots$$

gibt also eine kurz exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathrm{H}^k X \longrightarrow 0$; cf. Lemma 145. Es folgt $0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k X$. Insgesamt ist also auch X azyklisch.

Seien X und X'' azyklisch. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Es sind $\mathrm{H}^{k-1} X''$ und $\mathrm{H}^k X$ isomorph zu 0. Die lang exakte Homologiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{k-1} X'' \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \longrightarrow \mathrm{H}^k X \longrightarrow \cdots$$

gibt also eine kurz exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathrm{H}^k X' \longrightarrow 0$; cf. Lemma 145. Es folgt $0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^k X'$. Insgesamt ist also auch X' azyklisch.

Dual folgt aus X' und X azyklisch, daß X'' azyklisch ist.

(2) Die Aussage ist falsch.

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit einem Objekt $U \not\simeq 0$.

(Man kann e.g. $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$-Mod und $U = \mathbf{Z}$ nehmen.)

Betrachte die folgenden, vertikal eingetragenen Morphismen von Komplexen.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & U \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "1"] & U \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Der obere und der untere Komplex sind split azyklisch.

Das Homologieobjekt des mittleren Komplexes an der Stelle U ist dagegen isomorph zu U und also nicht zu 0. Also ist der mittlere Komplex nicht azyklisch.

Nun ist der obere Komplexmorphismus epimorph, der untere monomorph. Der mittlere Komplex ist also isomorph zu I_f, wenn f das Kompositum der beiden Komplexmorphismen bezeichnet. Insbesondere verschwindet die Homologie von I_f nicht an jeder Stelle. Somit ist I_f nicht azyklisch.

Aufgabe 73

(1) Es ist $\mathbf{Z}/27$ ein injektives Objekt in $\mathbf{Z}/27$-Mod.

Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbf{Z}/27}_{\text{Pos. }0} \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27 \longrightarrow \cdots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/9$, mit $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.

Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbf{Z}/27}_{\text{Pos. }0} \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \longrightarrow \cdots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/9$, mit $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.

Wir ergänzen den gegebenen Morphismus $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ wie folgt zu einem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & \cdots \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Damit ist die gesuchte injektive Auflösung $I \xrightarrow{g} J$ wie folgt bestimmt.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] \arrow[d, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathbf{Z}/27}_{\text{Pos. }0} \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/27 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(2) Für einen Faktor $a \in \mathbf{Z}$ haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3x} \mathbf{Z}/27) \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "a"'] & {}_{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/27) \arrow[d, "{}_{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9,a)"] \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] & {}_{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/27) \\
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3x} \mathbf{Z}/27)
\end{tikzcd}$$

Denn ein Repräsentant x im linken oberen Eck wird auf beiden Wegen auf $(\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3ax} \mathbf{Z}/27)$ im rechten unteren Eck abgebildet.

Folglich können wir bis auf Isomorphie den Funktor F auf $I \xrightarrow{g} J$ dadurch anwenden, daß jedes Objekt $\mathbf{Z}/27$ ersetzt wird durch $\mathbf{Z}/9$ und dabei die Repräsentanten der Morphismen beibehalten werden. Dies gibt folgenden Komplexmorphismus, der als Diagramm isomorph zu $F(I \xrightarrow{g} J)$ ist.

$$
\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] \arrow[d, "3"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] \arrow[d, "3"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "1"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r] \arrow[d, "3"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathbf{Z}/9}_{\text{Pos. } 0} \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "9=0"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}
$$

(3) Im Komplexmorphismus, der in (2) bestimmt wurde, tragen wir an Position 2 die Objekte Z^2, $\tilde{\mathrm{Z}}^2$ und H^2 ein, sowie die zugehörigen Morphismen, die ein kommutatives Diagramm liefern. Dabei werden die Wahlen von Kern, Cokern und Bild wie angegeben getroffen.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{Z}/3 \arrow[drr, "1"] \arrow[ddd, "1"] & & & \\
 & \mathbf{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[drr, "1"] \arrow[ddd, "1"] & & & \mathbf{Z}/3 \arrow[ddd, "3"] & \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[rrr, "3"] \arrow[ddd, "1"] & & & \mathbf{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "0"] \arrow[ddd, "3"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[ddd, "1"] \\
 & & \mathbf{Z}/3 \arrow[drr, "3"] & & & \\
 & \mathbf{Z}/3 \arrow[ur, "1"] \arrow[drr, "3"] & & & \mathbf{Z}/9 & \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[rrr, "0"] & & & \mathbf{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "3"] & & \mathbf{Z}/9
\end{tikzcd}
$$

Somit ist $(\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J)$ bis auf Isomorphie berechnet zu $(\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3)$.

Aufgabe 74

Wir verwenden die Charakterisierung einer injektiven Auflösung aus Bemerkung 151.(2.iii); und dual, einer projektiven Auflösung.

Wir verwenden die Argumente zu "dicht" und "voll" aus dem Beweis zur Auflösungsäquivalenz, Lemma 149, und die Konstruktion aus dem Hufeisenlemma, Lemma 153.

(1) Wir finden e.g. die projektive Auflösung

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "16"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "16"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, dotted, "1"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[d, dotted, "4"] \\
\cdots \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, dotted, "1"] & \mathbf{Z}/8
\end{tikzcd}
$$

und die injektive Auflösung

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, dotted, "16"] \arrow[d, dotted, "4"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "16"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "16"] \arrow[d, "4"] & \cdots \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, dotted, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "8"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hierbei gehören die gepunktelten Teile nicht zur Auflösung. Die Komplexe sind durch Nullen ergänzt zu denken. Cf. Aufgabe 64.

(2) Wir finden e.g. die projektive Auflösung

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\0\end{smallmatrix}\right) \arrow[r, dotted, "\rho"] \arrow[d, hook] & \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\0\end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \arrow[d, dotted, "f"] \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \arrow[r, hook] & \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\end{smallmatrix}\right) \arrow[r, dotted, "\rho"] & \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}\end{smallmatrix}\right) / \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Q}\\0\\0\end{smallmatrix}\right)
\end{tikzcd}$$

Hierbei gehören die gepunktelten Teile nicht zur Auflösung. Die Komplexe sind durch Nullen ergänzt zu denken.

(3) Wir konstruieren wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, dotted, "4"] \arrow[d, dotted, "2"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \cdots \\
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, dotted, "(2\ 4)"] \arrow[d, dotted, "1"] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}2&0\\-1&2\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&4\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}2&0\\-1&2\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] & \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}4&0\\2&4\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] & \cdots \\
\mathbf{Z}/2 \arrow[r, dotted, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hierbei gehören die gepunktelten Teile nicht zur Auflösung. Die Komplexe sind durch Nullen ergänzt zu denken.

Die unteren linken Einträge der Differentiale des mittleren Komplexes sind dabei so gewählt, daß das Kompositum zweier Differentiale resp. des ersten Morphismus mit dem ersten konstruierten Differential verschwinden.

Aufgabe 75

Ohne Einschränkung ist

$$\begin{array}{rcl}
(X'^k \xrightarrow{i^k} X^k \xrightarrow{r^k} X''^k) & = & (X'^k \xrightarrow{(1\ 0)} X'^k \oplus X''^k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)} X''^k) \\
(\tilde{X}'^k \xrightarrow{\tilde{i}^k} X^k \xrightarrow{\tilde{r}^k} \tilde{X}''^k) & = & (\tilde{X}'^k \xrightarrow{(1\ 0)} \tilde{X}'^k \oplus \tilde{X}''^k \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)} \tilde{X}''^k)
\end{array}$$

für $k \geqslant 0$. Schreibe ferner

$$\begin{array}{rcll}
d & =: & \left(\begin{smallmatrix}d&0\\v^k&d\end{smallmatrix}\right) & : \; X'^k \oplus X''^k \longrightarrow X'^{k+1} \oplus X''^{k+1} \\
d & =: & \left(\begin{smallmatrix}d&0\\\tilde{v}^k&d\end{smallmatrix}\right) & : \; \tilde{X}'^k \oplus \tilde{X}''^k \longrightarrow \tilde{X}'^{k+1} \oplus \tilde{X}''^{k+1}
\end{array}$$

für $k \geqslant 0$. Beachte, daß sich $dd = 0$ zu $v^k d + dv^{k+1} = 0$ und $\tilde{v}^k d + d\tilde{v}^{k+1} = 0$ für $k \geqslant 0$ übersetzt.

Wir machen den Ansatz

$$f^k \;:=\; \begin{pmatrix} f'^k & 0 \\ \omega^k & f''^k \end{pmatrix} \;:\; X'^k \oplus X''^k \longrightarrow \tilde{X}'^k \oplus \tilde{X}''^k$$

mit noch zu bestimmendem $\omega^k : X''^k \longrightarrow \tilde{X}'^k$ für $k \geqslant 0$. Können wir die ω^k so bestimmen, daß $f = (f^k)_{k\in\mathbf{Z}}$ ein Komplexmorphismus wird, so ist bereits nach Konstruktion auch $if = f'\tilde{i}$ und $f\tilde{r} = rf''$ erfüllt.

Zu ω^0. Es ist

$$\begin{array}{rcl} (X^{-1} \xrightarrow{d} X^0) & = & (X^{-1} \xrightarrow{(e\ \ r^{-1}d)} X'^0 \oplus X''^0) \\ (\tilde{X}^{-1} \xrightarrow{d} \tilde{X}^0) & = & (\tilde{X}^{-1} \xrightarrow{(\tilde{e}\ \ \tilde{r}^{-1}d)} \tilde{X}'^0 \oplus \tilde{X}''^0) \end{array}$$

mit $i^{-1}e = d : X'^{-1} \longrightarrow X'^0$ und $\tilde{i}^{-1}\tilde{e} = d : \tilde{X}'^{-1} \longrightarrow \tilde{X}'^0$. Beachte, daß sich $dd = 0$ zu $ed + r^{-1}dv^0 = 0$ und $\tilde{e}d + \tilde{r}^{-1}d\tilde{v}^0 = 0$ übersetzt.

Wir suchen ein $\omega^0 : X''^0 \longrightarrow \tilde{X}'^0$, für welches $(e\ \ r^{-1}d)\begin{pmatrix} f'^0 & 0 \\ \omega^0 & f''^0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} f^{-1}\,(\tilde{e}\ \ \tilde{r}^{-1}d)$, i.e. $r^{-1}d\omega^0 \stackrel{!}{=} f^{-1}\tilde{e} - ef'^0$. Nun ist aber

$$\begin{array}{rcl} i^{-1}(f^{-1}\tilde{e} - ef'^0) & = & f'^{-1}\tilde{i}^{-1}\tilde{e} - df'^0 \\ & = & f'^{-1}d - f'^{-1}d \\ & = & 0\,. \end{array}$$

Also faktorisiert $f^{-1}\tilde{e} - ef'^0$ über den Cokern r^{-1} von i^{-1}. Da $X''^{-1} \xrightarrow{d} X^{-1}$ monomorph ist und $\tilde{X}'^0$ injektiv, faktorisiert $f^{-1}\tilde{e} - ef'^0$ weiter über $r^{-1}d$.

Zu ω^1. Wir suchen ein $\omega^1 : X''^1 \longrightarrow \tilde{X}'^1$, für welches $\begin{pmatrix} d & 0 \\ v^0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'^1 & 0 \\ \omega^1 & f''^1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} f'^0 & 0 \\ \omega^0 & f''^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ \tilde{v}^0 & d \end{pmatrix}$, i.e. $d\omega^1 \stackrel{!}{=} \omega^0 d + f''^0\tilde{v}^0 - v^0 f'^1$. Da $(d, \bar{d})$ rechtsexakt, $\dot{d}$ monomorph und $\tilde{X}'^1$ injektiv ist, sowie r^{-1} epimorph, genügt es, $r^{-1}d(\omega^0 d + f''^0\tilde{v}^0 - v^0 f'^1) \stackrel{!}{=} 0$ zu zeigen. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} r^{-1}d(\omega^0 d + f''^0\tilde{v}^0 - v^0 f'^1) & = & r^{-1}d\omega^0 d + r^{-1}df''^0\tilde{v}^0 - r^{-1}dv^0 f'^1 \\ & = & (f^{-1}\tilde{e} - ef'^0)d + f^{-1}\tilde{r}^{-1}d\tilde{v}^0 + edf'^1 \\ & = & f^{-1}(\tilde{e}d + \tilde{r}^{-1}d\tilde{v}^0) \\ & = & f^{-1}\cdot 0 \\ & = & 0\,. \end{array}$$

Zu ω^2. Wir suchen ein $\omega^2 : X''^2 \longrightarrow \tilde{X}'^2$, für welches $\begin{pmatrix} d & 0 \\ v^1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'^2 & 0 \\ \omega^2 & f''^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} f'^1 & 0 \\ \omega^1 & f''^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ \tilde{v}^1 & d \end{pmatrix}$, i.e. $d\omega^2 \stackrel{!}{=} \omega^1 d + f''^1\tilde{v}^1 - v^1 f'^2$. Da $(d, \bar{d})$ rechtsexakt, $\dot{d}$ monomorph und $\tilde{X}'^2$ injektiv ist, genügt es, $d(\omega^1 d + f''^1\tilde{v}^1 - v^1 f'^2) \stackrel{!}{=} 0$ zu zeigen. In der Tat wird

$$\begin{array}{rcl} d(\omega^1 d + f''^1\tilde{v}^1 - v^1 f'^2) & = & d\omega^1 d + df''^1\tilde{v}^1 - dv^1 f'^2 \\ & = & (\omega^0 d + f''^0\tilde{v}^0 - v^0 f'^1)d + f''^0 d\tilde{v}^1 + v^0 df'^2 \\ & = & f''^0\tilde{v}^0 d + f''^0 d\tilde{v}^1 \\ & = & 0\,. \end{array}$$

Usf.

Aufgabe 76

Sei $X' \overset{i}{\rightarrowtail} X \overset{r}{\twoheadrightarrow} X''$ zunächst nur eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Sei $\mathrm{Z}^k X'' \xrightarrow{\gamma} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X'$ der Konnektor für den Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$(X'^k, X^k, X''^k) \xrightarrow{(d^k_{X'},\, d^k_X,\, d^k_{X''})} (X'^{k+1}, X^{k+1}, X''^{k+1})$$

bezüglich $\mathrm{Z}^k X'' \xrightarrow{\iota_{d^k_{X''}}} X''^k$ und $X'^{k+1} \xrightarrow{\rho_{d^k_{X'}}} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X$; cf. Aufgabe 70.

