Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 5

Hausaufgabe 17 (A26) Seien R und S Ringe.

Sei ${}_R M_S \xleftarrow{f} {}_R M'_S$ eine R-S-lineare Abbildung zwischen R-S-Bimoduln.

Sei ${}_R N \xrightarrow{g} {}_R N'$ eine R-lineare Abbildung zwischen R-Linksmoduln.

Sei ${}_S X \xleftarrow{h} {}_S X'$ eine S-lineare Abbildung zwischen S-Linksmoduln.

Sei $\alpha_{X,M,N}$ wie in Lemma 62 gegeben.

Man zeige, daß folgendes Viereck von $\mathbb{Z}$-Moduln und $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
{}_R(\,{}_R M_S \underset{S}{\otimes} {}_S X,\, {}_R N) \arrow[r, "\alpha_{X,M,N}", "\sim"'] \arrow[d, "{}_R(f \underset{S}{\otimes} h,\, g)"'] & {}_S(\,{}_S X,\, {}_R(\,{}_R M_S\,,\, {}_R N)) \arrow[d, "{}_S(h,\, {}_R(f,g))"] \\
{}_R(\,{}_R M'_S \underset{S}{\otimes} {}_S X',\, {}_R N') \arrow[r, "\alpha_{X',M',N'}", "\sim"'] & {}_S(\,{}_S X',\, {}_R(\,{}_R M'_S\,,\, {}_R N'))
\end{tikzcd}$$

Hausaufgabe 18 (A28) Sei R ein Ring. Man zeige folgende Aussagen.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein projektiver R-Linksmodul P_α gegeben. Dann ist $\coprod_{\alpha \in A} P_\alpha$ projektiv.

(2) Seien R-Linksmoduln X und Y gegeben mit $X \oplus Y$ projektiv. Dann sind auch X und Y projektiv.

(3) Ein R-Linksmodul X ist genau dann projektiv, wenn es eine Menge B und einen R-Linksmodul Y gibt mit $X \oplus Y \simeq \coprod_{\beta \in B} R$. Insbesondere ist $R^{\oplus n}$ projektiv für $n \geqslant 0$.

(4) Für jeden R-Linksmodul M gibt es einen projektiven R-Linksmodul P und eine surjektive R-lineare Abbildung $P \to M$.

Hausaufgabe 19 (A29) Sei R ein Ring. Man zeige folgende Aussagen.

(1) Sei A eine Menge. Sei für jedes $\alpha \in A$ ein injektiver R-Linksmodul I_α gegeben. Dann ist $\prod_{\alpha \in A} I_\alpha$ injektiv.

(2) Sind X und Y zwei R-Linksmoduln so, daß $X \oplus Y$ injektiv ist, dann sind auch X und Y injektiv.

(3) Aus dem Beweis von Satz 68 wissen wir: Ist ${}_{\mathbb{Z}}J$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul, dann ist ${}_{\mathbb{Z}}(\,{}_{\mathbb{Z}}R_R,\, {}_{\mathbb{Z}}J)$ ein injektiver R-Linksmodul.

Man verwende dies, um zu zeigen: Sei $n \geqslant 1$. Es ist $\mathbb{Z}/n$ ein injektiver $\mathbb{Z}/n$-Modul.

Hausaufgabe 20 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei darin $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ gegeben. Man zeige:

(1) Ist $f \cdot g$ ein Monomorphismus, dann ist f ein Monomorphismus.

(2) Ist f ein Monomorphismus und eine Retraktion, dann ist f ein Isomorphismus.

(3) Sind f und g Epimorphismen, dann auch $f \cdot g$.

(4) Es ist f genau dann ein Monomorphismus in $\mathcal{C}$ wenn f ein Epimorphismus in $\mathcal{C}^\circ$ ist.