Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 4

Hausaufgabe 13 (A21.(2))

Seien R, S, T Ringe.
Seien Bimoduln $M = {}_S M_R$ und $N = {}_R N_T$ gegeben.
Man zeige unter Verwendung der Abbildung $\lambda_{s,t}$ aus dem Beweis zu Bemerkung 58:
Es gibt auf der abelschen Gruppe ${}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T$ eine S-T-Bimodulstruktur, für welche

$$s \cdot (m \otimes n) * t \; = \; (s \cdot m) \otimes (n * t)$$

ist für $m \in M$, $n \in N$, $s \in S$, $t \in T$.

Hausaufgabe 14 (A20.(2))

Sei $R = (R, +, \cdot_R)$ ein Ring.
Seien α, β, γ, δ Ringisomorphismen von R nach R.
Wir betrachten die R-R-Bimoduln ${}_\alpha R_\beta$, ${}_\gamma R_\delta$; vgl. Hausaufgabe 10.
Man finde Ringisomorphismen ε, ϑ von R nach R und einen Isomorphismus von R-R-Bimoduln

$${}_\alpha R_\beta \underset{R}{\otimes} {}_\gamma R_\delta \overset{\sim}{\to} {}_\varepsilon R_\vartheta$$

Hausaufgabe 15

Seien R, S, T Ringe.

(1) Sei ${}_S M_R \xrightarrow{u} {}_S M'_R$ eine S-R-lineare Abbildung zwischen Bimoduln. Sei ${}_R N_T \xrightarrow{v} {}_R N'_T$ eine R-T-lineare Abbildung zwischen Bimoduln.

Man konstruiere die S-T-lineare Abbildung

$${}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T \xrightarrow{u \underset{R}{\otimes} v} {}_S M'_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T \; ,$$

für welche $(m \otimes n)(u \underset{R}{\otimes} v) = (mu) \otimes (nv)$ ist für $m \in M$ und $n \in N$.

(2) Seien ${}_S M_R$, ${}_R N_T$ und ${}_R N'_T$ Bimoduln. Man finde einen Isomorphismus

$${}_S M_R \underset{R}{\otimes} ({}_R N_T \oplus {}_R N'_T) \; \to \; {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N_T \oplus {}_S M_R \underset{R}{\otimes} {}_R N'_T$$

von S-T-Bimoduln, sowie sein Inverses.

Hausaufgabe 16

(1) Wir betrachten den $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}$-Bimodul $\mathbb{Q}^{2\times 1}$. Wir betrachten den $\mathbb{Q}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Bimodul $\mathbb{Q}^{1\times 3}$. Wir betrachten den $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Bimodul $\mathbb{Q}^{2\times 3}$.

Man finde einen Isomorphismus von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-$\mathbb{Q}^{3\times 3}$-Bimoduln

$$\mathbb{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}^{1\times 3} \overset{\sim}{\to} \mathbb{Q}^{2\times 3} \; .$$

Man finde ein Element in $\mathbb{Q}^{2\times 1} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}^{1\times 3}$, das kein Elementartensor ist.

(2) Seien m, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Man zeige: Jedes Element von $\mathbb{Z}/m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}/n$ ist ein Elementartensor.