Wir *behaupten,* daß

$$(\mathrm{Z}^k X'' \xrightarrow{\gamma} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X') \;=\; (\mathrm{Z}^k X'' \xrightarrow{\bar{h}^k_{X''}} \mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k_{(i,r)}} \mathrm{H}^{k+1} X' \xrightarrow{\dot{h}^{k+1}_{X'}} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X') \,.$$

Wir haben folgendes kommutative Viereck von Sequenzen.

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
(X'^k, X^k, X''^k) \arrow[r, "(\rho_{d^{k-1}_{X'}} \hat{d}^k_{X'} \,,\, \rho_{d^{k-1}_X} \hat{d}^k_X \,,\, \rho_{d^{k-1}_{X''}} \hat{d}^k_{X''})"] \arrow[d, "(\rho_{d^{k-1}_{X'}} \,,\, \rho_{d^{k-1}_X} \,,\, \rho_{d^{k-1}_{X''}})"'] & (\mathrm{Z}^{k+1} X', \mathrm{Z}^{k+1} X, \mathrm{Z}^{k+1} X'') \arrow[d, equal] \\
(\tilde{\mathrm{Z}}^k X', \tilde{\mathrm{Z}}^k X, \tilde{\mathrm{Z}}^k X'') \arrow[r, "(\hat{d}^k_{X'} \,,\, \hat{d}^k_X \,,\, \hat{d}^k_{X''})"] & (\mathrm{Z}^{k+1} X', \mathrm{Z}^{k+1} X, \mathrm{Z}^{k+1} X'')
\end{tikzcd}$$

Links sind beide Sequenzen rechtsexakt, rechts sind beide Sequenzen linksexakt.

Nun ist $\iota_{d^k_{X''}} : \mathrm{Z}^k X'' \longrightarrow X''^k$ ein Kern von $\rho_{d^{k-1}_{X''}} \hat{d}^k_{X''}$.

Es ist $\dot{h}^k_{X''} : \mathrm{H}^k X'' \longrightarrow \tilde{\mathrm{Z}}^k X''$ ein Kern von $\hat{d}^k_{X''}$.

Es ist $\iota_{d^k_{X''}} \rho_{d^{k-1}_{X''}} = \bar{h}^k_{X''} \dot{h}^k_{X''}$, also ist $\bar{h}^k_{X''}$ der auf diesen Kernen induzierte Morphismus.

Nun ist $\bar{h}^{k+1}_{X'} : \mathrm{Z}^{k+1} X' \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1} X'$ ein Cokern von $\rho_{d^{k-1}_{X'}} \hat{d}^k_{X'}$.

Es ist $\bar{h}^{k+1}_{X'} : \mathrm{Z}^{k+1} X' \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1} X'$ ein Cokern von $\hat{d}^k_{X'}$.

Es ist $\mathrm{id}_{\mathrm{Z}^{k+1} X'} \, \bar{h}^{k+1}_{X'} = \bar{h}^{k+1}_{X'} \, \mathrm{id}_{\mathrm{H}^{k+1} X'}$, also ist $\mathrm{id}_{\mathrm{H}^{k+1} X'}$ der auf diesen Cokernen induzierte Morphismus.

Sei $\vartheta : \mathrm{Z}^k X'' \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1} X'$ der Konnektor der oberen Zeile von $(*)$ bezüglich des angeführten Kerns $\iota_{d^k_{X''}}$ und des angeführten Cokerns $\bar{h}^{k+1}_{X'}$; cf. Aufgabe 70.

Es ist $\partial^k_{(i,r)} : \mathrm{Z}^k X'' \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1} X'$ der Konnektor der unteren Zeile von $(*)$ bezüglich des angeführten Kerns $\dot{h}^k_{X''}$ und des angeführten Cokerns $\bar{h}^{k+1}_{X'}$; cf. §5.4.4.

Aufgabe 70 liefert folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^k X'' \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\bar{h}^k_{X''}"'] & \mathrm{H}^{k+1} X' \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{H}^{k+1} X'}"] \\
\mathrm{H}^k X'' \arrow[r, "\partial^k_{(i,r)}"] & \mathrm{H}^{k+1} X'
\end{tikzcd}$$

Wir haben folgendes kommutative Viereck von Sequenzen.

$$(**) \qquad \begin{tikzcd}
(X'^k, X^k, X''^k) \arrow[r, "(\rho_{d^{k-1}_{X'}} \hat{d}^k_{X'} \,,\, \rho_{d^{k-1}_X} \hat{d}^k_X \,,\, \rho_{d^{k-1}_{X''}} \hat{d}^k_{X''})"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{Z}^{k+1} X', \mathrm{Z}^{k+1} X, \mathrm{Z}^{k+1} X'') \arrow[d, "(\iota_{d^{k+1}_{X'}} \,,\, \iota_{d^{k+1}_X} \,,\, \iota_{d^{k+1}_{X''}})"] \\
(X'^k, X^k, X''^k) \arrow[r, "(d^k_{X'} \,,\, d^k_X \,,\, d^k_{X''})"] & (X'^{k+1}, X^{k+1}, X''^{k+1})
\end{tikzcd}$$

Links sind beide Sequenzen rechtsexakt, rechts sind beide Sequenzen linksexakt.

Nun ist $\iota_{d^k_{X''}} : \mathrm{Z}^k X'' \longrightarrow X''^k$ ein Kern von $\rho_{d^{k-1}_{X''}} \hat{d}^k_{X''}$.

Es ist $\iota_{d^k_{X''}} : \mathrm{Z}^k X'' \longrightarrow X''^k$ ein Kern von $d^k_{X''}$.

Es ist $\iota_{d^k_{X''}} \, \mathrm{id}_{X''^k} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}^k X''} \, \iota_{d^k_{X''}}$, also ist $\mathrm{id}_{\mathrm{Z}^k X''}$ der auf diesen Kernen induzierte Morphismus.

Nun ist $\bar{h}_{X'}^{k+1} : \mathrm{Z}^{k+1}X' \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{k+1}X'$ ein Cokern von $\rho_{d_{X'}^{k-1}}\hat{d}_{X'}^{k}$.

Es ist $\rho_{d_{X'}^k} : X'^{k+1} \twoheadrightarrow \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}X'$ ein Cokern von $d_{X'}^k$.

Es ist $\iota_{d_{X'}^{k+1}}\rho_{d_{X'}^k} = \bar{h}_{X'}^{k+1}\dot{h}_{X'}^{k+1}$, also ist $\dot{h}_{X'}^{k+1}$ der auf diesen Cokernen induzierte Morphismus.

Es ist $\vartheta : \mathrm{Z}^kX'' \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}X'$ der Konnektor der oberen Zeile von $(**)$ bezüglich des angeführten Kerns $\iota_{d_{X''}^k}$ und des angeführten Cokerns $\bar{h}_{X'}^{k+1}$; cf. Aufgabe 70.

Es ist $\gamma : \mathrm{Z}^kX'' \longrightarrow \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}X'$ der Konnektor der unteren Zeile von $(**)$ bezüglich $\mathrm{Z}^kX'' \xrightarrow{\iota_{d_{X''}^k}} X''^k$ und $X'^{k+1} \xrightarrow{\rho_{d_{X'}^k}} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}X$; cf. Aufgabe 70.

Aufgabe 70 liefert folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Z}^kX'' \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{Z}^kX''}"'] & \mathrm{H}^{k+1}X' \arrow[d, "\dot{h}_{X'}^{k+1}"] \\
\mathrm{Z}^kX'' \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Z}^{k+1}X'
\end{tikzcd}$$

Die beiden resultierenden kommutativen Vierecke zeigen die *Behauptung.*

Sei nun $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine punktweise split kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Punktweise isomorphe Ersetzung zeigt, daß es einen Isomorphismus

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] & X'' \arrow[d, equal] \\
X' \arrow[r, "\tilde{i}"] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{r}"] & X''
\end{tikzcd}$$

gibt, in welchem die untere Sequenz von der Form

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d"'] & \vdots \arrow[d, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^{k-1} & d \end{pmatrix}"'] & \vdots \arrow[d, "d"'] \\
X'^k \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, "d"'] & X'^k \oplus X''^k \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^{k} & d \end{pmatrix}"'] & X''^k \arrow[d, "d"'] \\
X'^{k+1} \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, "d"'] & X'^{k+1} \oplus X''^{k+1} \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^{k+1} & d \end{pmatrix}"'] & X''^{k+1} \arrow[d, "d"'] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

ist.

Sei $k \in \mathbf{Z}$.

Sei $\mathrm{Z}^kX'' \xrightarrow{\gamma} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1}X'$ der Konnektor für den Morphismus kurz exakter Sequenzen

$$(X'^k, X^k, X''^k) \xrightarrow{(d_{X'}^k,\, d_X^k,\, d_{X''}^k)} (X'^{k+1}, X^{k+1}, X''^{k+1})$$

sowie für den Morphismus

$$(X'^k, \tilde{X}^k, X''^k) \xrightarrow{(d^k_{X'},\, d^k_{\tilde{X}},\, d^k_{X''})} (X'^{k+1}, \tilde{X}^{k+1}, X''^{k+1})$$

bezüglich $\mathrm{Z}^k X'' \xrightarrow{\iota_{d^k_{X''}}} X''^k$ und $X'^{k+1} \xrightarrow{\rho_{d^k_{X'}}} \tilde{\mathrm{Z}}^{k+1} X$; cf. Aufgabe 70.

Es wird

$$\bar{h}^k_{X''} \partial^k_{(i,r)} \dot{h}^{k+1}_{X'} \;=\; \gamma \;=\; \bar{h}^k_{X''} \partial^k_{(\tilde{i},\tilde{r})} \dot{h}^{k+1}_{X'}\ ,$$

und also

$$\partial^k_{(i,r)} \;=\; \partial^k_{(\tilde{i},\tilde{r})}\ .$$

Somit dürfen wir annehmen, daß $(i,r) = (\tilde{i},\tilde{r})$.

Wir *behaupten,* daß $\gamma = -\iota_d\, w^k \rho_d$ ist. Konstruiere hierzu folgendes Diagramm wie in §4.5.3.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathrm{Z}^k X'' \arrow[d, "\iota_d"] \arrow[ddlll, equal] \\
X'^k \arrow[rrr, "(1\ 0)"] \arrow[dddd, "d"'] & & & X'^k \oplus X''^k \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[ddl, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^k & 1 \end{pmatrix}"'] \arrow[ddd, "\begin{pmatrix} d & 0 \\ w^k & d \end{pmatrix}"] & X''^k \arrow[ddd, "d"] \\
 & \mathrm{Z}^k X'' \arrow[dr, "(0\ \iota_d)"'] \arrow[ddd, dotted, "\gamma"'] & & & \\
 & & X'^{k+1} \oplus X''^k \arrow[uurr, "\binom{0}{1}"'] \arrow[dr, "\binom{1\ 0}{0\ d}"] \arrow[ddl, "\binom{\rho_d}{-w^k \rho_d}"] & & \\
X'^{k+1} \arrow[urr, "(1\ 0)"] \arrow[rrr, "(1\ 0)"] \arrow[dd, "\rho_d"'] & & & X'^{k+1} \oplus X''^{k+1} \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & X''^{k+1} \\
 & \tilde{\mathrm{Z}}^k X' \arrow[dl, equal] & & & \\
\tilde{\mathrm{Z}}^k X' & & & &
\end{tikzcd}$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Betrachte den Morphismus von Komplexen $X'' \xrightarrow{w} X'[1]$, gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & X''^k \arrow[r, "d"] \arrow[d, "w^k"'] & X''^{k+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "w^{k+1}"'] & X''^{k+2} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "w^{k+2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "-d"] & X'^{k+1} \arrow[r, "-d"] & X''^{k+2} \arrow[r, "-d"] & X''^{k+3} \arrow[r, "-d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wir *behaupten,* daß $(\mathrm{H}^k X'' \xrightarrow{\partial^k_{(i,r)}} \mathrm{H}^{k+1} X') = \mathrm{H}^k(X'' \xrightarrow{-w} X'[1])$ ist für $k \in \mathbf{Z}$. Es genügt zu zeigen, daß

$$\bar{h}^k_{X''} \partial^k_{(i,r)} \dot{h}^{k+1}_{X'} \;\overset{!}{=}\; -\bar{h}^k_{X''} (\mathrm{H}^k w) \dot{h}^{k+1}_{X'}$$

ist. Aber

$$\bar{h}^k_{X''} (\mathrm{H}^k w) \dot{h}^{k+1}_{X'} \;=\; (\mathrm{Z}^k w) \bar{h}^{k+1}_{X'} \dot{h}^{k+1}_{X'} \;=\; (\mathrm{Z}^k w) \iota_d \rho_d \;=\; \iota_d w^k \rho_d \;=\; -\gamma$$

und

$$\bar{h}^k_{X''}\partial^k_{(i,r)}\dot{h}^{k+1}_{X'} \;=\; \gamma\,.$$

Dies zeigt die *Behauptung.*

Der Morphismus von Komplexen $X'' \xrightarrow{-w} X'[1]$ löst nun die Aufgabe.

Aufgabe 77

(1) Wir haben folgendes kommutatives Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "(0\;1)"] \arrow[d, equal] & X \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}f&0\\1&g\end{smallmatrix}\right)"'] & X \arrow[d, "fg"] \\
Y \arrow[r, "(1\;g)"'] \arrow[d, equal] & Y \oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}g\\-1\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1&g\\0&-1\end{smallmatrix}\right)"', "\wr"] & Z \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "(1\;0)"'] & Y \oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Dessen untere Hälfte zeigt, daß mit der unteren auch die mittlere Zeile eine kurz exakte Sequenz ist; beachte $\left(\begin{smallmatrix}1&g\\0&-1\end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Es folgt, daß $(X\oplus Y, Y\oplus Z, X, Z)$ ein Quadrat ist; cf. Korollar 135.(1).

