M. Künzer — Abgabe im Ilias bis Do 27.06.2024 oder in der Übung

Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 8

Hausaufgabe 29 (A47) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei darin $X \xrightarrow{f} Y$ gegeben.
Sei $K \xrightarrow{i} X$ ein Kern von f. Sei $Y \xrightarrow{r} C$ ein Cokern von f. Sei $X \xrightarrow{r'} C'$ ein Cokern von i. Sei $K' \xrightarrow{i'} Y$ ein Kern von r. Man zeige.

(1) Falls f monomorph ist, dann ist f ein Kern von r.

(2) Falls f monomorph und epimorph ist, dann ist f ein Isomorphismus.

(3) Es gibt ein kommutatives Diagramm wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
& & C' \arrow[dd, "\tilde f", "\wr"'] & & \\
K \arrow[r, "i"] & X \arrow[ur, "r'"] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[r, "r"] & C \\
& & K' \arrow[ur, "i'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Hausaufgabe 30 Wir betrachten die abelsche Kategorie $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/27$-Mod.

(1) Wir wissen: Die Sequenz $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{(1\;0)} \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathbb{Z}/27$ ist kurz exakt.

Man zeige: Die Sequenz $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{(1\;9)} \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{\binom{-9}{1}} \mathbb{Z}/27$ ist isomorph zur erstgenannten, in $\llbracket \{0,1,2\}^{\mathrm{k}}, \mathcal{A} \rrbracket$.

Man folgere: Die zweitgenannte Sequenz ist kurz exakt.

(2) Man konstruiere das vom Wechsellemma und von seiner dualen Aussage gelieferte Diagramm für das Diagramm aus den beiden kurz exakten Sequenzen aus (1).

Hausaufgabe 31 (A49) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

(1) Man zeige: Der Funktor ${}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod ist linksexakt.

(2) Man folgere aus (1): Der Funktor ${}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^{\circ} \longrightarrow \mathbb{Z}$-Mod ist linksexakt.

Hausaufgabe 32 (A46) Man zeige oder widerlege.
Sei $\mathbb{Z}$-free die volle additive Teilkategorie von $\mathbb{Z}$-Mod der $\mathbb{Z}$-Moduln der Form $\mathbb{Z}^{\oplus k}$ für ein $k \geqslant 0$.

(1) In $\mathbb{Z}$-free hat jeder Morphismus einen Cokern.

(2) In $\mathbb{Z}$-free ist jeder Epimorphismus ein Cokern eines Morphismus.

(3) Es ist $\mathbb{Z}$-free eine abelsche Kategorie.

`pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/lexmath/kuenzer/halg24/`