

Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 9

Hausaufgabe 33 Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Sei in \mathcal{A} der Pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ x \downarrow & \lrcorner & \downarrow y \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

gegeben. Man bilde den Pullback

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{u} & Y \\ v \downarrow & \ulcorner & \downarrow y \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}.$$

- (1) Man zeige: (P, Y, X', Y') ist ein Quadrat.
- (2) Man zeige: Der eindeutig existente Morphismus $X \xrightarrow{a} P$ mit $au = f$ und $av = x$ ist ein Epimorphismus.
- (3) Man konstruiere ein Quadrat (K_f, X, K_u, P) .

Hausaufgabe 34 Wir arbeiten in $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/27\text{-Mod}$.

- (1) Man ergänze das Diagramm $\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xleftarrow{1} \mathbb{Z}/27$ zu einem Pullback. Man teste das Kern-Cokern-Kriterium in beiden Richtungen. Liegt ein Quadrat vor?
- (2) Man ergänze das Diagramm $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{3} \mathbb{Z}/9 \xleftarrow{1} \mathbb{Z}/27$ zu einem Pullback. Welche seiner Morphismen sind Retraktionen? Man teste das Kern-Cokern-Kriterium in beiden Richtungen.
- (3) Man gebe einen Pullback an, der kein Quadrat ist.

Hausaufgabe 35 Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Man zeige.

- (1) Es ist $[\mathbb{Z}^k, \mathcal{A}]$ eine abelsche Kategorie.
- (2) Die volle Teilkategorie $C(\mathcal{A}) \subseteq [\mathbb{Z}^k, \mathcal{A}]$ der Komplexe mit Werten in \mathcal{A} ist eine abelsche Kategorie.

Hausaufgabe 36 Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Sei in \mathcal{A} ein Morphismus kurz exakter Sequenzen folgender Form gegeben.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{(1\ 0)} & X \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Y \\ 0 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow 0 \\ X' & \xrightarrow{(1\ 0)} & X' \oplus Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Y' \end{array}$$

Man berechne hierfür die lang exakte Sequenz aus dem Schlangenlemma.