(2) Schreibe kurz $m := \left(\begin{smallmatrix}f&0\\1&g\end{smallmatrix}\right)$. Aus (1) erhalten wir mit Korollar 135.(1) folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_m \arrow[r, "p", "\sim"'] \arrow[d, "\iota_m"'] & \mathrm{K}_{fg} \arrow[d, "\iota_{fg}"] \\
X \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}f&0\\1&g\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & X \arrow[d, "fg"] \\
Y \oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}g\\-1\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, "\rho_m"'] & Z \arrow[d, "\rho_{fg}"] \\
\mathrm{C}_m \arrow[r, "\sim", "q"'] & \mathrm{C}_{fg}
\end{tikzcd}$$

Bilde dazuhin folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_f \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\iota_f"'] & \mathrm{K}_m \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\iota_m"] & \mathrm{K}_g \arrow[d, "\iota_g"] \\
X \arrow[r, "(1\;0)"] \arrow[d, "f"'] & X \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}f&0\\1&g\end{smallmatrix}\right)"] & Y \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "(1\;0)"] \arrow[d, "\rho_f"'] & Y \oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\rho_m"] & Z \arrow[d, "\rho_g"] \\
\mathrm{C}_f \arrow[r, "u"'] & \mathrm{C}_m \arrow[r, "v"'] & \mathrm{C}_g
\end{tikzcd}$$

Der Konnektor ist gemäß einer Behauptung aus der Lösung zu Aufgabe 76 gegeben durch $-\iota_g\,\rho_f$. Laut Schlangenlemma 136 ist also die Sequenz $(r, s, -\iota_g\,\rho_f, u, v)$ exakt, mit r monomorph und v epimorph.

Bilde folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{K}_g \arrow[rr, "\iota_g\,\rho_f"] \arrow[dr, "\iota_g"] & & \mathrm{C}_f \arrow[ddrr, "\tilde{u}"] & & \\
 & & & Y \arrow[ur, "\rho_f"] \arrow[dr, "g"] & & & \\
\mathrm{K}_{fg} \arrow[uurr, "\tilde{s}"] \arrow[rr, "\iota_{fg}"] & & X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "fg"] & & Z \arrow[rr, "\rho_{fg}"] \arrow[dr, "\rho_g"] & & \mathrm{C}_{fg} \arrow[dl, "\tilde{v}"] \\
 & \mathrm{K}_f \arrow[ul, "\tilde{r}"] \arrow[ur, "\iota_f"] & & & & \mathrm{C}_g &
\end{tikzcd}$$

Um das Umfangssequenzlemma 132 abzuleiten, genügt es nun zu zeigen, daß rp und $\tilde{r}$, daß p^-s und $\tilde{s}$, daß uq und $\tilde{u}$ sowie daß q^-v und $\tilde{v}$ jeweils bis auf Vorzeichen übereinstimmen.

Es folgt $rp \overset{!}{=} \tilde{r}$ aus

$$rp\,\iota_{fg} \;=\; r\iota_m \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \;=\; \iota_f \left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \;=\; \iota_f \;=\; \tilde{r}\iota_{fg}$$

und der Monomorphie von ι_{fg} .

Wir *behaupten,* daß $-p^-s \overset{!}{=} \tilde{s}$ ist.

Es ist $\iota_m \begin{pmatrix} f\\1\end{pmatrix} = 0$, also $\iota_m \begin{pmatrix} f\\0\end{pmatrix} = -\iota_m \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = -s\iota_g$.

Es ist $p^-\iota_m \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \iota_{fg}$.

Insgesamt wird

$$\tilde{s}\,\iota_g \;=\; \iota_{fg}\,f \;=\; p^-\iota_m \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) f \;=\; p^-\iota_m \begin{pmatrix} f\\0\end{pmatrix} \;=\; -p^-s\iota_g$$

Da ι_g monomorph ist, zeigt dies die *Behauptung.*

Es folgt $uq \overset{!}{=} \tilde{u}$ aus

$$\rho_f uq \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)\rho_m q \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} g\\-1\end{pmatrix}\rho_{fg} \;=\; g\rho_{fg} \;=\; \rho_f\tilde{u}$$

und der Epimorphie von ρ_f .

Es folgt $-q^-v \overset{!}{=} -\tilde{v}$ aus

$$-\rho_{fg}\,q^-v \;=\; \left(\begin{smallmatrix}0&1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} g\\-1\end{pmatrix}\rho_{fg}\,q^-v \;=\; \left(\begin{smallmatrix}0&1\end{smallmatrix}\right)\rho_m qq^-v \;=\; \left(\begin{smallmatrix}0&1\end{smallmatrix}\right)\rho_m v \;=\; \left(\begin{smallmatrix}0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\rho_g \;=\; \rho_g \;=\; \rho_{fg}\tilde{v}$$

und aus der Epimorphie von ρ_{fg} .

Aufgabe 78

(1) Die Aussage ist falsch. Sei $\mathcal{A} = \mathbf{Z}$-Mod. Sei $P = \mathbf{Z}$, was in $\mathcal{A}$ ein projektives Objekt ist. Sei $Y = \mathbf{Z}$. Dann ist

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(P, Y) \;\simeq\; {}_{\mathcal{A}}(P, Y) \;=\; {}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \;\simeq\; \mathbf{Z} \;\not\simeq\; 0\,.$$

(2) Die Aussage ist richtig. Da P projektiv ist, ist der Funktor $F := {}_{\mathcal{A}}(P, -)$ exakt.
Zum injektiven Auflösen von Y bilden wir einen azyklischen Komplex

$$\ldots \to 0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$$

mit I^j injektiv für $j \geqslant 0$. Dieser wird vom exakten Funktor $F = {}_{\mathcal{A}}(P, -)$ auf den azyklischen Komplex

$$\ldots \to F0 \to FY \to FI^0 \to FI^1 \to FI^2 \to \ldots$$

abgebildet. Somit verschwinden seine Homologieobjekte. Also verschwinden die Homologieobjekte des Komplexes

$$\ldots \to 0 \to FI^0 \to FI^1 \to FI^2 \to \ldots$$

an Position $\geqslant 1$. Mit anderen Worten, es ist

$$0 \simeq \mathrm{H}^k FI \simeq (\mathrm{R}^k F)(Y) = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P, Y) .$$

für $k \geqslant 1$.

(3) Die Aussage ist richtig.
Wir lösen I injektiv wie folgt auf: Wir bilden den azyklischen Komplex

$$\ldots \to 0 \to I \xrightarrow{\mathrm{id}_I} I \to 0 \to 0 \to \ldots$$

mit I an den Positionen -1 und 0. Daraus entsteht die injektive Auflösung

$$\ldots \to 0 \to I \to 0 \to 0 \to \ldots$$

mit I an Position 0. Wir wenden $F := {}_{\mathcal{A}}(X, -)$ auf diese injektive Auflösung an und erhalten

$$\ldots \to 0 \to FI \to 0 \to 0 \to \ldots$$

Diese Komplex hat verschwindende Homologieobjekte an Positionen $\geqslant 1$. Mit anderen Worten, es ist

$$0 \simeq (\mathrm{R}^k F)(X) = \mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, I) .$$

für $k \geqslant 1$.

(4) Die Aussage ist richtig. Da wir den Isomorphismus $R \otimes_R X \xrightarrow{\sim} X$, $r \otimes x \mapsto rx$, für $X \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$ haben, der natürlich in X ist, ist der Funktor $F := R \otimes_R -$ exakt.
Zum projektiven Auflösen von M bilden wir einen azyklischen Komplex

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \to \ldots$$

mit P_j projektiv für $j \geqslant 0$. Dieser wird vom exakten Funktor F auf den azyklischen Komplex

$$\ldots \to FP_2 \to FP_1 \to FP_0 \to FM \to F0 \to \ldots$$

abgebildet. Somit verschwinden seine Homologieobjekte. Also verschwinden die Homologieobjekte des Komplexes

$$\ldots \to FP_2 \to FP_1 \to FP_0 \to 0 \to \ldots$$

an Position $\geqslant 1$. Mit anderen Worten, es ist

$$0 \simeq \mathrm{H}_k FP \simeq (\mathrm{L}^k F)(M) = \mathrm{Tor}^R_k(R, M) .$$

für $k \geqslant 1$.

Aufgabe 79

(1) Es ist $\mathbf{Z}/27$ projektiv in $\mathbf{Z}/27$-Mod.

Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "3"] & & \\
\dots & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/3
\end{tikzcd}$$

Somit erhalten wir die folgende projektive Auflösung von $\mathbf{Z}/3$.

$$\dots \longrightarrow \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/27 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/27 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Für einen Faktor $a \in \mathbf{Z}$ haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
(x+9\mathbf{Z}) \otimes (y+27\mathbf{Z}) \arrow[r, mapsto] & xy+9\mathbf{Z} \\
\mathbf{Z}/9 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathbf{Z}/9 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} a"'] & \mathbf{Z}/9 \arrow[d, "a"] \\
\mathbf{Z}/9 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} \mathbf{Z}/27 \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{Z}/9 \\
(x+9\mathbf{Z}) \otimes (y+27\mathbf{Z}) \arrow[r, mapsto] & xy+9\mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

Denn auf beiden Wegen wird der Elementartensor $(x+9\mathbf{Z}) \otimes (y+27\mathbf{Z})$ nach rechts unten auf $axy + 9\mathbf{Z}$ abgebildet.

Folglich können wir bis auf Isomorphie den Funktor $\mathbf{Z}/9 \underset{\mathbf{Z}/27}{\otimes} -$ dadurch auf die gefundene projektive Auflösung anwenden, indem wir jedes Objekt $\mathbf{Z}/27$ ersetzen durch $\mathbf{Z}/9$ und dabei die Repräsentanten der Morphismen beibehalten. Sodann können wir die Repräsentanten noch modulo 9 reduzieren. Wir erhalten folgenden Komplex.

$$\dots \longrightarrow \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Wir berechnen wie folgt die Homologie an jeder Stelle.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "3"] & & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "1"] & & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "3"] & & & & \\
 & & \mathbf{Z}/3 \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "3"'] & & \mathbf{Z}/9 & \mathbf{Z}/9 \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & \mathbf{Z}/3 & \mathbf{Z}/3 \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "3"'] & & \mathbf{Z}/9 & & \mathbf{Z}/3 & \\
\dots \arrow[r] & \mathbf{Z}/9 \arrow[rr, "0"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[rrr, "3"] \arrow[ur, "1"'] & & & \mathbf{Z}/9 \arrow[rrr, "0"] \arrow[ur, "1"'] & & & \mathbf{Z}/9 \arrow[rr, "3"] \arrow[ur, "1"'] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[rr] \arrow[ur, "1"'] & & 0
\end{tikzcd}$$

Usf. Folglich ist $\operatorname{Tor}_k^{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3) \simeq \mathbf{Z}/3$ für $k \geqslant 0$.

(2) Wir haben über $\mathbf{Z}$ den azyklischen Komplex

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{3} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Somit haben wir folgende projektive Auflösung von $\mathbf{Z}/3$.

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{3} \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Anwenden des Funktors $\mathbf{Z}/9 \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} -$ liefert nach isomorpher Ersetzung folgenden Komplex.

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Hierbei steht $\mathbf{Z}/9$ an den Positionen 1 und 0.

Bilden der Homologie H_k an den Positionen $k \geqslant 0$ liefert

$$\mathrm{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3) \;\simeq\; \mathbf{Z}/3$$

für $k \in \{0,1\}$ (war nicht verlangt), aber

$$\mathrm{Tor}_k^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3) \;\simeq\; 0$$

für $k \geqslant 2$.

Somit ist z.B. $\mathrm{Tor}_2^{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3) \simeq \mathbf{Z}/3 \not\simeq 0$ nach (1), aber $\mathrm{Tor}_2^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/3) \simeq 0$.

Aufgabe 80

(1) Es ist $\mathbf{Z}/81$ ein injektives Objekt in $\mathbf{Z}/81$-Mod.

Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbf{Z}/27 \arrow[dr, "3"] & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "27"] & & \mathbf{Z}/27 \arrow[dr, "3"] & & \mathbf{Z}/3 \arrow[dr, "27"] & \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "27"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbf{Z}/81}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/81 \xrightarrow{27} \mathbf{Z}/81 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/81 \xrightarrow{27} \mathbf{Z}/81 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/3$, mit $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{27} \mathbf{Z}/81$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.

Wir fügen wie folgt kurz exakte Sequenzen aneinander.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "9"] & & \mathbf{Z}/9 \arrow[dr, "9"] & \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \arrow[ur, "1"] & & \mathbf{Z}/81 \ldots
\end{tikzcd}$$

Folglich ist

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbf{Z}/81}_{\text{Pos. } 0} \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/81 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/81 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/81 \xrightarrow{9} \mathbf{Z}/81 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung von $\mathbf{Z}/3$, mit $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{27} \mathbf{Z}/81$ als Kern des Differentials von Position 0 zu Position 1.

Wir setzen ein Hufeisendiagramm an.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "9"'] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \ldots \\
\mathbf{Z}/27 \arrow[r, "(a\ 9)"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}3&0\\b_0&9\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}27&0\\b_1&9\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}3&0\\b_2&9\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}27&0\\b_3&9\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] & \ldots \\
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Das obere linke kommutative Viereck verlangt $9a \equiv_{81} 27$. Wir wählen $a = 3$.

Die Differentialbedingung $(\begin{smallmatrix}3&9\end{smallmatrix})\left(\begin{smallmatrix}3&0\\b_0&9\end{smallmatrix}\right) = (\begin{smallmatrix}0&0\end{smallmatrix})$ verlangt $9 + 9b_0 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_0 = -1$.

