Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 7

Hausaufgabe 25 Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

(1) Sei $m \geqslant 0$. Seien $X_1, \ldots, X_m \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Man zeige: $(X_1, \ldots, X_m)$ besitzt eine direkte Summe.

(2) Seien $\ell, m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für $i \in [1, \ell]$, $Y_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für $j \in [1, m]$ und $Z_k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für $k \in [1, n]$. Seien $\bigoplus_{i\in[1,\ell]} X_i \xrightarrow{(f_{i,j})_{i,j}} \bigoplus_{j\in[1,m]} Y_j \xrightarrow{(g_{j,k})_{j,k}} \bigoplus_{k\in[1,n]} Z_k$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Man zeige: $(f_{i,j})_{i,j}\,(g_{j,k})_{j,k} = \big(\sum_{j\in[1,m]} f_{i,j} g_{j,k}\big)_{i,k}$.

(3) Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_1, \ldots, f_{k+\ell} : X \to Y$ in $\mathcal{A}$. Man zeige:
$(\sum_{i\in[1,k]} f_i) + (\sum_{i\in[1,\ell]} f_{i+k}) = \sum_{i\in[1,k+\ell]} f_i$.

Hausaufgabe 26 Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie.

(1) Seien $k, \ell \geqslant 0$. Seien $f_i : X \to Y$ für $i \in [1, k]$ und $g_j : Y \to Z$ für $j \in [1, \ell]$ in $\mathcal{A}$. Man zeige: $(\sum_{i\in[1,k]} f_i)(\sum_{j\in[1,\ell]} g_j) = \sum_{i\in[1,k]} \sum_{j\in[1,\ell]} f_i g_j$.

(2) Seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Man zeige: Es ist $\big({}_{\mathcal{A}}(X, Y), +\big)$ eine abelsche Gruppe, mit neutralem Element $0 = 0_{X,Y}$.

(3) Seien $m, n \geqslant 0$. Seien $X_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für $i \in [1, m]$ und $Y_j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für $j \in [1, n]$.
Seien $\bigoplus_{i\in[1,m]} X_i \overset{(f_{i,j})_{i,j}}{\underset{(f'_{i,j})_{i,j}}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{j\in[1,n]} Y_j$ in $\mathcal{A}$. Man zeige: $(f_{i,j})_{i,j} + (f'_{i,j})_{i,j} = (f_{i,j} + f'_{i,j})_{i,j}$.

Hausaufgabe 27 Seien R und S Ringe. Sei ${}_R M_S$ ein R-S-Bimodul.
Man zeige: Der Funktor

$$ {}_R M_S \underset{S}{\otimes} - \;:\; S\text{-Mod} \;\to\; R\text{-Mod} $$

ist additiv. Vgl. Beispiel 85.(3).

Hausaufgabe 28 Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ eine volle additive Teilkategorie. Sei $\mathcal{B}$ eine additive Kategorie. Man zeige.

(1) Es ist $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ eine additive Kategorie. Es ist $\mathcal{A} \xrightarrow{R} \mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein additiver Funktor.

(2) Sei $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ ein additiver Funktor mit $FX \simeq 0$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Dann gibt es genau einen additiven Funktor $\mathcal{A}/\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{B}$ mit $\bar{F} \circ R = F$.

(3) Seien $\mathcal{A} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ additive Funktoren mit $FX \simeq 0$ und $GX \simeq 0$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{N})$. Sei $F \xrightarrow{a} G$ eine Transformation. Dann gibt es genau eine Transformation $\bar{F} \xrightarrow{\bar{a}} \bar{G}$ mit $\bar{a}RX = aX$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.