M. Künzer

Ergänzungen zur Höheren Mathematik, SoSe 19

Blatt 1

Aufgabe 1 Sei $n \geqslant 1$. Seien $B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(1) Formen wir B mittels Zeilenumformungen zu einer Matrix $\tilde{B}$ um, so gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $SB = \tilde{B}$.

(2) Wir stehen vor der Aufgabe, eine Basis des Kerns von BC zu bestimmen, d.h. eine Basis des Lösungsraums des homogenen LGS zu BC.

Man begründe: Es ist der Kern von BC gleich dem Kern von $\tilde{B}C$.

Wir dürfen also im Produkt BC die bereits umgeformte Matrix $\tilde{B}$ an die Stelle von B treten lassen. Hierbei dürfen noch Nullzeilen von $\tilde{B}$ weggelassen werden.

Aufgabe 2 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Man bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$.

(2) Man bestimme den Eigenwert λ_1 von A samt algebraischer Vielfachheit.

(3) Sei an $A_{(1)} := A - \lambda_1 \mathrm{E}_3$ erinnert.

Man bestimme eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$.

Man ergänze diese Basis zu einer Basis des Raums $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Man ergänze diese Basis zu einer Basis des Raums $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^3)$.

Etc.

Für welchen Exponent $s \geqslant 1$ ist $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^s) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}^{s+1})$?

Man bestimme eine Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(\lambda_1)$.

Aufgabe 3 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Man bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$.

(2) Man bestimme die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von A samt algebraischer Vielfachheiten.

(3) Für jeden Eigenwert λ_k von A verfahre man wie folgt.

Man bestimme eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Kern}(A_{(k)})$.

Man ergänze diese Basis zu einer Basis des Raums $\mathrm{Kern}(A_{(k)}^2)$.

Man ergänze diese Basis zu einer Basis des Raums $\mathrm{Kern}(A_{(k)}^3)$.

Etc.

Für welchen Exponent $s \geqslant 1$ ist $\mathrm{Kern}(A_{(k)}^s) = \mathrm{Kern}(A_{(k)}^{s+1})$?

Man bestimme eine Basis des Hauptraums $\mathrm{H}_A(\lambda_k)$.