Die Differentialbedingung $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ b_1 & 9 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ verlangt $-27 + 9b_1 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_1 = 3$.
Die Differentialbedingung $\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ b_2 & 9 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ verlangt $9 + 9b_2 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_2 = -1$.
Die Differentialbedingung $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 9 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ b_3 & 9 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ verlangt $-27 + 9b_3 \equiv_{81} 0$. Wir wählen $b_3 = 3$.
Usf.
Somit erhalten wir folgende injektive Hufeisenauflösung.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "27"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 27 & 0 \\ 3 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/81^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r, "9"] & \mathbf{Z}/81 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

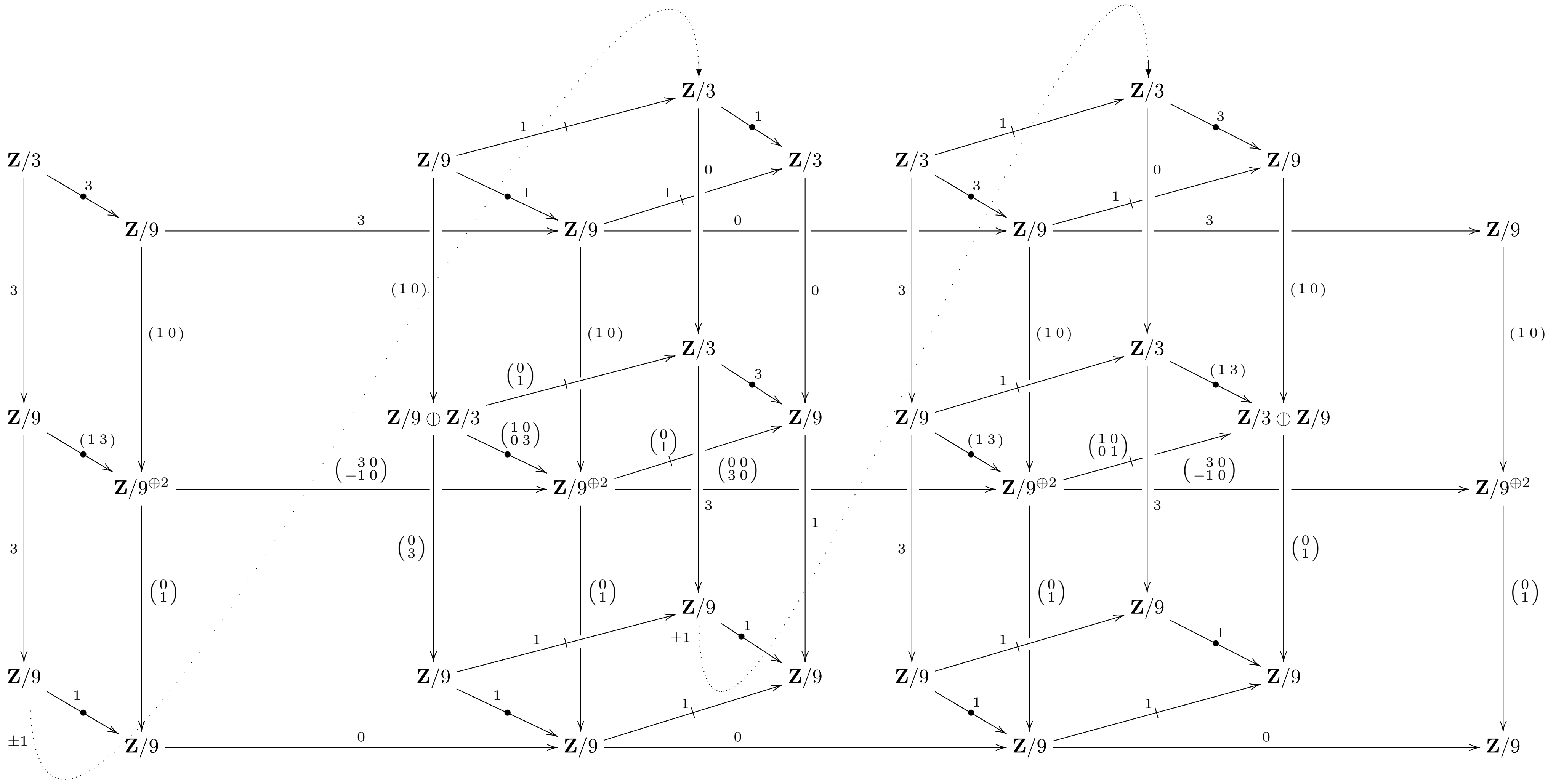
(2) Zur Berechnung der lang exakten $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,-)$-Sequenz ist auf diese injektive Hufeisenauflösung der Funktor ${}_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,-)$ anzuwenden. Das Resultat wollen wir sogleich isomorph ersetzen.
Für einen Faktor $a \in \mathbf{Z}$ haben wir folgendes kommutative Viereck.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{9x} \mathbf{Z}/81) \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "a"'] & {}_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/81) \arrow[d, "{}_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,a)"] \\
\mathbf{Z}/9 \arrow[r, "\sim"'] & {}_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9, \mathbf{Z}/81) \\
x \arrow[r, mapsto] & (\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{9x} \mathbf{Z}/81)
\end{tikzcd}$$

Denn ein Repräsentant x im linken oberen Eck wird auf beiden Wegen auf $(\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{9ax} \mathbf{Z}/81)$ im rechten unteren Eck abgebildet.
Folglich können wir bis auf Isomorphie den Funktor ${}_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,-)$ dadurch auf die gefundene injektive Hufeisenauflösung anwenden, indem wir jedes Objekt $\mathbf{Z}/81$ ersetzen durch $\mathbf{Z}/9$ und dabei die Repräsentanten der Morphismen beibehalten. Sodann können wir die Repräsentanten noch modulo 9 reduzieren. Wir erhalten folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "3"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}/9^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/9 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nun haben wir an den Positionen 0, 1 und 2 die Homologie zu nehmen und die induzieren Morphismen einzutragen. Wir brauchen also die Spalten an den Positionen 0, 1, 2, 3.
Es ist H^0 isomorph zu Z^0.
Sodann müssen Kandidaten für die Konnektoren (gepunktet eingetragen) so gefunden werden, daß eine lang exakte Sequenz entsteht.



Als Kandidaten für die Konnektoren können an beiden Stellen 1 oder -1 genommen werden, beide machen die Sequenz an der betreffenden Stelle exakt.

Wir haben die lang exakte $\mathrm{Ext}^*_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,-)$-Sequenz im gefragten Bereich bis auf Isomorphie bestimmt wie in folgendem kommutativen Diagramm dargestellt.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^0_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^0_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9{,}3)"'] & \mathbf{Z}/3 \arrow[d, "3"] \\
\mathrm{Ext}^0_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/27) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^0_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9{,}1)"'] & \mathbf{Z}/9 \arrow[d, "3"] \\
\mathrm{Ext}^0_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/9) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9 \arrow[d, "\pm 1"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9{,}3)"'] & \mathbf{Z}/3 \arrow[d, "0"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/27) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9{,}1)"'] & \mathbf{Z}/3 \arrow[d, "3"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/9) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{Z}/9 \arrow[d, "\pm 1"] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9{,}3)"'] & \mathbf{Z}/3 \arrow[d, "0"] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/27) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9{,}1)"'] & \mathbf{Z}/3 \arrow[d, "3"] \\
\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}/81}(\mathbf{Z}/9,\mathbf{Z}/9) \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{Z}/9
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 81

(1) Anwendung von ${}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16,-)$ auf die in Aufgabe 74.(1) gefundene injektive Auflösung des Morphismus $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ in $\mathbf{Z}/64$-mod gibt nach isomorpher Ersetzung folgenden Morphismus von Komplexen.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "4"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \underbrace{\mathbf{Z}/16}_{\text{Pos. } 0} \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] & \mathbf{Z}/16 \arrow[r, "8"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Beachte hierzu, daß $\mathbf{Z}/16 \xrightarrow{\sim} {}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/16,\mathbf{Z}/64)$, $z \longmapsto (1 \longmapsto 4z)$.

Darauf ist nun H^2 anzuwenden. Bis auf Isomorphie erhalten wir auf Z^2 und $\tilde{\mathrm{Z}}^2$ folgendes.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Z}/4 \arrow[dd, "4"'] \arrow[dr, "4"] & & \mathbf{Z}/16 \arrow[dd, "2"] & \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[rr, "0"] \arrow[dd, "4"'] & & \mathbf{Z}/16 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "4"] \arrow[dd, "2"'] & & \mathbf{Z}/16 \arrow[dd, "4"] \\
 & \mathbf{Z}/8 \arrow[dr, "2"] & & \mathbf{Z}/8 & \\
\mathbf{Z}/16 \arrow[rr, "8"] & & \mathbf{Z}/16 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "8"] & & \mathbf{Z}/16
\end{tikzcd}
$$

Bis auf Isomorphie ergibt sich also auf H^2 folgendes.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "4"'] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "0"'] & \mathbf{Z}/16 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/8
\end{tikzcd}
$$

Also ist

$$\left(\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/8) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8,1)} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/8, \mathbf{Z}/4)\right) \;\simeq\; (\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/4)\,.$$

(2) Da projektive Auflösungen in $\mathbf{Z}/64$-mod auch projektive Auflösungen in $\mathbf{Z}/64$-Mod sind, können wir stattdessen das Bild von $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ unter $\mathrm{L}_3 F$ berechnen, wobei

$$F \;:=\; (\mathbf{Z}/8 \underset{\mathbf{Z}/64}{\otimes} -)|_{\mathbf{Z}/64\text{-mod}} \;:\; \mathbf{Z}/64\text{-mod} \;\longrightarrow\; \mathbf{Z}\text{-Mod}$$

Anwenden von F auf die in Aufgabe 74.(1) gefundene injektive Auflösung des Morphismus $\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8$ in $\mathbf{Z}/64$-mod gibt nach isomorpher Ersetzung folgenden Morphismus von Komplexen.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r] \arrow[d, "4"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "0"] & \underbrace{\mathbf{Z}/8}_{\text{Pos. } 0} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Beachte hierzu, daß $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/8 \underset{\mathbf{Z}/64}{\otimes} \mathbf{Z}/64 = F(\mathbf{Z}/64)$, $z \longmapsto z \otimes 1$. Für $w \in \mathbf{Z}$ kommutiert damit

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathbf{Z}/8 \underset{\mathbf{Z}/64}{\otimes} \mathbf{Z}/64 \arrow[r, "\mathbf{Z}/8 \otimes w"] & \mathbf{Z}/8 \underset{\mathbf{Z}/64}{\otimes} \mathbf{Z}/64\,.
\end{tikzcd}
$$

Auf jenen Morphismus von Komplexen ist nun H_3 anzuwenden. Bis auf Isomorphie erhalten wir auf Z_3 und $\tilde{\mathrm{Z}}_3$ folgendes.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Z}/4 \arrow[dr, "2"] \arrow[dd, "4"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[dd, "2"] & \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[rr, "0"] \arrow[dd, "4"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "4"] \arrow[dd, "2"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[dd, "4"] \\
 & \mathbf{Z}/8 \arrow[dr, "1"] & & \mathbf{Z}/8 & \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[rr, "0"] & & \mathbf{Z}/8 \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, "0"] & & \mathbf{Z}/8
\end{tikzcd}$$

Bis auf Isomorphie ergibt sich also auf H_3 folgendes.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/4 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "4"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[d, "2"] \\
\mathbf{Z}/8 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/8 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}/8
\end{tikzcd}$$

Im Ergebnis ist also

$$\Big(\operatorname{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/4) \xrightarrow{\operatorname{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8,4)} \operatorname{Tor}_3^{\mathbf{Z}/64}(\mathbf{Z}/8,\mathbf{Z}/8)\Big) \simeq (\mathbf{Z}/4 \xrightarrow{4} \mathbf{Z}/8)\,.$$

(3) *Vorbemerkung.* Sei S ein Ring. Seien $e,\ f \in S$ mit $e^2 = e$ und $f^2 = f$. Dann sind

$$\begin{array}{rcccl}
eS & \underset{S}{\otimes} & Sf & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & eSf \\
es & \otimes & tf & \longmapsto & estf \\
esf & \otimes & f & \longleftarrow\!\shortmid & esf
\end{array}$$

sich beidseitig invertierende Morphismen in $\mathbf{Z}$-Mod. Ende der *Vorbemerkung.*

Schreibe $e_1 := \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2 := \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_3 := \left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$. Schreibe $e_{1,2} := \left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$. Beachte, daß $e_1 e_{1,2} = e_2$ und $e_{1,2} e_2 = e_1$.

Wir haben kurz exakte Sequenzen $e_2R \xrightarrow{e_{1,2}(-)} e_1R \xrightarrow{p} X$ und $Re_1 \xrightarrow{(-)e_{1,2}} Re_2 \xrightarrow{q} Y$.

Aus dem kommutativen Diagramm mit rechtsexakten Spalten

$$\begin{tikzcd}
e_2R \underset{R}{\otimes} Re_1 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(-)e_{1,2}"] \arrow[d, "e_{1,2}(-)\otimes\mathrm{id}"'] & e_2R \underset{R}{\otimes} Re_2 \arrow[d, "e_{1,2}(-)\otimes\mathrm{id}"] \\
e_1R \underset{R}{\otimes} Re_1 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(-)e_{1,2}"] \arrow[d, "p\otimes\mathrm{id}"'] & e_1R \underset{R}{\otimes} Re_2 \arrow[d, "p\otimes\mathrm{id}"] \\
X \underset{R}{\otimes} Re_1 \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(-)e_{1,2}"] & X \underset{R}{\otimes} Re_2
\end{tikzcd}$$

wird durch isomorphe Ersetzung gemäß Vorbemerkung das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
e_2Re_1 \arrow[r, "(-)e_{1,2}"] \arrow[d, "e_{1,2}(-)"'] & e_2Re_2 \arrow[d, "e_{1,2}(-)"] \\
e_1Re_1 \arrow[r, "(-)e_{1,2}"] \arrow[d] & e_1Re_2 \arrow[d] \\
X \underset{R}{\otimes} Re_1 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (-)e_{1,2}"] & X \underset{R}{\otimes} Re_2
\end{tikzcd}$$

mit rechtsexakten Spalten. Da $e_iRe_j \simeq \mathbf{Q}$ für $i \leqslant j$ und $e_iRe_j \simeq 0$ für $i > j$, läßt sich dieses wiederum isomorph ersetzen durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Q} \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{Q} \arrow[r, "1"] \arrow[d] & \mathbf{Q} \arrow[d] \\
X \underset{R}{\otimes} Re_1 \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (-)e_{1,2}"] & X \underset{R}{\otimes} Re_2 \ ,
\end{tikzcd}$$

wiederum mit rechtsexakten Spalten. Es folgt

$$X \underset{R}{\otimes} (Re_1 \xrightarrow{(-)e_{1,2}} Re_2\,) \;\simeq\; (\mathbf{Q} \longrightarrow 0)\ .$$

Da nun

$$\cdots 0 \longrightarrow Re_1 \xrightarrow{(-)e_{1,2}} Re_2$$

eine projektive Auflösung von Y ist, folgt

$$\mathrm{Tor}_k^R(X,Y) \simeq \begin{cases} \mathbf{Q} & \text{if } k = 1 \\ 0 & \text{if } k \neq 1 \end{cases}$$

für $k \geqslant 0$.

