Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 6

Hausaufgabe 21

(1) Sei P eine Menge. Sei $(\leqslant)$ eine Relation auf P, die reflexiv und transitiv ist. Es ist $P = (P, \leqslant)$ also eine präteilgeordnete Menge.

Wir wollen die Kategorie P^{k} konstruieren. Sie habe

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ob}(P^{\mathrm{k}}) & := & P \\ \mathrm{Mor}(P^{\mathrm{k}}) & := & \{ (i,j) \in P \times P \,:\, i \leqslant j \} . \end{array}$$

Sei $i \xrightarrow{(i,j)} j$ für $(i,j) \in \mathrm{Mor}(P^{\mathrm{k}})$. Sei $\mathrm{id}_i = (i,i)$ für $i \in \mathrm{Ob}(P^{\mathrm{k}})$.

Für $i \xrightarrow{(i,j)} j \xrightarrow{(j,k)} k$ sei das Kompositum definiert durch $(i,j) \cdot (j,k) := (i,k)$.

Man zeige: Es ist P^{k} eine Kategorie.

(2) Seien $P = (P, \leqslant)$ und $Q = (Q, \leqslant)$ präteilgeordnete Mengen. Sei $f : P \to Q$ eine Abbildung, für welche für $i,\, j \in P$ gilt: $i \leqslant j \Rightarrow if \leqslant jf$.

Man konstruiere den Funktor $f^{\mathrm{k}} : P^{\mathrm{k}} \to Q^{\mathrm{k}}$, für welchen $\mathrm{Ob}(f^{\mathrm{k}}) = f$ ist.

Hausaufgabe 22 Sei $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Man zeige oder widerlege.

(1) Es ist $\mathrm{Ob}(F) : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ injektiv.

(2) Es ist $\mathrm{Mor}(F) : \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ surjektiv.

(3) Sei $X \xrightarrow{u} X'$ in $\mathcal{C}$. Es ist u ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ genau dann, wenn Fu ein Monomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

Hausaufgabe 23 Wir betrachten die Funktoren

$$\begin{array}{rcrcl} F & := & \mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/4}{\otimes} - : & \mathbb{Z}/4\text{-Mod} & \to & \mathbb{Z}/2\text{-Mod} \\ G & := & {}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, -) : & \mathbb{Z}/4\text{-Mod} & \to & \mathbb{Z}/2\text{-Mod} \end{array}$$

(1) Man konstruiere eine Transformation von F nach G ungleich $(0)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbb{Z}/4\text{-Mod})}$.

(2) Man zeige: F und G sind nicht isomorph in $[\![\mathbb{Z}/4\text{-Mod}, \mathbb{Z}/2\text{-Mod}\,]\!]$.

Hausaufgabe 24 Sei $P = \{0, 1\}$, wobei $0 < 1$. Sei $D := P^{\mathrm{k}}$. Sei R ein Ring.
Sei $\mathcal{C} := [\![D, R\text{-Mod}\,]\!]$. Objekte in $\mathcal{C}$ sind also Funktoren von D nach R-Mod, die wir als Diagramme der Form $X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1$ in R-Mod darstellen.

(1) Man konstruiere einen Funktor $E_0 : \mathcal{C} \to R$-Mod, welcher das Objekt $X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1$ nach X_0 abbildet.

(2) Man konstruiere einen Funktor $K : \mathcal{C} \to R$-Mod, welcher das Objekt $X_0 \xrightarrow{u_{0,1}} X_1$ nach $\mathrm{Kern}(u_{0,1})$ abbildet.

(3) Man konstruiere eine Transformation $\alpha : K \to E_0$, welche als Tupel gesehen aus injektiven R-linearen Abbildungen besteht.