M. Künzer

Ergänzungen zur Höheren Mathematik, SoSe 19

Blatt 6

Aufgabe 12 Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei also L nicht abhängig von einer dritten Variablen.
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen.
Sei für eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ die Euler-Lagrange-Differentialgleichung

$$0 \;=\; \partial_1 L(f(x), f'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\partial_2 L(f(x), f'(x)))$$

betrachtet.

(1) Man bestätige

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L(f(x), f'(x))) \;=\; \partial_1 L(f(x), f'(x)) \cdot f'(x) + \partial_2 L(f(x), f'(x)) \cdot f''(x)\ .$$

(2) Man bestätige

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(L(f(x), f'(x)) - \partial_2 L(f(x), f'(x)) \cdot f'(x)\big) \\ = \;\; & f'(x) \cdot \Big(\partial_1 L(f(x), f'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\partial_2 L(f(x), f'(x)))\Big) \end{aligned}$$

(3) Gilt $L(f(x), f'(x)) - \partial_2 L(f(x), f'(x)) \cdot f'(x) = D$ für eine Konstante $D \in \mathbb{R}$, so überprüfe man, daß f die Euler-Lagrange-Differentialgleichung erfüllt.

(4) Sei nun $L(z, w) = z \cdot \sqrt{1 + w^2}$, wie im Falle der rotierenden Minimalfläche. Man stelle die Gleichung aus (3) im vorliegenden Fall auf.

Man bestätige, daß $f(x) = a \cdot \cosh(a^{-1}x + c)$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ diese Gleichung löst.

Man vergleiche mit der in der Vorlesung gegebenen Lösung.

Aufgabe 13 Wir suchen den Weg eines Lichtstrahls in der Ebene in einem Medium, in welchem die Lichtgeschwindigkeit mit dem Ort variiert.

Dabei folgen wir dem Prinzip, daß ein Lichtstrahl immer den schnellsten Weg zwischen zwei Punkten nimmt.

Sei einmal die Lichtgeschwindigkeit an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch $v(x, y) = x$.

Von einem Punkt (x_1, y_1) zu einem Punkt (x_2, y_2) mit $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$ folge der Lichtstrahl dem Graphen der stetig differenzierbaren Funktion $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$.

Die Zeit

$$\int_{x_1}^{x_2} v(x, y)^{-1} \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

die der Lichstrahl benötigt, ist zu minimieren.

Man überprüfe, daß dazu der Lichtstrahl einem Kreisbogen folgt, genommen aus einem Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der y-Achse hat.