(4) Anwendung von ${}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4, -)$ auf die in Aufgabe 74.(1) berechnete Hufeisenauflösung gibt nach isomorpher Ersetzung folgende punktweise split kurz exakte Sequenz von Komplexen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & \mathbf{Z}/4 \oplus \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Gemäß Lösung zu Aufgabe 76 können wir die Verbindungsmorphismen berechnen als von der Homologie auf folgendem Komplexmorphismus induziert.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "-2"'] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "-2"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "0"] & \mathbf{Z}/4 \arrow[r, "2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Durch Anwenden von Homologiefunktoren berechnen wir die lang exakte $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,-)$-Sequenz auf $\mathbf{Z}/2 \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/2$, i.e. die Sequenz

$$\begin{array}{llllllll}
0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,2)} & \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/4) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,1)} & \mathrm{Ext}^0_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\delta^0_{(2,1);\,\mathcal{A}(\mathbf{Z}/4,-)}} & \\
& \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,2)} & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/4) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,1)} & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\delta^1_{(2,1);\,\mathcal{A}(\mathbf{Z}/4,-)}} & \\
& \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,2)} & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/4) & \xrightarrow{\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,1)} & \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z}/4,\mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{\delta^2_{(2,1);\,\mathcal{A}(\mathbf{Z}/4,-)}} & \\
& & & & & & & \cdots\,,
\end{array}$$

bis auf Isomorphie zu

$$\begin{array}{llllllll}
0 \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{2} & \mathbf{Z}/4 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \\
& \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \\
& \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \\
& \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbf{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \cdots\,,
\end{array}$$

periodisch fortgesetzt.

Aufgabe 82

(1) Wir schreiben $F := {}_{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9,-) : \mathbf{Z}/27\text{-Mod} \to \mathbf{Z}/9\text{-Mod}$.

Zur Berechnung des Bildes von $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ in $\mathbf{Z}/27$-Mod unter $\mathrm{R}^2 F$ lösen wir $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ in $\mathbf{Z}/27$-Mod injektiv auf und erhalten einen Komplexmorphismus $I \xrightarrow{g} J$, wie in Hausaufgabe 42.(1) geschehen.

Sodann wenden wir F punktweise an, um $F(I \xrightarrow{g} J)$ zu bilden, wie in Hausaufgabe 42.(2) geschehen.

Dann wenden wir den Homologiefunktor H^2 an und erhalten

$$(\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J) \;\simeq\; \big((\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/9) \xrightarrow{{}_{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9,1)} (\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/3)\big)\,,$$

also eine Isomorphie von Diagrammen auf $\{0,1\}^{\mathrm{k}}$.

Dies wurde in Aufgabe 73.(3) durchgeführt. Wir haben dort

$$\big((\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/9) \xrightarrow{{}_{\mathbf{Z}/27}(\mathbf{Z}/9,1)} (\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/3)\big) \;\simeq\; (\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J) \;\simeq\; (\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3)$$

berechnet, wobei der Morphismus $\mathbf{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ angesprochen wird.

Insbesondere ist $(\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/9) \xrightarrow{(\mathrm{R}^2 F)(1)} (\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/3)$ ein Isomorphismus.

(2, 3) Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $\mathbf{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbf{Z}/3$ in $\mathbf{Z}/27$-Mod.
Wir haben aus der zugehörigen lang exakten $\mathrm{R}^* F$-Sequenz den Ausschnitt

$$\cdots \to (\mathrm{R}^1 F)(\mathbf{Z}/3) \xrightarrow{\partial_1} (\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/3) \xrightarrow{(\mathrm{R}^2 F)(3)} (\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/9) \xrightarrow[\sim]{(\mathrm{R}^2 F)(1)} (\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/3) \xrightarrow{\partial_2} (\mathrm{R}^3 F)(\mathbf{Z}/3) \xrightarrow{(\mathrm{R}^3 F)(3)} (\mathrm{R}^3 F)(\mathbf{Z}/9) \to \ldots,$$

wobei der eingetragene Isomorphismus aus (1) resultiert und wobei die auftretenden Konnektoren mit ∂_1 und ∂_2 bezeichnet seien.

Da der Kern von $(\mathrm{R}^2 F)(1)$ verschwindet, ist $(\mathrm{R}^2 F)(3) = 0$ und also $(\mathrm{R}^1 F)(\mathbf{Z}/3) \xrightarrow{\partial_1} (\mathrm{R}^2 F)(\mathbf{Z}/3)$ ein Epimorphismus.

Da der Cokern von $(\mathrm{R}^2 F)(1)$ verschwindet, ist $\partial_2 = 0$ und also $(\mathrm{R}^3 F)(\mathbf{Z}/3) \xrightarrow{(\mathrm{R}^3 F)(3)} (\mathrm{R}^3 F)(\mathbf{Z}/9)$ ein Monomorphismus.

Aufgabe 83

Bemerkung 124.(2), angewandt auf das Viereck $f^{k+1}f^0 = f^1 f^k$ für $k \geqslant 0$, gibt die Kette

$$X \;=\; \mathrm{I}_{f^0} \leftarrowtail \mathrm{I}_{f^1} \leftarrowtail \mathrm{I}_{f^2} \leftarrowtail \cdots .$$

Es folgt, daß es ein $n' \geqslant 0$ gibt mit $\mathrm{I}_{f^{n'}} \xleftarrow{\sim} \mathrm{I}_{f^{n'+m}}$ für alle $m \geqslant 0$. Daraus wiederum folgt, daß $\mathrm{C}_{f^{n'}} \xleftarrow{\sim} \mathrm{C}_{f^{n'+m}}$ für alle $m \geqslant 0$.

Bemerkung 124.(2), angewandt auf das Viereck $f^k f^1 = f^0 f^{k+1}$ für $k \geqslant 0$, gibt die Kette

$$X \;=\; \mathrm{I}_{f^0} \twoheadrightarrow \mathrm{I}_{f^1} \twoheadrightarrow \mathrm{I}_{f^2} \twoheadrightarrow \cdots .$$

Es folgt, daß es ein $n'' \geqslant 0$ gibt mit $\mathrm{I}_{f^{n''}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}_{f^{n''+m}}$ für alle $m \geqslant 0$. Daraus wiederum folgt, daß $\mathrm{K}_{f^{n''}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_{f^{n''+m}}$ für alle $m \geqslant 0$.

Sei $n := \max\{n', n'', 1\}$.

Es gibt $\mathrm{C}_{f^n} \underset{\sim}{\xrightarrow{\varphi}} \mathrm{C}_{f^{2n}}$ mit $\rho\varphi = \rho$. Es gibt $\mathrm{K}_{f^n} \underset{\sim}{\xrightarrow{\psi}} \mathrm{K}_{f^{2n}}$ mit $\psi\iota = \iota$.

Wenden wir nun das Umfangssequenzlemma, Lemma 132, auf das kommutative Dreieck $f^n f^n = f^{2n}$ an, so erhalten wir folgendes.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{K}_{f^n} \arrow[rr] \arrow[dr, tail, "\iota"] & & \mathrm{C}_{f^n} \arrow[ddrr] & & \\
 & & & X \arrow[ur, two heads, "\rho"] \arrow[dr, "f^n"] & & & \\
\mathrm{K}_{f^{2n}} \arrow[uurr] \arrow[rr, tail, "\iota"] & & X \arrow[ur, "f^n"] \arrow[rr, "f^{2n}"] & & X \arrow[rr, two heads, "\rho"] \arrow[dr, two heads, "\rho"] & & \mathrm{C}_{f^{2n}} \arrow[dl, "\varphi", "\sim"'] \\
 & \mathrm{K}_{f^n} \arrow[ul, "\psi", "\sim"'] \arrow[ur, tail, "\iota"] & & & & \mathrm{C}_{f^n} &
\end{tikzcd}$$

Folglich ist $\mathrm{K}_{f^n} \underset{\sim}{\xrightarrow{\iota\rho}} \mathrm{C}_{f^n}$. Sei $f^n = (f^n)^{-}(f^n)^{\cdot}$ die gewählte Faktorisierung in einen Epi- und einen Monomorphismus; cf. Bemerkung 124.(1). Wir erhalten folgenden Morphismus kurz exakter Sequenzen.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_{f^n} \arrow[r, tail, "(1\;0)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{K}_{f^n} \oplus \mathrm{I}_{f^n} \arrow[r, two heads, "\binom{0}{1}"] & \mathrm{I}_{f^n} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{K}_{f^n} \arrow[r, tail, "\iota"] & X \arrow[u, "\wr"', "(\rho(\iota\rho)^{-1} \;\; (f^n)^{-})"] \arrow[r, two heads, "(f^n)^{-}"] & \mathrm{I}_{f^n} .
\end{tikzcd}$$

Ferner ist $\begin{pmatrix}\iota \\ (f^n)^{\cdot}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho(\iota\rho)^{-1} & (f^n)^{-}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & (f^n)^{\cdot}(f^n)^{-}\end{pmatrix}$. Um zu zeigen, daß $\begin{pmatrix}\iota \\ (f^n)^{\cdot}\end{pmatrix}$ ein Isomorphismus ist, genügt es also zu zeigen, daß $(f^n)^{\cdot}(f^n)^{-}$ ein Automorphismus von I_{f^n} ist. Mit Lemma 122 und der dazu dualen Aussage, angewandt auf das Diagramm aus den kurz exakten Sequenzen $(\iota, (f^n)^{-})$ und $((f^n)^{\cdot}, \rho)$, folgt dies.

Aufgabe 84

(1) Wir wollen eine Transformation $a^k : G \circ \mathrm{H}^k \longrightarrow \mathrm{H}^k \circ \mathrm{C}(G)$ bestimmen.

Sei $U \in \operatorname{Ob}\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Konstruieren wir $a^k U$. Da G rechtsexakt ist, sind $G\rho_{d_U^{k-1}}$ und $\rho_{Gd_U^{k-1}}$ beides Cokerne von Gd_U^{k-1}. Also gibt es einen Isomorphismus $c^k U \;:\; G\tilde{\mathrm{Z}}^k U \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathrm{Z}}^k \mathrm{C}(G) U$ mit

$(G\rho_{d_U^{k-1}})(c^kU) = \rho_{Gd_U^{k-1}}$. Aus

$$\begin{aligned}(G\rho_{d_U^{k-1}})(c^kU)(\hat{d}^k_{\mathrm{C}(G)U})(\iota_{Gd_U^{k+1}}) &= (\rho_{Gd_U^{k-1}})(\hat{d}^k_{\mathrm{C}(G)U})(\iota_{Gd_U^{k+1}}) \\ &= Gd_U^k \\ &= (G\rho_{d_U^{k-1}})(G\hat{d}^k_U)(G\iota_{d_U^{k+1}})\end{aligned}$$

und $G\rho_{d_U^{k-1}}$ epimorph entnehmen wir, daß $(c^kU)(\hat{d}^k_{\mathrm{C}(G)U})(\iota_{Gd_U^{k+1}}) = (G\hat{d}^k_U)(G\iota_{d_U^{k+1}})$. Da

$$(G\dot{h}^k_U)(c^k_U)\big((\hat{d}^k_{\mathrm{C}(G)U})(\iota_{Gd_U^{k+1}})\big) \;=\; (G\dot{h}^k_U)(G\hat{d}^k_U)(G\iota_{d_U^{k+1}}) \;=\; 0$$

und da $\big(\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)U}\,,\,(\hat{d}^k_{\mathrm{C}(G)U})(\iota_{Gd_U^{k+1}})\big)$ linksexakt ist, gibt es ein $a^kU \,:\, G\mathrm{H}^kU \longrightarrow \mathrm{H}^k\mathrm{C}(G)U$ mit $(a^kU)(\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)U}) = (G\dot{h}^k_U)(c^kU)$.

$$\begin{tikzcd}
 & G\mathrm{H}^kU \arrow[dr, "G\dot{h}^k_U"] \arrow[dddd, dotted, "a^kU"'] & & \\
 & & G\tilde{\mathrm{Z}}^kU \arrow[dd, "c^kU", "\wr"'] \arrow[dr, "(G\hat{d}^k_U)(G\iota_{d_U^{k+1}})"] & \\
GU^{k-1} \arrow[r, "Gd_U^{k-1}"] & GU^k \arrow[ur, "G\rho_{d_U^{k-1}}"] \arrow[rr, "Gd^k_U"] \arrow[dr, "\rho_{Gd_U^{k-1}}"'] & & GU^{k+1} \\
 & & \tilde{\mathrm{Z}}^k\mathrm{C}(G)U \arrow[ur, "(\hat{d}^k_{\mathrm{C}(G)U})(\iota_{Gd_U^{k+1}})"'] & \\
 & \mathrm{H}^k\mathrm{C}(G)U \arrow[ur, "\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)U}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sei nun $U \xrightarrow{s} V$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben.
Aus

$$\begin{aligned}(G\rho_{d_U^{k-1}})(c^kU)(\tilde{\mathrm{Z}}^k\mathrm{C}(G)s) &= (\rho_{Gd_U^{k-1}})(\tilde{\mathrm{Z}}^k\mathrm{C}(G)s) \\ &= (Gs^k)(\rho_{Gd_V^{k-1}}) \\ &= (Gs^k)(G\rho_{d_V^{k-1}})(c^kV) \\ &= G(s^k\rho_{d_V^{k-1}})(c^kV) \\ &= G\big(\rho_{d_U^{k-1}}(\tilde{\mathrm{Z}}^ks)\big)(c^kV) \\ &= (G\rho_{d_U^{k-1}})(G\tilde{\mathrm{Z}}^ks)(c^kV)\end{aligned}$$

und aus $G\rho_{d_U^{k-1}}$ epimorph entnehmen wir, daß $(c^kU)(\tilde{\mathrm{Z}}^k\mathrm{C}(G)s) = (G\tilde{\mathrm{Z}}^ks)(c^kV)$. Somit ist c^k eine Transformation von $G \circ \tilde{\mathrm{Z}}^k$ nach $\tilde{\mathrm{Z}}^k \circ \mathrm{C}(G)$.
Aus

$$\begin{aligned}(a^kU)(\mathrm{H}^k\mathrm{C}(G)s)(\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)V}) &= (a^kU)(\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)U})(\tilde{\mathrm{Z}}^k\mathrm{C}(G)s) \\ &= (G\dot{h}^k_U)(c^kU)(\tilde{\mathrm{Z}}^k\mathrm{C}(G)s) \\ &= (G\dot{h}^k_U)(G\tilde{\mathrm{Z}}^ks)(c^kV) \\ &= (G\mathrm{H}^ks)(G\dot{h}^k_V)(c^kV) \\ &= (G\mathrm{H}^ks)(a^kV)(\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)V})\end{aligned}$$

und aus $\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)V}$ monomorph entnehmen wir, daß $(a^kU)(\mathrm{H}^k\mathrm{C}(G)s) = (G\mathrm{H}^ks)(a^kV)$. Somit ist a^k eine Transformation von $G \circ \mathrm{H}^k$ nach $\mathrm{H}^k \circ \mathrm{C}(G)$.

(2) Sei nun G exakt. Sei $k \in \mathbf{Z}$. Dann ist $G\dot{h}_U^k$ ein Kern von $(G\hat{d}_U^k)(G\iota_{d_U^{k+1}})$. E.g. mit dem Schlangenlemma, Lemma 136, angewandt auf den Morphismus von kurz exakten Sequenzen von $(G\dot{h}_U^k\,,\,\overline{G\hat{d}_U^k})$ nach $(\dot{h}^k_{\mathrm{C}(G)U}\,,\,\overline{\hat{d}^k_{\mathrm{C}(G)U}})$, erkennen wir, daß Kern und Cokern von $a^k U$ beide isomorph zu 0 sind. Folglich ist a^k eine Isotransformation von $G \circ \tilde{\mathrm{Z}}^k$ nach $\tilde{\mathrm{Z}}^k \circ \mathrm{C}(G)$.

Es ist uns ein Quasiisomorphismus $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ gegeben. Wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{H}^k\mathrm{C}(G)f$ ein Isomorphismus ist für $k \in \mathbf{Z}$. Aber mit $\mathrm{H}^k f$ ist auch $(G\mathrm{H}^k f)$ ein Isomorphismus, so daß aus $(G\mathrm{H}^k f)(a^k Y) = (a^k X)(\mathrm{H}^k\mathrm{C}(G)f)$ in der Tat folgt, daß $\mathrm{H}^k\mathrm{C}(G)f$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 85

Wähle $\mathrm{id}_{\tilde{\mathcal{A}}} \xrightarrow[\sim]{\tilde{\alpha}} \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{IRes}$; cf. §6.1.2.

Wähle $X \xrightarrow[\sim]{a} \mathrm{H}^0 I$. Sei $\mathrm{Konz}\, X \xrightarrow{e} I$ der durch

$$(X \xrightarrow{e^0} I^0) \;:=\; (X \xrightarrow[\sim]{a} \mathrm{H}^0 I \xrightarrow{\dot{h}_I^0} I^0)$$

definierte Morphismus von Komplexen. Es ist e ein Quasiisomorphismus; cf. Bemerkung 161.

Sei $\tilde{I}' \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{I} \xrightarrow{\tilde{r}} \tilde{I}''$ eine Hufeisenauflösung in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ der kurz exakten Sequenz $Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} Y''$ aus $\mathcal{A}$ mit $\tilde{I}' = \mathrm{IRes}\, Y'$ und $\tilde{I}'' = \mathrm{IRes}\, Y''$, bezüglich $\tilde{\alpha}Y'$ und $\tilde{\alpha}Y''$.

Wähle $(Y', Y, Y'') \xrightarrow[\sim]{(b', b, b'')} \mathrm{H}^0(\tilde{I}', \tilde{I}, \tilde{I}'')$ mit $b' = \tilde{\alpha}Y'$ und $b'' = \tilde{\alpha}Y''$.

Sei $\mathrm{Konz}(Y', Y, Y'') \xrightarrow{(f', f, f'')} (\tilde{I}', \tilde{I}, \tilde{I}'')$ der durch

$$\begin{array}{rl} & \big((Y', Y, Y'') \xrightarrow{(f'^0, f^0, f''^0)} (\tilde{I}'^0, \tilde{I}^0, \tilde{I}''^0)\big) \\ := & \big((Y', Y, Y'') \xrightarrow{(b', b, b'')} (\mathrm{H}^0\tilde{I}', \mathrm{H}^0\tilde{I}, \mathrm{H}^0\tilde{I}'') \xrightarrow{(\dot{h}^0_{\tilde{I}'}\,,\,\dot{h}^0_{\tilde{I}}\,,\,\dot{h}^0_{\tilde{I}''})} (\tilde{I}'^0, \tilde{I}^0, \tilde{I}''^0)\big) \end{array}$$

definierte Morphismus kurz exakter Sequenzen von Komplexen. Es sind f', f und f'' Quasiisomorphismen; cf. Bemerkung 161.

Wir haben folgende vertikal eingetragene Morphismen kurz exakter Sequenzen von Komplexen; cf. §6.2.3, §6.2.2.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\, X, \tilde{I}') \arrow[r, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\, X, \tilde{i})"] \arrow[d, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(e, \tilde{I}')"'] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\, X, \tilde{I}) \arrow[r, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\, X, \tilde{r})"] \arrow[d, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(e, \tilde{I})"'] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(\mathrm{Konz}\, X, \tilde{I}'') \arrow[d, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(e, \tilde{I}'')"'] \\
\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \tilde{I}') \arrow[r, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \tilde{i})"] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \tilde{I}) \arrow[r, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(J, \tilde{r})"] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \tilde{I}'') \\
\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \mathrm{Konz}\, Y') \arrow[r, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \mathrm{Konz}\, i)"] \arrow[u, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, f')"] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \mathrm{Konz}\, Y) \arrow[r, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \mathrm{Konz}\, i)"] \arrow[u, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, f)"] & \mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, \mathrm{Konz}\, Y'') \arrow[u, "\mathrm{t}F^{\mathrm{CC}}(I, f'')"]
\end{tikzcd}$$

Nach Bemerkung 178 sind alle vertikalen Morphismen Quasiisomorphismen; cf. auch Argument für Behauptung in Beweis zu Satz 180.

Nach Bemerkung 146 ist die lang exakte Homologiesequenz zur unteren Zeile isomorph zur lang exakten Homologiesequenz zur oberen Zeile.

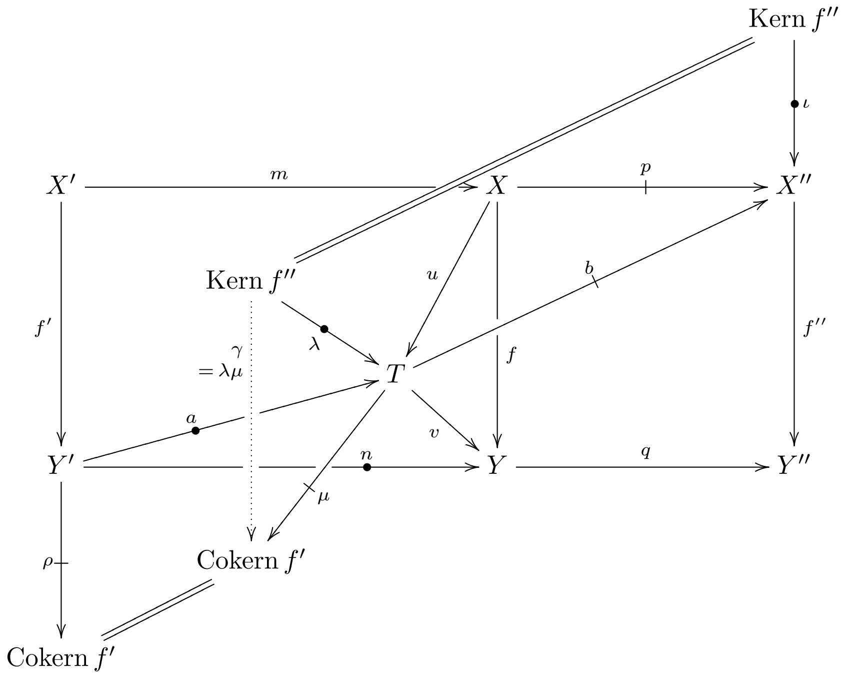
Die untere Zeile ist isomorph zur kurz exakten Sequenz $F(I, Y') \xrightarrow{F(I,i)} F(I, Y) \xrightarrow{F(I,r)} F(I, Y'')$; cf. Bemerkung 177. Die obere Zeile ist isomorph zur kurz exakten Sequenz $F(X, \tilde{I}') \xrightarrow{F(X,\tilde{i})} F(X, \tilde{I}) \xrightarrow{F(X,\tilde{r})} F(X, \tilde{I}'')$.

Erneut mit Bemerkung 146 können wir also festhalten, daß die zu $F(I,Y') \xrightarrow{F(I,i)} F(I,Y) \xrightarrow{F(I,r)} F(I,Y'')$ gehörige lang exakte Homologiesequenz isomorph ist zur zu $F(X,\tilde{I}') \xrightarrow{F(X,\tilde{i})} F(X,\tilde{I}) \xrightarrow{F(X,\tilde{r})} F(X,\tilde{I}'')$ gehörigen.

Im Beweis zu Lemma 165 haben wir schließlich gezeigt, daß letztere isomorph ist zur lang exakten $\mathrm{R}^*F(X,-)$-Sequenz auf $Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} Y''$.

Aufgabe 86

Betrachte folgende Konstruktion des Konnektors γ aus dem Beweis zum Schlangenlemma, Lemma 136.



Gemäß Aufgabe 70 können wir die Vervollständigung zum Pushout (X', X, Y', T) und alle weiteren Morphismen frei wählen, solange nur ein kommutatives Diagramm entsteht und (a,b) kurz exakt, (λ, v) linksexakt und (u,μ) rechtsexakt ist. Dies wollen wir nun schrittweise tun.

Da (X', X, Y', T) ein Pushout ist, ist b durch die Bedingungen $ab = 0$ und $ub = p$ von a, u und p bereits eindeutig festgelegt wird; cf. Lemma 134.(2°). Ferner ist μ durch die Bedingungen $a\mu = \rho$ und $u\mu = 0$ festgelegt.

Da (T, X'', Y, Y'') gemäß Beweis zu Lemma 136 ein Pullback ist, ist λ durch die Bedingungen $\lambda b = \iota$ und $\lambda v = 0$ festgelegt.

Schreibe $I := \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} m & f' \end{smallmatrix}\right)$. Schreibe $T := (X \oplus Y')/I$. Sei $u : X \longrightarrow T$, $x \longmapsto (x,0) + I$. Sei $a : Y' \longrightarrow T$, $y' \longmapsto (0,-y') + I$. Es sind u und a beide R-linear. Es ist (X', X, Y', T) ein Pushout, da die Diagonalsequenz

$$X' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} m & f' \end{smallmatrix}\right)} X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} u \\ -a \end{smallmatrix}\right)} T$$

nach Konstruktion rechtsexakt ist; beachte $(x,y')\left(\begin{smallmatrix} u \\ -a \end{smallmatrix}\right) = xu - y'a = (x,0) - (0,-y') + I = (x,y') + I$.

Sei $v : T \longrightarrow Y$, $(x,y') + I \longmapsto xf - y'n$. Dies ist eine wohldefinierte R-lineare Abbildung, da für $x' \in X'$ für das Element $x'\left(\begin{smallmatrix} m & f' \end{smallmatrix}\right) = (x'm, x'f')$ in der Tat $x'mf - x'f'n = 0$ gilt. Es ist $av = n$, da $y'av = ((0,-y') + I)v = y'n$ für $y' \in Y'$. Es ist $uv = f$, da $xuv = ((x,0) + I)v = xf$ für $x \in X$.

Sei $b : T \longrightarrow X''$, $(x,y') + I \longmapsto xp$. Dies ist eine wohldefinierte R-lineare Abbildung, da für $x' \in X'$ für das Element $x'\left(\begin{smallmatrix} m & f' \end{smallmatrix}\right) = (x'm, x'f')$ in der Tat $x'mp = 0$ gilt. Es ist $ub = p$, da $xub = ((x,0)+I)b = xp$ für $x \in X$. Es ist $ab = 0$, da $y'ab = ((0,-y')+I)b = 0$ für $y' \in Y'$.

Sei $\mu : T \longrightarrow \operatorname{Cokern} f'$, $(x,y') \longmapsto -y' + \operatorname{Im} f'$. Dies ist eine wohldefinierte R-lineare Abbildung, da für $x' \in X'$ für das Element $x'\left(\begin{smallmatrix} m & f' \end{smallmatrix}\right) = (x'm, x'f')$ in der Tat $-x'f' + \operatorname{Im} f' = 0$ gilt. Es ist $a\mu = \rho$, da $y'a\mu = ((0,-y')+I)\mu = y' + \operatorname{Im} f' = y'\rho$ ist für $y' \in Y'$. Es ist $u\mu = 0$, da $xu\mu = ((x,0)+I)\mu = 0 + \operatorname{Im} f' = 0$ ist.

Zur Definition von λ. Sei $x'' \in \operatorname{Kern} f''$. Sei $x \in X$ mit $xp = x''$. Es ist $xfq = xpf'' = x''f'' = 0$, weswegen es genau ein $y' \in Y'$ mit $y'n = xf$ gibt. Setze $x''\lambda = (x,y') + I$. Sind $x, \tilde{x} \in X$ mit $xp = \tilde{x}p = x''$, dann ist $x - \tilde{x} = x'm$ für ein $x' \in X'$. Seien $y', \tilde{y}' \in Y'$ mit $y'n = xf$, $\tilde{y}'n = \tilde{x}f$. Es wird $x'f'n = x'mf = xf - \tilde{x}f = (y' - y)n$, mithin $x'f' = y' - y$. Somit wird $(x,y') - (\tilde{x},\tilde{y}') = (x'm, x'f') \in I$. Also ist λ wohldefiniert.

Zur R-Linearität von λ. Seien $x'', \tilde{x}'' \in \operatorname{Kern} f''$. Seien $r, \tilde{r} \in R$. Seien $x, \tilde{x} \in X$ mit $xp = x''$ und $\tilde{x}p = \tilde{x}''$. Seien $y', \tilde{y}' \in Y'$ mit $y'n = xf$ und $\tilde{y}'n = \tilde{x}f$. Es ist $(rx + \tilde{r}\tilde{x})p = r(xp) + \tilde{r}(\tilde{x}p) = rx + \tilde{r}\tilde{x}$. Es ist $(ry' + \tilde{r}\tilde{y}')n = r(y'n) + \tilde{r}(\tilde{y}'n) = r(xf) + \tilde{r}(\tilde{x}f) = (rx + \tilde{r}\tilde{x})f$. Also ist $(rx + \tilde{r}\tilde{x})\lambda = (rx + \tilde{r}\tilde{x},\, ry' + \tilde{r}\tilde{y}') + I = r((x,y') + I) + \tilde{r}((\tilde{x},\tilde{y}') + I) = r(x\lambda) + \tilde{r}(\tilde{x}\lambda)$.

Es ist $\lambda v = 0$ und $\lambda b = \iota$. Denn ist $x'' \in \operatorname{Kern} f''$, ist $x \in X$ mit $xp = x''$, ist $y' \in Y'$ mit $y'n = xf$, so ist $x''\lambda v = ((x,y') + I)v = xf - y'n = 0$ und $x''\lambda b = ((x,y') + I)b = xp = x'' = x''\iota$.

Nun zur verlangten Beschreibung des Konnektors γ. Ist $x'' \in \operatorname{Kern} f''$, ist $x \in X$ mit $xp = x''$, ist $y' \in Y'$ mit $y'n = xf$, so wird

$$x''\gamma \;=\; x''\lambda\mu \;=\; ((x,y') + I)\mu \;=\; -y' + \operatorname{Im} f'\ .$$

Aufgabe 87

Es ist $0 \in \operatorname{Ob} \mathbf{Z}\text{-mod}$.

Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathbf{Z}$-Mod; cf. Beispiel 127.

Sind zum einen X' und X'' endlich erzeugt, so auch $\operatorname{Kern} r = \operatorname{Im} i \simeq X'$, und also auch X; cf. Aufgabe 15.(1).

Sei zum anderen X endlich erzeugt. Sei demgemäß $\mathbf{Z}^{\oplus m} \xrightarrow{f} X$ für ein $m \geqslant 0$ gegeben. Dann ist auch $\mathbf{Z}^{\oplus m} \xrightarrow{fr} X''$ epimorph, und also X'' endlich erzeugt. Bilde ferner folgenden Pullback; cf. Lemma 134, Korollar 135.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X' \arrow[d, "i"] \\
\mathbf{Z}^{\oplus m} \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Gemäß Aufgabe 15.(2) ist $Y \simeq \operatorname{Im} i' \subseteq \mathbf{Z}^{\oplus m}$ endlich erzeugt. Da f' epimorph ist, ist, wie eben gesehen, auch X' endlich erzeugt.

Somit ist $\mathbf{Z}$-mod eine dicke Teilkategorie von $\mathbf{Z}$-Mod.

Aufgabe 88

Wir erinnern an die Einheit $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ und die Coeinheit $F \circ G \xrightarrow{\eta} \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, sowie an $(F\varepsilon X)(\eta F X) = 1_{FX}$ für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ und $(\varepsilon G Y)(G\eta Y) = 1_{GY}$ für $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{B}$; cf. Aufgabe 66.(1.ii).

Wir erinnern daran, daß F und G additiv sind; cf. Aufgabe 66.(4). Ferner ist F rechtsexakt und G linksexakt; cf. Aufgabe 66.(5). Da G nach Voraussetzung Epimorphismen respektiert, ist G mithin exakt.

(1) Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{K}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{B}$ ist.

Da G additiv ist, ist $G0 \simeq 0$, i.e. $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Sei $X' \rightarrowtail X \twoheadrightarrow X''$ eine kurz exakte Sequenz mit $X',\, X'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$. Wir haben zu zeigen, daß $X \overset{!}{\in} \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Da G exakt ist, ist auch $GX' \rightarrowtail GX \twoheadrightarrow GX''$ eine kurz exakte Sequenz. Da $GX' \simeq 0$ und $GX'' \simeq 0$, folgt $GX \simeq 0$, i.e. $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Also ist $\mathcal{K}$ eine dicke Teilkategorie von $\mathcal{B}$. Wir verfügen somit über die abelsche Quotientenkategorie $\mathcal{B}/\!\!/\mathcal{K}$ und über den exakten Lokalisierungsfunktor $L : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/\!\!/\mathcal{K}$, $y \longmapsto 1\backslash y/1$; cf. Lemma 223, Bemerkung 224.

Nach Konstruktion ist $GY \simeq 0$ für alle $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Gemäß universeller Eigenschaft der Quotientenkategorie, Lemma 225.(1), gibt es genau einen exakten Funktor $\mathcal{B}/\!\!/\mathcal{K} \xrightarrow{\bar{\bar{G}}} \mathcal{A}$ mit $\bar{\bar{G}} \circ L = G$, wie verlangt.

(2) Vorab bemerken wir, daß $FGY \xrightarrow{\eta Y} Y$ ein $\mathcal{K}$-Quasiisomorphismus ist für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$. Denn $G\eta Y = (\varepsilon GY)^{-1}$ ist ein Isomorphismus; cf. Aufgabe 67.(2). Wegen G exakt folgt $G\mathrm{K}_{\eta Y} \simeq \mathrm{K}_{G\eta Y} \simeq 0$ und $G\mathrm{C}_{\eta Y} \simeq \mathrm{C}_{G\eta Y} \simeq 0$. Somit ist in der Tat $\mathrm{K}_{\eta Y} \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ und $\mathrm{C}_{\eta Y} \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$.

Wir wollen zeigen, daß $\bar{\bar{G}}$ dicht, voll und treu ist; cf. Lemma 96.(1).

Zur Dichtheit. Es ist G dicht, da $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \longrightarrow G \circ F$ eine Isotransformation ist; cf. Aufgabe 67.(2). Da L identisch auf den Objekten abbildet und da $\bar{\bar{G}} \circ L = G$ nach (1), ist auch $\bar{\bar{G}}$ dicht.

Zur Vollheit. Seien Y_1 , $Y_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ und $\bar{\bar{G}}Y_1 \xrightarrow{u} \bar{\bar{G}}Y_2$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Wir haben einen Morphismus in $\mathcal{B}/\!\!/\mathcal{K}$ zu finden, der unter $\bar{\bar{G}}$ auf u abgebildet wird.

Beachte zunächst, daß $(\bar{\bar{G}}Y_1 \xrightarrow{u} \bar{\bar{G}}Y_2) = (GY_1 \xrightarrow{u} GY_2)$. Es wird

$$\bar{\bar{G}}\big((\eta Y_1)^{-1}\backslash(Fu)(\eta Y_2)\big) \;=\; (G\eta Y_1)^{-1}(GFu)(G\eta Y_2) \;=\; (\varepsilon GY_1)(GFu)(\varepsilon GY_2)^{-1} \;=\; u$$

wegen der Natürlichkeit von ε ; cf. Lemma 225.(1).

$$\begin{tikzcd} FGY_1 \arrow[r, "Fu"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta Y_1"'] & FGY_2 \arrow[d, Rightarrow, "\eta Y_2"] \\ Y_1 & Y_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GFGY_1 \arrow[r, "GFu"] & GFGY_2 \\ GY_1 \arrow[r, "u"] \arrow[u, "\varepsilon GY_1", "\wr"'] & GY_2 \arrow[u, "\varepsilon GY_2"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

Zur Treuheit. Sei ein Morphismus y/s in $\mathcal{B}/\!\!/\mathcal{K}$ mit $\bar{\bar{G}}(y/s) = 0$ gegeben. Wir haben $y/s \overset{!}{=} 0$ zu zeigen.

Es ist $0 = \bar{\bar{G}}(y/s) = (Gy)(Gs)^{-1}$, und somit $Gy = 0$.

Zu zeigen ist, daß es einen $\mathcal{K}$-Quasiisomorphismus t mit $ty = 0$ gibt; cf. Bemerkung 221.

Verlaufe $Y_1 \xrightarrow{y} Y_2$. In der Tat wird

$$(\eta Y_1)y \;=\; (FGy)(\eta Y_2) \;=\; (F0)(\eta Y_2) \;=\; 0$$

wegen der Natürlichkeit von η.

Aufgabe 89

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus.

Da F exakt ist, liefert die lang exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_f \xrightarrow{\iota_f} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\rho_f} \mathrm{C}_f \longrightarrow 0$$

die lang exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F\mathrm{K}_f \xrightarrow{F\iota_f} FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{F\rho_f} F\mathrm{C}_f \longrightarrow 0\,.$$

Wir *behaupten,* daß aus Ff Isomorphismus folgt, daß f selbst ein Isomorphismus ist. In der Tat, ist Ff ein Isomorphismus, so ist $F\mathrm{K}_f \simeq 0$ und $F\mathrm{C}_f \simeq 0$; cf. Bemerkung 119.$(2, 3, 2°, 3°)$. Also ist auch $\mathrm{K}_f \simeq 0$ und $\mathrm{C}_f \simeq 0$. Somit ist f monomorph und epimorph; cf. Bemerkung 119.$(3, 5, 3°, 5°)$. Folglich ist f ein Isomorphismus; cf. Aufgabe 54.(2). Dies zeigt die *Behauptung.*

Wir haben nun zu zeigen, daß aus $Ff = 0$ folgt, daß $f = 0$ ist. In der Tat, ist $Ff = 0$, so sind $F\iota_f$ und $F\rho_f$ Isomorphismen; cf. Bemerkung 119.$(2, 4, 2°, 4°)$. Dank unserer Behauptung sind daher auch ι_f und ρ_f Isomorphismen. Also ist $f = 0$; cf. e.g. Bemerkung 119.$(4, 5, 4°, 5°)$.

Aufgabe 90

Betrachte die $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X \;:=\; \coprod_{k\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}} \mathbf{Z} & \xrightarrow{r} & \mathbf{Q} \\ (z_k)_{k\geqslant 1} & \longmapsto & \sum_{k\geqslant 1} z_k \cdot k^{-1} \end{array}$$

Diese ist surjektiv, mithin epimorph.

Für $\ell \geqslant 1$ sei

$$\begin{array}{rcl} X \;=\; \coprod_{k\in\mathbf{Z}_{\geqslant 1}} \mathbf{Z} & \xrightarrow{\pi_\ell} & \mathbf{Z} \\ (z_k)_{k\geqslant 1} & \longmapsto & z_\ell \end{array}$$

die Projektion. Diese ist $\mathbf{Z}$-linear.

Annahme, $\mathbf{Q}$ ist projektiv. Dann gibt es eine $\mathbf{Z}$-lineare Abbildung $\mathbf{Q} \xrightarrow{i} X$ mit $ir = \mathrm{id}$; cf. Definition 63. Insbesondere ist $1ir = 1$. Also gibt es ein $\ell \geqslant 1$ mit $1i\pi_\ell \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$. Wähle $x \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$ derart, daß $x^{-1}(1i\pi_\ell) \in \mathbf{Q} \smallsetminus \mathbf{Z}$ liegt. Dann ist

$$x^{-1}i\pi_\ell \;=\; x^{-1}(1i\pi_\ell) \;\in\; \mathbf{Q} \smallsetminus \mathbf{Z}\,,$$

und zugleich, als Bildelement von $i\pi_\ell$,

$$x^{-1}i\pi_\ell \;\in\; \mathbf{Z}\,.$$

Wir sind bei einem *Widerspruch* angelangt.

Cf. Lemma 67.

Aufgabe 91

Auf Objekten müssen wir $\hat{F}X := FX$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}/\mathcal{N}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ setzen.

Auf Morphismen genügt es, nachzuweisen, daß für $f, g \in {}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ mit $Rf = Rg$ folgt, daß $Ff = Fg$. Denn dann dürfen wir $\hat{F}Rf := Ff$ setzen, was wegen F Funktor einen Funktor $\hat{F}$ definiert, der $\hat{F} \circ R = F$ erfüllt. Die diesbezügliche Eindeutigkeit von $\hat{F}$ folgt aus der Surjektivität von R auf Morphismen.

Sei also $g = f + uv$, wobei $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$ und $X \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} Y$. Betrachte in $\mathcal{A}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "(1\ 0)"'] & \\ X \arrow[r, "(f\ u)"] & Y \oplus N \arrow[r, bend left, "\binom{1}{v}"] \arrow[r, bend right, "\binom{1}{0}"'] & Y\,. \end{tikzcd}$$

Dabei ist $R\,(1\ 0)$ ein Isomorphismus, invertiert von $R\binom{1}{0}$. Also ist auch $F\,(1\ 0)$ ein Isomorphismus. Es wird

$$\begin{array}{rcl} F\binom{1}{v} & = & (F\,(1\ 0))^{-1}\cdot F\,(1\ 0)\cdot F\binom{1}{v} \\ & = & (F\,(1\ 0))^{-1}\cdot F((1\ 0)\binom{1}{v}) \\ & = & (F\,(1\ 0))^{-1} \\ & = & (F\,(1\ 0))^{-1}\cdot F((1\ 0)\binom{1}{0}) \\ & = & (F\,(1\ 0))^{-1}\cdot F\,(1\ 0)\cdot F\binom{1}{0} \\ & = & F\binom{1}{0}\ . \end{array}$$

Somit wird

$$\begin{array}{rcl} Fg & = & F(f+uv) \\ & = & F((f\ u)\binom{1}{v}) \\ & = & F\,(f\ u)\cdot F\binom{1}{v} \\ & = & F\,(f\ u)\cdot F\binom{1}{0} \\ & = & F((f\ u)\binom{1}{0}) \\ & = & Ff\ . \end{array}$$

Cf. Lemma 225.

Aufgabe 92

(1) Wir sehen das Diagramm als (horizontale) kurz exakte Sequenz von (vertikal verzeichneten, mit Nullen fortgesetzen) Komplexen lesen. Die lang exakte Homologiesequenz hat auf dem linken und dem rechten Komplex nur Nullterme, also auch in der Mitte; cf. Lemma 145. Mit anderen Worten, es bildet die Sequenz (f, g) einen azyklischen Komplex; i.e. es ist (f, g) kurz exakt; cf. Bemerkung 143.

Daß die Bedingung $fg = 0$ i.a. nicht entfallen darf, zeigt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] & X \arrow[r] & 0 \\ X \arrow[u, equal] \arrow[r, "(1\ 0)"] & X\oplus X \arrow[u, "\binom{1}{0}"'] \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & X \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u, "(1\ 1)"'] \arrow[r, equal] & X \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

für ein $X \not\simeq 0$ in $\mathcal{A}$.

(2) Wir haben zu zeigen, daß $x'f$ ein Kern von $(g\ y'')$ ist.

Sei $T \xrightarrow{t} Y$ mit $t\,(g\ y'') = 0$ gegeben, i.e. mit $tg = 0$ und $ty'' = 0$. Da $x'f = f'y'$ ein Monomorphismus ist, genügt es, ein $T \xrightarrow{s} X'$ mit $sx'f = t$ zu finden.

Da $tg = 0$ ist und da dank (1) die Sequenz (f, g) kurz exakt ist, gibt es ein $T \xrightarrow{a} X$ mit $af = t$.

Da $ty'' = 0$ ist und da die Sequenz (y', y'') kurz exakt ist, gibt es ein $T \xrightarrow{b} Y'$ mit $by' = t$.

Insgesamt ist also $af = by'$. Mit Kern-Cokern-Kriterium ist (X', X, Y', Y) ein Pullback; cf. Lemma 134. Also gibt es ein $T \xrightarrow{s} X'$ mit $sf' = b$ und $sx' = a$. Folglich ist $s\,x'f = af = t$.

(3) Sei (x'', f'') eine Bildfaktorisierung von fy''. Dies liefert einen Morphismus kurz exakter Sequenzen. Eintragen der lang exakten Sequenz aus dem Schlangenlemma liefert auf den Cokernen g', g resp. g'' die kurz exakte Sequenz (z', z''); cf. Lemma 136.

Aufgabe 93

Vorüberlegung. Sei $p \geqslant 2$ prim. Für $m \in \mathbf{Z}$ schreiben wir $m =: p^{\mathrm{v}_p(m)} \cdot m'$ mit m' teilerfremd zu p.

Für $\alpha \geqslant 1$ ist $\mathrm{v}_p(p^\alpha - s) = \mathrm{v}_p(s)$ für $s \in [1, p^\alpha - 1]$, und somit

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{v}_p(\binom{p^\alpha}{j}) \\ = & \mathrm{v}_p(p^\alpha) + (\mathrm{v}_p(p^\alpha - 1) - \mathrm{v}_p(1)) + (\mathrm{v}_p(p^\alpha - 2) - \mathrm{v}_p(2)) + \cdots + (\mathrm{v}_p(p^\alpha - j + 1) - \mathrm{v}_p(j-1)) - \mathrm{v}_p(j) \\ = & \alpha - \mathrm{v}_p(j) \end{array}$$

für $j \in [1, p^\alpha]$.

Falls $p \geqslant 3$, dann ist $j - \mathrm{v}_p(j) \geqslant 2$ für $j \geqslant 2$, da $p^u - u \geqslant 2$ für $u \geqslant 1$, denn dies trifft für $u = 1$ zu, und es ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(p^u - u) = \ln(p) \cdot p^u - 1 > 0$ für $u \geqslant 1$. Somit ist $p^{\alpha+2}$ ein Teiler von $\binom{p^\alpha}{j} \cdot p^j$ für $j \in [2, p^\alpha]$.

Falls $p = 2$, dann ist $2j - \mathrm{v}_2(j) \geqslant 3$ für $j \geqslant 2$, da $2^{u+1} - u \geqslant 3$ für $u \geqslant 1$, denn dies trifft für $u = 1$ zu, und es ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(2^{u+1} - u) = \ln(2) \cdot 2^{u+1} - 1 > 0$ für $u \geqslant 1$. Somit ist $2^{\alpha+3}$ ein Teiler von $\binom{p^\alpha}{j} \cdot 2^{2j}$ für $j \in [2, p^\alpha]$.

(1) Nach Aufgabe 58.(2) genügt es zu zeigen, daß i eine Coretraktion ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß Ai ein direkter Summand von E ist, da dann mit der Projektion π auf diesen Summanden sich $i \cdot (\pi \cdot (i|^{Ai})^-) = 1$ ergibt.

Es hat E eine Untergruppe isomorph zu A. Nach Aufgabe 23.(2) hat E damit einen direkten Summanden A' mit $A \subseteq A'$, also mit $|A'|$ einem Vielfachen von $|A|$, aber mit übereinstimmenden Mengen von Primteilern von $|A'|$ und von $|A|$. Da $|E| = |A| \cdot |B|$ und da $|A|$ und $|B|$ teilerfremd sind, folgt $|A| = |A'|$ und also $A = A'$.

(2) Sei nun $p \geqslant 3$ prim.

Aus der Algebra wissen wir, daß $\mathrm{U}(\mathbf{F}_p) = \mathrm{U}(\mathbf{Z}/p)$ isomorph zu $\mathbf{Z}/(p-1)$ ist; denn wäre diese Gruppe nichtzyklisch, dann gäbe es nach Aufgabe 23.(2) einen Teiler d von $p-1$ mit $d < p-1$ derart, daß $X^d - 1 \in \mathbf{F}_p[X]$ alle Elemente von $\mathbf{F}_p \smallsetminus \{0\}$ als Nullstellen hätte.

Sei nun o.E. $k \geqslant 2$. Schreibe $\mathrm{U}_p(\mathbf{Z}/p^k) := \{\, y + p^k\mathbf{Z} \; : \; y \equiv_p 0 \,\}$. Wir haben eine kurz exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{U}_p(\mathbf{Z}/p^k) & \hookrightarrow & \mathrm{U}(\mathbf{Z}/p^k) & \longrightarrow & \mathrm{U}(\mathbf{Z}/p) \\ & & x + p^k\mathbf{Z} & \longmapsto & x + p\mathbf{Z} \,, \end{array}$$

wobei $|\mathrm{U}_p(\mathbf{Z}/p^k)| = p^{k-1}$ und $|\mathrm{U}(\mathbf{Z}/p)| = p - 1$ ist. Dank (1) genügt es also zu zeigen, daß $\mathrm{U}_p(\mathbf{Z}/p^k) \simeq \mathbf{Z}/p^{k-1}$ ist, i.e. daß $\mathrm{U}_p(\mathbf{Z}/p^k)$ ein Element von Ordnung p^{k-1} enthält, welches also zur p^{k-2}-ten Potenz nicht verschwindet.

O.E. ist $k \geqslant 3$. Dank Vorüberlegung wird mit $\alpha = k - 2$

$$(1+p)^{p^{k-2}} \;\equiv_{p^k}\; \binom{p^{k-2}}{0} \cdot p^0 + \binom{p^{k-2}}{1} \cdot p^1 \;=\; 1 + p^{k-1} \;\not\equiv_{p^k}\; 1 \,.$$

(3) Sei nun $p = 2$. Es ist $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/4) = \langle -1 + 4\mathbf{Z} \rangle \simeq \mathbf{Z}/2$.

Sei nun o.E. $k \geqslant 3$. Schreibe $\mathrm{U}_4(\mathbf{Z}/2^k) := \{\, y + 2^k\mathbf{Z} \; : \; y \equiv_4 0 \,\}$. Wir haben eine kurz exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{U}_4(\mathbf{Z}/2^k) & \hookrightarrow & \mathrm{U}(\mathbf{Z}/2^k) & \longrightarrow & \mathrm{U}(\mathbf{Z}/4) \\ & & x + 2^k\mathbf{Z} & \longmapsto & x + 4\mathbf{Z} \,, \end{array}$$

wobei $|\mathrm{U}_4(\mathbf{Z}/2^k)| = 2^{k-2}$ und $|\mathrm{U}(\mathbf{Z}/4)| = 2$ ist. Letzterer Morphismus ist eine Retraktion, mit Coretraktion $\mathrm{U}(\mathbf{Z}/2^k) \longleftarrow \mathrm{U}(\mathbf{Z}/4)$, $-1 + 2^k\mathbf{Z} \longleftarrow\!\!| -1 + 4\mathbf{Z}$. Dank Aufgabe 58.(2)° genügt es also zu zeigen, daß $\mathrm{U}_4(\mathbf{Z}/2^k) \simeq \mathbf{Z}/2^{k-2}$ ist, i.e. daß $\mathrm{U}_4(\mathbf{Z}/2^k)$ ein Element von Ordnung 2^{k-2} enthält, welches also zur 2^{k-3}-ten Potenz nicht verschwindet.

O.E. ist $k \geqslant 4$. Dank Vorüberlegung wird mit $\alpha = k - 3$

$$(1+4)^{2^{k-3}} \;\equiv_{2^k}\; \binom{2^{k-3}}{0} \cdot 4^0 + \binom{2^{k-3}}{1} \cdot 4^1 \;=\; 1 + 2^{k-1} \;\not\equiv_{2^k}\; 1 \,.$$

Literatur

[1] Baer, R., *Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group*, Bull. Am. Math. Soc. 46, 1940.

[2] Bühler, T., *Exact Categories,* Exp. Math. 28 (1), p. 1–69 (s.a. arxiv:0811.1480v2), 2010.

[3] Cartan, H.; Eilenberg, S., *Homological Algebra,* Princeton University Press, 1956.

[4] Freyd, P., *Stable Homotopy,* Proc. Conf. Categorical Algebra, La Jolla, p. 121-172, Springer, 1965.

[5] Grothendieck, A., *Sur quelques points d'Algebre Homologique*, Tôhoku Math. J., 2nd ser., 9, p. 119–221, 1957.

[6] Künzer, M., *Galoistheorie,* Skript, Koblenz, 2009.

[7] Künzer, M., *Topologie,* Skript, Koblenz, 2009.

[8] Künzer, M., *Cohomologie von Gruppen,* Skript, Aachen, 2006.

[9] Mitchell, B., *Theory of categories,* Academic Press, 1965.

[10] Roggenkamp, K.W., *Homologische Algebra,* Skript, Stuttgart, 1975.

[11] Schubert, H., *Kategorien I,* Heidelberger Taschenbücher, 1970.

[12] Serre, J.-P., *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens,* Ann. of Math. (2) 58, p. 258–294, 1953.

[13] Thomas, S., *On the 3-arrow calculus for homotopy categories*, arXiv:1001.4536, 2010.

[14] Yoneda, N. *On the homology theory of modules,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I, 7, p. 193–227, 1954.

[15] Verdier, J.-L., *Des catégories dérivées des catégories abéliennes,* hrsg. von G. Maltsiniotis, Astérisque 239, 2006 (verfaßt 1967).

[16] Weibel, C., *An introduction to Homological Algebra,* Cambridge University Press, 1994.

Das grundlegende Werk über Homologische Algebra stammt von Henri Cartan und Samuel Eilenberg [**3**]. Cartan erinnerte sich wie folgt.

> "Samuel Eilenberg died in New York on January 30, 1998, after spending two years in a state of precarious health. I would like to write here of the mathematician and especially of the friend that I gradually discovered in the course of a close collaboration that lasted at least five years and that taught me many things.
>
> I met Sammy for the first time at the end of December 1947 [...]. Of course, Eilenberg was not unknown to me, because since the end of the war I had begun to be interested in algebraic topology. Notably I had studied the article in the 1944 Annals of Mathematics in which Eilenberg set forth his theory of singular homology (one of those theories which immediately takes on a definitive shape). I had, for my part, reflected on the "Künneth formula", which gives the Betti numbers and the torsion coefficients of the product of two simplicial complexes. In fact, that formula amounts to a calculation of the homology groups of the tensor product of two graded differential groups as a function of the homology groups of each of them. The solution involves not only the tensor product of the homology groups of the factors but also a new functor of these groups, the functor Tor. At the time of my first meeting with Sammy, I was quite happy with telling that to him.

> This was the point of departure for our collaboration, by means of postal mail at first. Then Sammy came to spend the year 1950-51 in Paris. He took part in my seminar at the École Normale, devoted that year to cohomology of groups, spectral sequences, and sheaf theory. Sammy gave two lectures on spectral sequences. Armand Borel and Jean-Pierre Serre took an active part in this seminar also.
>
> Independently of the seminar, Sammy and I had work sessions with the aim of writing an article that would develop some of the new ideas born out of the Künneth formula. [...] It was always he who wrote everything up as we went along in precise and concise English. After the notion of satellites of a functor came that of derived functors, with their axiomatic characterization. Gradually the theory included several existing theories (cohomology of groups, cohomology of Lie algebras, in the sense of Chevalley and Eilenberg, cohomology of associative algebras). [...]
>
> Sammy knew how to put his friends to work. I think I remember that he persuaded Steenrod to contribute the preface of our book, where the evolution of the ideas is explained perfectly. He arranged also for other colleagues to collaborate in the writing of the chapter devoted to finite groups. Our initial project of a mere article for a journal was transformed; it became a book that we would propose to a publisher and for which it would be necessary to find a title that captured its content. We finally agreed on the term Homological Algebra. The text was given to Princeton University Press in 1953. I do not know why the book appeared only in 1956." (Interview in Notices AMS, Nov. 1998)

Der in loc. cit. gewählte Rahmen der Modulkategorien erwies sich trotz bereits zahlreicher Anwendungen als zu eng gefaßt. Buchsbaum, in einem Anhang zu [**3**], und Grothendieck [**5**] entwickelten daraufhin den Begriff der abelschen Kategorie. Für weitere Entwicklungen konsultiere man die Einleitung zu Verdiers Dissertation [**15**].

Die Tatsache, daß Modulkategorien genügend Injektive haben, geht auf Baer zurück [**1**].

Das Yoneda-ext entstammt der Arbeit [**14**] von Yoneda.

Die Lokalisierungstheorie abelscher Kategorien wurde von Serre [**12**] initiiert und von Grothendieck [**5**] zum erstenmal explizit ausgeführt. In größerer Allgemeinheit wird Lokalisierungstheorie e.g. in der Arbeit [**13**] behandelt, nach der ich mich weitgehend gerichtet habe.

Die Freyd-Kategorie einer schwach abelschen Kategorie entstammt der Arbeit [**4,** §3] von Freyd. Siehe auch [**15,** II.§3].

In den Büchern von Mitchell [**9**] und Schubert [**11**] findet man u.a. die Theorie der additiven und der abelschen Kategorien in Lehrbuchform. Das neuere Buch von Weibel [**16**] ist ähnlich umfassend wie das von Cartan-Eilenberg [**3**].